Дж. Ф. Белл

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

## часть II

## КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Перевод с английского
А. М. ЛИНЬКОВА, Б. С. ТУРСУНОВА, Л. И. ФИЛИНОЙ, И. М. ЧЕРНЕВОЙ и Э. А. ШРАЕРА

Под редакцией А. П. ФИЛИНА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.25
Б 43
УДК 593.3

# ENCYCLOPEDIA OF PHYSICS

Chief Editor
S. FLÜGGE

volume VIa/1

## MECHANICS OF SOLIDS I

Editor
C. TRUESDELL

WITH 481 FIGURES

SPRINGER-VERLAG
BERLIN — HEIDELBERG — NEW YORK
1973

**Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел.** Белл Дж. Ф В 2-х частях. Часть II. Конечные деформации: Пер. с англ./Под ред. А. П. Филина.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 432 с.

Книга представляет собой перевод последнего, IV раздела одного из томов (VIa/1) «Физической энциклопедии» (ФРГ, «Шпрингер»). В часть II входит раздел — конечные деформации. Возникновение последних рассматривается в различных условиях, в различных телах и, в частности, с учетом предшествующей истории напряженного состояния.

Перевод разделов I—III книги Дж. Ф. Белла «Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть I. Малые деформации» на русском ясыке уже издан (М.: Наука, 1984).

Для специалистов, работающих как в области экспериментальной механики, так и в области теории, и будет полезна также преподавателям, аспирантам и студентам втузов.

Табл. 32, илл. 267, библ. 501.

© by Springer-Verlag Berlin—Heidelberg, 1973.
All Rights Reserved

Authorized translation from English language edition published by Springer-Verlag Berlin — Heidelberg — New York

Б 1703040000—136 / 053(02)—84 67—84

© Перевод на русский язык. Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1984

## ОГЛАВЛЕНИЕ


**IV. Конечные деформации** . . . . . 5
4.1. Немногочисленные эксперименты, выполненные до 1800 г. . . . 5
4.2. 1800—1850 гг.: эксперименты Навье и Кориолиса по ползучести и обзор Понселе исследований, выполненных до 1840 г. . . . . 7
4.3. Опыты Треска по течению твердых тел (1864—1872) . . . . . 15
4.4. Эксперименты Треска по пробивке и экструзии . . . . . 18
4.5. Открытие Тарстоном зависимости предела упругости от предшествующей истории напряжеиного состояиия и ее продолжительности (1873) . . . . . 38
4.6. Эксперименты по определению пределов упругости, текучести и усталости, предшествовавшие опытам Тарстона и Баушингера: Талеи (1864), Видеман (1859) и Вёлер (1858—1870) . . . . . 47
4.7. Эксперименты Баушингера по изучению пределов текучести и упругости (1875—1886) . . . . . 54
4.8. О прочности твердых тел, находящихся под воздействием давления: эксперименты Спринга (1880) . . . . . 71
4.9. Ранние эксперименты XX века по течеиию твердых тел, находящихся под высоким давлением: Тамманн (1902) . . . . . 77
4.10. Начало экспериментального изучения больших деформаций кристаллических твердых тел с учетом историй нагружения, при которых имеются более чем один ненулевой компонент напряжения: Гест (1900) . . . . . 82
4.11. Пластичность мрамора и песчаиика, возникающая при объемном напряженном состоянии: фон Карман (1911) . . . . . 86
4.12. Большая деформация твердых тел под воздействием высокого гидростатического давления: Бриджмен (1909—1961) . . . . 90
4.13. Динамическая фуикция отклика для твердых деформируемых тел, находящихся под воздействием высокого давления . . . 99
4.14. Дальнейшее изучение эксперимента Геста: Лоде (1926) и Тэйлор и Квинни (1931) . . . . . 101
4.15. О соотношении между функциями отклика в случае больших деформаций при различных путях простого нагружения: эксперименты Е. А. Дэвиса с поликристаллическими телами (1943—1945) . . . . . 110
4.16. Эксперименты Бриджмена 40-х годов XX века по изучению пластической деформации стали . . . . . 115
4.17. Эксперименты с монокристалламн: количественная упорядоченность в функциях отклика при большнх деформациях твердых тел . . . . . 117
4.18. Квантование числовых значений коэффициентов параболы отклнка и переходы второго порядка для определяющих касательных напряжений при конечных деформациях моиокристаллов: Белл (1960—1968) . . . . . 140
4.19. Определение напряжений и измерение деформаций в обсуждаемых экспериментальных результатах по большим деформациям 151
4.20. Квазистатические экспернменты с поликристаллическимн телами прн больших деформациях: опыты при одноосном напряженном состоянии . . . . . 156

4.21. Квантованные значения коэффициентов параболы и переходы второго порядка при конечных деформациях полностью отожженных поликристаллических тел . . . . . 160
4.22. Квазистатические эксперименты с поликристаллическими телами при конечных деформациях: кручение полых труб . . . . . 175
4.23. Эксперименты по термопластичности . . . . . 178
4.24. Вязкопластичность в металлах: эксперименты, проводившиеся до 1940 г. . . . . 184
4.25. Эксперименты на удар, проведенные Дж. Гопкинсоном (1872) и Данном (1897) . . . . . 193
4.26. Об усилиях, предпринимавшихся в течение семидесяти пяти лет по дальнейшему развитию опыта Данна, основанному на его предположении об идентичности квазистатических и ударных опытов с короткими образцами . . . . . 203
4.27. Распространение волн конечной амплитуды в отожженных поликристаллических телах: эксперименты, проводившиеся с 1942 по 1956 г. . . . . 218
4.28. О непосредственном измерении профилей волн деформаций конечной амплитуды при их распространении: Белл (1956—1972) 243
4.29. Экспериментальное изучение волн разгрузки в условиях динамической пластичности: Белл (1961) . . . . . 265
4.30. Динамический предел упругости . . . . . 272
4.31. Прерывистость конечной деформации: эффект Савара — Массоиа (Портвена — Ле Шателье) . . . . . 277
4.32. О предсказании вида функции отклика и значения деформации перехода второго порядка в поликристаллическом теле по известной картине деформации монокристалла . . . . . 295
4.33. Об изучении поверхности текучести, выполнявшемся после 1948 г. на основе обобщающего развития экспериментов Геста и опытов Баушингера . . . . . 308
4.34. Краткий обзор экспериментов, выполненных после 1960 г., в котором описываются дополнительные аспекты распространения волн конечной амплитуды в кристаллических твердых телах 325
4.35. Об экспериментах, ведущих к общей теории пластичности при отклике в условиях нагружения отожженных кристаллических твердых тел . . . . . 338
4.36. Об открытии ударных волн в растягиваемых резиновых шнурах: Колски (1969) . . . . . 355
4.37. Эксперименты с испытывающими конечные деформации резиновыми шнурами, подвергнутыми поперечному удару . . . . 357
4.38. Эксперименты Пойнтинга (1909—1912) . . . . . 360
4.39. Эксперименты по конечным упругим деформациям резины: от Джоуля до Ривлина (от 50-х гг. XIX века до 50-х гг. XX века) 366
4.40. Резюме . . . . . 382

**Литература** . . . . . 385

Примечания редактора перевода . . . . . 412
Именной указатель . . . . . 416
Предметный указатель . . . . . 422

Содержание разделов I—III книги Дж. Ф. Белла «Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть I. Малые деформации» . . . . . 429

## IV. КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

### 4.1. Немногочисленные эксперименты, выполненные до 1800 г.

С точки зрения специалиста XX века эксперименты Якова Бернулли (Bernoulli [1694, 1]) в XVII столетии, посвященные изучению больших деформаций кетгутовых струн, по их исторической значимости представляются сопоставимыми с экспериментами Роберта Гука (Hooke [1678, 1]), в которых исследовались малые деформации железных струн. Если к этому добавить обнаружение Джакопо Риккати (Riccati [1721, 1]) точки перегиба в графике зависимости сила — удлинение, полученном в экспериментах с кетгутовой струной в 1721 г., наличие которой, как я отметил выше, Кармарш (Karmarsch [1841, 1]) спустя полтора века связал с началом остаточной деформации, имевшим место при деформации, достигавшей примерно 10%, то становится очевидным, что существенные черты поведения твердых тел при одноосной деформации были выяснены довольно давно. Интересно представить себе смещение акцентов, которое произошло бы в экспериментальной физике в прошедшие три столетия, если бы линейные задачи оказались математически сложными, а нелинейные — простыми.

Разнообразие в поведении при больших деформациях множества материалов, называемых твердыми телами (часто в неточном феноменологическом смысле), не поддается простому всеобъемлющему обобщению. Твердые тела деформируются по-разному. Одни из них, как резина или кетгут, испытывают конечные деформации при совпадающих либо очень друг к другу близких путях нагружения и разгрузки и пренебрежимо малых остаточных деформациях, обнаруживаемых по возвращении к начальному уровню нагрузки; другие, как, например, металлы или глины, неизменно приобретают остаточные изменения при конечных деформациях, регистрируемые после разгрузки, и имеют существенно разные зависимости напряжение — деформация при нагружении и разгрузке. Кристаллические тела при сравнительно небольших деформациях испытывают переход — иногда весьма резкий — от обратимого «чисто» упругого или вязкоупругого состояния к термодинамически сложному пластическому состоянию при критическом напряжении, называемом пределом текучести. В другом крайнем случае аморфные

тела могут непрерывно менять форму под нагрузкой практически любого уровня, если она действует достаточно долго.

При возникновении больших деформаций, в формулах для которых нельзя пренебречь произведениями двух компонентов и квадратами каждого из них, требуется большая осторожность в определениях как напряжений, так и деформаций. Определения эти, конечно, произвольны, но с экспериментальной точки зрения пристрастие и преднамеренность в их выборе оказывали сильное влияние на форму представления экспериментальных данных и невольно сказывались на их интерпретации и объяснении.

Главный интерес при изучении больших деформаций, начиная с середины XVII века, представляло определение, помимо весьма важного предела прочности, наибольшей деформации, при которой происходит разрушение. Кулон, как отмечено в разделе 3.4, экспериментально обнаружил предел упругости при кручении железных и медных проволок, проводя исследование области больших деформаций вплоть до разрушения. Его целью было найти значение деформации разгрузки как функции от остаточной деформации, а также выяснить изменения в значении динамического модуля сдвига при напряжениях, близких к нулевому значению в зависимости от

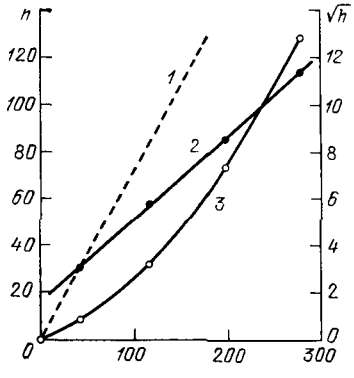



Рис. 4.1. Опыты Риччиоли (1739). Внедрение в масло деревянного стержня при ударе по нему деревянного шара. По оси абсцисс отложена глубина погружения стержня (в произвольных единицах); по оси ординат (левая ось) отложена высота падения шара $h$ (в дюймах) (правая ось — $\sqrt{h}$). *1* — предположение Мусшенбрука, *2* и *3* — кривые, построенные по экспериментальным точкам Риччиоли; светлые кружки относятся к левой оси ординат, черные кружки — к правой оси ординат.

предшествующей необратимой деформации. Его открытия асимптотически постоянного восстановления и убывания модуля сдвига с ростом остаточной деформации явились результатом первого серьезного изучения пластических деформаций металлов. Мусшенбрук (Musschenbrock [1739, 1]) в своем *Essai de Physique* (1739) описал очень ранний пример, касающийся проблемы динамической пластичности в экспериментах Риччиоли, который измерял глубину проникновения в сосуд с маслом вертикального штыря при ударе по нему деревянного шара, падающего с разных высот $h$. Мусшенбрук предположил, что либо Риччиоли недооценил свои собственные опыты, либо недостаточно вник в их результаты, когда заключил, что глубина проникания штыря линейно зависит от скорости,

т. е. пропорциональна $\sqrt{h}$. Утверждение Мушенбрука основано только на экстраполяции (штриховая линия на рис. 4.1) данных Риччиоли для наименьшей высоты падения, которой соответствовала глубина проникания в масло на 40 условных единиц. На рис. 4.1 я графически представил табулированные Риччиоли результаты (светлые кружки) и добавил график $\sqrt{h}$ в функции от глубины проникания (черные кружки). Графики свидетельствуют о том, что Риччиоли справедливо заключил, что глубина проникания зависит линейно от скорости, но соответствующий график в виде прямой линии не проходит через начало координат — факт, который я попытаюсь оценить ниже.

### 4.2.1800—1850 гг.: эксперименты Навье и Кориолиса по ползучести и обзор Понселе исследований, выполненных до 1840 г.

До 1840 г. описание поведения тел при больших деформациях являлось зачастую не более чем попутным комментарием исследователя, имевшего основной целью своих опытов — определение максимальной нагрузки и деформации при разрушении. Типичным примером этого являются комментарии Навье в его мемуаре 1826 г. о сопротивлении различных веществ разрыву при одноосном растяжении. Двадцать пять из двадцати семи описанных Навье опытов (Navier [1826, 1]) были испытаниями на растяжение полос железа, красной меди, свинца и стекла. Два других опыта проведены с пустотелыми сферами при внутреннем давлении. Навье, выразив недоверие к использованию в таких опытах машин из-за их «систематического искажения результатов», построил свои опыты, подобно Мариотту, на основе непосредственного приложения нагрузки. Благодаря надлежащим меткам на образцах он мог наблюдать изменения длины и ширины в ходе испытаний и в момент разрыва. В описании его результатов, имевших в общем-то небольшое значение, охарактеризованы начальная форма образцов, их вид при разрыве, разрушающая нагрузка и в нескольких случаях — данные наблюдений за промежуточным удлинением. Он отметил, что удлинение железа перед разрушением не было закономерным, изменяясь от 5 до 10% от опыта к опыту. Медь перед разрушением удлинялась примерно на 40%, а свинец — примерно на 10%, если образец не находился в условиях, в которых он мог медленно и непрерывно удлиняться при большой нагрузке, приводящей в конце концов к разрыву [1]).

---

[1]) Насколько я могу судить, это замечание Навье является первым указанием на ползучесть. Хотя его утверждение на 8 лет опередило специальные наблюдения и открытие Вика (Vicat [1834, 1]), вряд ли можно считать приоритет принадлежащим Навье, поскольку он не провел никаких измерений ползучести и не придал особого значения своему попутно сделанному замечанию.

Резкий контраст с этими простейшими опытами Навье представляют исследования свинцовых цилиндров при сжатии, выполненные в 1830 г. Кориолисом (Coriolis [1830, 1]). Кориолис испытывал свинцовые цилиндры диаметром 24 мм и высотой 19 мм. Шкала, использованная для измерения высоты в процессе деформации, делила первоначальные 19 мм высоты на 680 частей, так что каждая из них составляла 1/36 мм. Рычажный аппарат (не описанный им) позволял ему, по-видимому, проводить точные замеры изменения высоты. Свинцовые образцы помещались между двумя железными пластинками, замыкающими коробку. На ее крышке имелся стальной выступ, на который передавалось воздействие нагрузки, приложенной к колесу, с помощью рычага, соединенного с осью. Кориолис определил остаточную деформацию как функцию от значения приложенной нагрузки и продолжительности ее действия. В табл. 112 приведены измеренные деформации.

Материал был описан как «бедный» монетный свинец; при изготовлении отливок не принималось никаких мер по предотвращению окисления. Длительность приложения нагрузки всегда была неизменной и равной одной минуте. Опустив обсуждение Кориолисом его результатов, связанное с влиянием малых количеств кислорода на пластическое сопротивление свинца, которое он нашел существенным, я выбрал две его таблицы с данными, характеризующими временну́ю зависимость при значениях грузов, равных 1500 и 1950 кгс. Информация, помещенная в табл. 113, в которую я добавил условную деформацию, по-моему, может рассматриваться как первые данные по кратковременной ползучести при постоянной нагрузке.

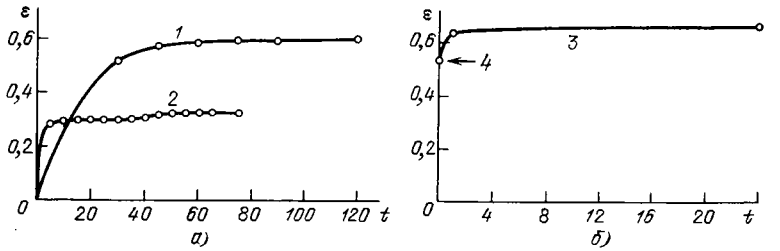



Рис. 4.2. Эксперименты Кориолиса (1830). Ползучесть свинца при постоянной нагрузке. Опыты проводились со свинцовыми цилиндрами высотой 19 мм и диаметром 24 мм; разрешающая способность приборов, при помощи которых определялась деформация, была равна 0,028. *а*) Опыты при нагрузке, равной 1950 кгс (линия *1*) и 1500 кгс (линия *2*); *б*) опыты при нагрузке, равной 1760 кгс (линия *3*); *4* — точка, соответствующая пребыванию образца под нагрузкой в течение 1 минуты, $t$ — продолжительность пребывания образца под нагрузкой в секундах, $\varepsilon$ — деформация.

Изменение во времени деформации в свинце, показанное графически на рис. 4.2, сам Кориолис приписал несовершенству экспериментов и отнес его просто к обстоятельствам, осложняющим те опыты, которые он хотел выполнить. Он отметил, что для его целей не представляли интереса продолжительности действия на-

Таблица 112

**Опыты Кориолиса (1830)**

| Нагрузка (кгс) | Толщина после раздавливания (единица — 1/36 мм) | | | | | | | | Среднее значение толщины после раздавливания | ε |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1500 | 464 | 471 | 462 | 459 | 462 | 463 | — | — | 463 | 0,32 |
| 1824 | 335 | 335 | 337 | — | — | — | — | — | 336 | 0,506 |
| 1950 | 341 | 336 | 337 | 339 | 331 | — | — | — | 337 | 0,496 |
| 3175 | 294 | 303 | 303 | 293 | 292 | 293 | 293 | 295 | 296 | 0,565 |

грузки, превышающие две минуты, и что опыты при более длительном воздействии нагрузки выполнены просто из любопытства чтобы узнать, будет ли деформация стабилизироваться за умеренный по длительности период времени. Воздействие в течение двадцати четырех часов нагрузки в 1760 кгс показало, что ползучесть продолжается более одного-двух часов, т. е. дольше, чем продолжительность предыдущих экспериментов.

Мы уже описали эксперименты Герстнера 1824 г. по удлинению при растяжении, которые проводились только до максимальной

Таблица 113

**Опыты Кориолиса (1830)**

| Уровень нагрузки (кгс) | Длительность действия нагрузки (с) | Толщина после раздавливания (единица — 1/36 мм) | ε | Уровень нагрузки (кгс) | Длительность действия нагрузки (с) | Толщина после раздавливания (единица — 1/36 мм) | ε |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1500 | 5 | 506 | 0,286 | 1950 | 30 | 365 | 0,518 |
| | 10 | 503 | 0,291 | | 45 | 331 | 0,574 |
| | 15 | 502 | 0,293 | | 60 | 322 | 0,589 |
| | 20 | 498 | 0,299 | | 75 | 321 | 0,590 |
| | 25 | 501 | 0,294 | | 90 | 319 | 0,594 |
| | 30 | 501 | 0,294 | | 120 | 313 | 0,604 |
| | 35 | 499 | 0,298 | | | | |
| | 40 | 497 | 0,301 | | | | |
| | 45 | 491 | 0,311 | | | | |
| | 50 | 487 | 0,317 | 1760 | 60 | 317 | 0,534 |
| | 55 | 483 | 0,324 | | 3600 (1 ч) | 245 | 0,640 |
| | 60 | 485 | 0,321 | | 24 ч | 223 | 0,663 |
| | 65 | 483 | 0,324 | | | | |
| | 75 | 483 | 0,324 | | | | |

деформации, равной 0,007, и огибающая для которых (см. рис. 2.5) послужила источником для формулирования закона Герстнера (Gerstner [1832, 1]), $\sigma = A\varepsilon - \beta\varepsilon^2$, в этой области сравнительно небольших деформаций. В 1823 г. Джон Лесли (Leslie [1823, 1]) провел серию экспериментов по растяжению стержней из английского железа с площадью поперечного сечения, равной одному квадратному дюйму, и наблюдал, что «идеальная» упругость, при которой напряжение пропорционально деформации, имеет место при нагрузках, равных половине мгновенной разрушающей нагрузки. Он полагал, что за этим пределом удлинение возрастало бы согласно геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, при увеличении нагрузки — согласно арифметической прогрессии 4/8, 5/8, 6/8, 7/8, 8/8 (нагрузка выражена в долях предельного значения при мгновенном разрыве). Область деформаций, которую он рассматривал, была в пределах от 0,001 до 0,016. Лесли утверждал, что экспериментальные данные описывает следующая формула:

$$y = \frac{p\,(1/2 + 1/8 \lg 1000\varepsilon)}{\lg 2}, \qquad \frac{p}{2} \leqslant y \leqslant p, \tag{4.1}$$

где $y$ — нагрузка; $p$ — разрушающее усилие; $\varepsilon$ — деформация.

Предложенное Лесли соотношение для конечных деформаций заинтересовало ряд исследователей в следующие два десятилетия. Понселе (Poncelet [1841, 1]), подобно тому как он это сделал для упругих постоянных, дал в 1841 г. резюме по ранним экспериментальным результатам, относящимся к большим деформациям. В своем резюме он привел следующее представление равенства Лесли для частного случая, отвечающего стержню с площадью сечения, равной 1 мм², при максимальном в нем усилии, составляющем 50,5 кгс,

$$y = 88{,}16 + 20{,}97 \lg \varepsilon \tag{4.2}$$

(здесь числа выражают собой количества килограммов).

Хотя Понселе отметил, что формула Лесли не описывает данных других исследователей, таких, как Сэгюэн (Seguin), Борне (Bornet) и Ардан (Ardant), результаты некоторых измерений, проведенных на длинных железных стержнях не указанного им исследователя из Санкт-Петербурга, действительно следовали эмпирическому соотношению Лесли, но линейность прекращалась при нагрузках, составлявших скорее 2/5 чем 1/2, от разрывающего усилия. Соотношение (4.2) составило эмпирическую основу при представлении Понселе этих неконкретизированных данных. Понселе отметил тот факт, что после первоначально весьма незначительной деформации, имеющей место до предела упругости, происходит быстрый рост удлинения, за которым следует его замедление перед разрушением. Мягкие проволоки требовали длительных промежутков времени для достижения равновесия, которое устанавливалось только после большого числа колебаний, т. е. поведения, обнару-

живающего эффект Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье). Он указал в качестве примера на то, что в свинце удлинение, отвечающее напряжению, меньшему чем 0,1 кгс/мм², не устанавливалось в течение по меньшей мере 72 ч.

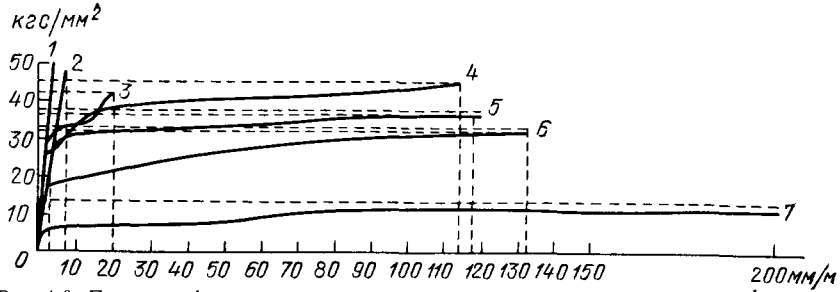



Рис. 4.3. Первое графическое представление численных данных по конечным деформациям металлов, приведенное Понселе [Poncelet (1841)] по результатам опытов Сэгюэна [Séguin (1826)], Борне [Bornet (1834)] и Ардана [Ardant (1835)]. По оси абсцисс отложено удлинение в мм на метр начальной длины, по оси ординат — напряжение в кгс/мм². *1* — твердая неотожженная стальная проволока, *2* — твердая неотожженная проволока из бронзы, *3* — мягкая или отожженная стальная проволока, *4* — то же, *5* — хорошо отожженная стальная проволока диаметром 1,06 мм, длиной 1,5 м (Сэгюэн), *6* — гибкий стальной трос (Борне), *7* — свинцовая проволока.

Несомненно то, что наиболее интересные опыты по большим деформациям металлов в первой половине XIX века были выполнены Арданом (Ardant (1835), см. Poncelet [1841, 1]), который в 1835 г. представил Понселе свои результаты по деформациям при растяжении ряда металлов для опубликования во втором издании (1841) его классического труда «*Mécanique Industrielle*». Как отмечено в разделе 3.10, Понселе решил привести эти данные, так же как и данные Сэгюэна (1826), в форме специфических диаграмм напряжение — деформация — первых подобных графиков в экспериментальной механике твердого тела. На рис. 3.21 показаны начальные участки девяти диаграмм напряжение — деформация; на рис. 4.3 приведены части, соответствующие большим деформациям, для железных, бронзовых, стальных и свинцовых проволок.

Отметив, что формула Лесли неприменима к этим данным и не соответствует наблюдаемым различиям в пределах упругости очень прочных и очень мягких проволок, Понселе остановился на характерной закономерности, выполнявшейся при больших деформациях в экспериментах с прочными бронзовыми проволоками, которая была выражена следующим эмпирическим соотношением:

$$\varepsilon = 0{,}1125y + 0{,}00039y\,(1{,}6)^{y/5}, \qquad (4.3)$$

где $y$ — нагрузка, $\varepsilon$ — деформация. Он далее отметил, что хотя вследствие отжига происходили изменения в абсолютном значении предела упругости, он всегда оказывался вблизи 1/3 разрушающей нагрузки, которая сама изменялась в зависимости от предшествовавшей термической обработки.

Лагерхельм (Lagerhjelm [1829, 1]) в 1829 г. предложил зависимость для определения предела упругости. Если обозначить символом $\varepsilon_Y$ деформацию, соответствующую пределу упругости для железных призм, а через $\varepsilon_R$ максимальную деформацию при удлинении в момент разрыва, то, согласно Лагерхельму, эти две величины связаны зависимостью

$$\varepsilon_Y \sqrt{\varepsilon_R} = 0{,}000381. \tag{4.4}$$

Понселе отметил, что данные Ардана не подкрепляют ни одно из таких эмпирических соотношений между деформациями, соответствующими пределу упругости, и максимальными деформациями при растяжении до разрыва. Напротив, сравнение поведения твердых и легко деформируемых в холодном состоянии металлов могло привести к явному парадоксу, связанному с поведением, противоположным тому, которое предполагалось Лагерхельмом. Это было очевидно из рассмотрения Понселе энергии деформирования $T'$ для железа и бронзы при разных предшествовавших термических обработках и для свинца. Соответствующие данные, приведенные в табл. 114, представляют площади под кривыми напряжение — деформация, измеренные до ординаты, соответствующей пределу упругости (третий столбец) и при разрушении (шестой столбец). Насколько мне известно, это — первые данные по экспериментальному определению энергии деформаций в пластической области.

Поскольку Понселе был первым, кто представил количественную зависимость напряжение — деформация в графической форме, неслучайно, что именно он первым произвел определение значений энергии деформаций. Понселе далее использовал этот интересный новый аспект пластической деформации металлов, определив величины, называемые им коэффициентами $T'_e$ и $T_r$, отвечающие работе, затраченной на деформацию образца соответственно до напряжения, равного пределу упругости, и до разрушения применительно к результатам обширных опытов Тредгольда с литыми железом, бронзой, цинком и оловом и с холоднотянутым и литым свинцом. Коэффициенты, отвечающие опытам Тредгольда, были сопоставлены с данными, полученными на основании опытов Ардана (табл. 115).

Понселе установил, что различия в полученных значениях оставляют желать лучшего в смысле надежности и точности. В отношении его комментария следует, однако, заметить, что в фактических данных Тредгольда имелись отклонения, которые были сглажены Понселе с целью добиться сопоставимости данных в приведенной выше таблице.

В 40-х гг. XIX века к конечным деформациям металлов был привлечен интерес Вертгейма, во-первых, к измерению обычного предела прочности для многих элементов и изучавшихся металлических сплавов и, во-вторых, к определению первых наблюдаемых остаточных деформаций при измерении $\varepsilon$ с точностью до $10^{-5}$. В пер-

Таблица 114

**Результаты, приведенные Понселе (1841)**

| | Удлинение на метр, соответствующее пределу упругости (мм) | Соответствующее напряжение (кгс/мм²) | $T'$ на метр длины и мм² поперечного сечения (кгс) | Максимальное удлинение на метр перед разрушением (мм) | Разрушающее напряжение (кгс/мм²) | $T'$ на метр длины и мм² поперечного сечения при разрушении (кгс) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Толстый стержень из пластичного железа (Борне) | 0,55 | 12,0 | 0,00330 | 132,50 | 33,00 | 4,4970 |
| Хорошо отожженная железная проволока (Сэгюэн) | — | — | — | 120,00 | 37,84 | 3,9300 |
| Железная проволока, недостаточно отожженная (Ардан) | 0,88 | 15,0 | 0,00662 | 20,50 | 42,50 | 0,6500 |
| Железная проволока, прочная, неотожженная (Ардан) | 0,78 | 15,0 | 0,00585 | 3,10 | 49,00 | 0,0810 |
| Стальная проволока в состоянии поставки (Ардан) | 1,25 | 25,0 | 0,01560 | 3,15 | 57,50 | 0,0783 |
| То же; отпущенная, слабо отожженная (до синего каления) | 1,20 | 25,0 | 0,01500 | 2,52 | 52,50 | 0,0580 |
| То же; отожженная, неотпущенная и гибкая | 1,20 | 25,0 | 0,01500 | 2,40 | 57,50 | 0,0688 |
| То же; сильно отпущенная | — | — | — | 1,87 | 15,57 | 0,0125 |
| Бронзовая проволока, полностью отожженная | 1,35 | 15,0 | 0,01250 | 115,00 | 45,00 | 4,5140 |
| Бронзовая проволока, прочная неотожженная | 1,70 | 15,0 | 0,01275 | 7,19 | 49,00 | 0,2005 |
| Свинцовая проволока, холоднотянутая | 0,41 | 0,3 | 0,00012 | 324,60 | 1,36 | 0,3500 |

вом направлении его усилия упорядочить различные экспериментальные результаты привели к заключению о сомнительности научного значения этих данных. Что касается второго аспекта, то, как я отметил в разделе 3.12, он сомневался в том, что вообще существует предел упругости.

Для больших деформаций тканей человека Вертгейм, как было показано в разделе 2.14, выполнил большую экспериментальную программу, которая всегда приводила к нелинейным графикам функций напряжение — деформация при растяжении с изменяющимся направлением кривизны. Ни Вертгейм, ни его современники

Таблица 115

**Результаты Тредгольда и Ардана, приведенные Понселе (1841)**

| Металл, испытанный на растяжение | Удлинение, соответствующее пределу упругости (м/м) | Соответствующее напряжение (кгс/мм²) | Коэффициент $T'_e$ динамического упругого сопротивления на мм² и метр длины (кгс/м) | Коэффициент $T_r$ динамического сопротивления разрушению на мм² и метр длины (кгс/м) | $E$ (кгс/мм²) |
|---|---|---|---|---|---|
| Железные проволоки или стержни мягкие или отожженные | 0,00054 | 10,8 | 0,003000 | 4,00000 | 20 000 |
| Прочные или неотожженные | 0,00090 | 18,0 | 0,008000 | 0,08000 | 20 000 |
| Обычная отпущенная или отожженная сталь | 0,00120 | 25,0 | 0,015000 | 0,07000 | 21 000 |
| Литая английская сталь высшего качества | 0,002200 | 66,0 | 0,07260 | 0,16000 | 30 000 |
| Сильно отпущенная, очень хрупкая сталь (Ардан) | — | — | — | 0,01250 | 11 000 |
| Чугун (Тредгольд) | 0,00080 | 10,0 | 0,004000 | — | 12 000 |
| Отожженная бронзовая проволока (Ардан) | 0,00135 | 15,0 | 0,01250 | 4,50000 | 10 000 |
| Прочная неотожженная бронзовая проволока (Ардан) | 0,00170 | 15,0 | 0,012750 | 0,20005 | — |
| Литая бронза (Тредгольд) | 0,00075 | 4,8 | 0,001800 | — | 6 450 |
| Литая пушечная бронза (Тредгольд) | 0,00104 | 7,3 | 0,003800 | — | 7 000 |
| Литой цинк (Тредгольд) | 0,00024 | 2,3 | 0,000280 | — | 9 600 |
| Литое английское олово (Тредгольд) | 0,00063 | 2,0 | 0,000320 | — | 3 200 |
| Холоднотянутая свинцовая проволока диаметром 4 мм (Ардан) | 0,00067 | 0,4 | 0,000134 | 0,35000 | 600 |
| Проволока из технического свинца низкой чистоты литая и холоднотянутая диаметром 6 мм (Ардан) | 0,00050 | 0,4 | 0,000100 | — | 800 |
| Обычный литой свинец (Тредгольд) | 0,00210 | 1,0 | 0,001050 | — | 500 |

или непосредственные преемники не обнаружили подобной эмпирической простоты для конечных деформаций кристаллических твердых тел; серьезные исследования этой темы возобновились через два десятилетия.

## 4.3. Опыты Треска по течению твердых тел (1864—1872)

Полное отсутствие системы в экспериментальных результатах для больших пластических деформаций обескураживало как экспериментаторов, так и теоретиков. Однако, в 1864 г. некоторый порядок был наведен благодаря удивительно оригинальной работе одного лишь человека, Анри Эдуарда Треска (Tresca [1864, 1]). В предыдущем, 1863, году Треска начал дело, которому в последующие восемь лет предстояло воплотиться в необычайно большом числе экспериментов по пластическому деформированию множества твердых тел,— от свинца и меди до льда, парафина и керамической пасты. Он продемонстрировал, что существуют измеримые и воспроизводимые коэффициенты течения, которые могли создать основу для теории больших пластических деформаций в твердых телах. Бóльшую часть опытов он выполнил со свинцом. Был проведен ряд экспериментов различного типа, результаты которых он сравнил, чтобы узнать, существуют ли закономерности для коэффициентов течения. Он выбивал из листов цилиндрические элементы при помощи закаленного стального стержня (пуансона) меньшего диаметра; он выдавливал цилиндрические образцы через круглые, треугольные и прямоугольные сквозные отверстия и тупиковые углубления; он сжимал круглые цилиндрические образцы, помещенные между закаленными плитами; он исследовал обратную экструзию сплошных цилиндров различной толщины при наличии и отсутствии бокового стеснения и т. п. Для того чтобы наблюдать течение, он создал образцы в виде пакета отдельных пластин.

Измерения состояли в фиксации приложенного давления и соответствующих изменений в форме и положении отдельных пластин. Поперечные разрезы пакета, выполненные в конце каждого из опытов, позволяли ему детально описать, где каждое сечение тела текло в процессе эксперимента данного типа. Для более мягких материалов, таких, как глина, парафин и другие, он использовал слоистые маркеры различных цветов, чтобы проследить путь течения. Учитывая свое наблюдение за количественным влиянием на сопротивление некоторых металлов введения пластинчатой структуры, он выполнил отдельные опыты на сплошных образцах с теми же геометрическими очертаниями.

Огромная масса данных, описанных словесно и представленных графически, делает детальное изучение работы Треска серьезным предприятием. Только Баушингер, один из всех экспериментаторов, превзошел Треска по количеству данных, которые ему удалось опубликовать. Работы Баушингера в 80-х гг. XIX века, хотя и отличались во многих отношениях, тесно связаны с работами Треска. Фактически исследования этих двух ученых, проведенные около ста лет назад, все еще представляли основную экспериментальную базу теорий пластичности вплоть до 1950 г., но определенно ни Треска, ни Баушингер не признали бы приемлемыми ограничи-

тельные исходные предпосылки этих теорий: Треска — из-за пренебрежения областью пластического упрочения перед установлением постоянного напряжения течения, а Баушингер — из-за переупрощения вида поверхности текучести.

Главные исследования Треска начал в 1863 г. Из-за отсрочек в публикации и неоднократного представления одних и тех же работ принято делить его мемуары на три группы — Мемуар о течении I, Мемуар о течении II и Мемуар о пробивке. Мемуар о течении I был сначала представлен в виде авторского резюме в 1864 г. (Tresca [1864, 1]). Сам же мемуар был опубликован в 1868 г. (Tresca [1868, 1]). Сообщение в 1864 г. содержало лишь один чертеж для описания 40 экспериментов, проведенных на свинце, 14 — на других металлах и 40 — на керамических глинах, помимо некоторых порошкообразных и гранулированных материалов. Сен-Венан (Saint-Venant [1870, 1]) писал о чрезмерной краткости опубликованных материалов, жалуясь, что при тщательном изучении мемуара Треска ему очень мешало отсутствие рабочих чертежей. Он информировал Треска о том, что Французская Академия обычно облегчает изготовление таких чертежей. В ответ на это указание Треска изготовил огромное число прекрасных чертежей, которые были опубликованы в графическом дополнении в 1872 г. (Tresca [1872, 1]); это дополнение содержало также чертежи, относящиеся к исследованиям по пробивке.

В 1867 г. издатели Comptes Rendus описали награждение Треска в понедельник 11 марта премией по механике фонда Монти (Montyon) за 1866 г. (Comptes Rendus [1867, 3]). В знак признания важности исследования Треска 1864 г. награда была для данного случая увеличена до тысячи франков [1]).

Мемуар II о течении, который впервые появился в 1867 г. (Tresca [1867, 1]) в форме авторского резюме, не только отразил распространение выполненных ранее исследований на новые типы экспериментов, но также содержал описание того, как Треска повысил точность своего исследования. Полностью мемуар (Tresca [1872, 1]), представляющий большую статью, опубликован в 1872 г.

Третья подборка материалов о пробивании первоначально дана в авторском представлении в 1869 г. (Tresca [1869, 1]). За ней

---

[1]) То, что это было необычайно быстрое признание Треска, видно из того факта, что в переводе 1865 г. резюме по экспериментам Треска, в которых излагалось исследование течения льда через цилиндрические отверстия в *Philosophical Magazine*, его фамилия была напечатана как «Fresca», то же искажение допущено в различных местах в тексте (Tresca [1865, 1]). Правильная фамилия появилась только в авторском указателе тома. (Перевод был взят из июльского номера журнала Силлимена (Silliman) (*American Journal*, July, 1865). Давление, необходимое для течения льда, давалось значением 126 кгс/см$^2$ в сравнении со значением 630 кгс/см$^2$ для свинца. Переводчик пропустил основное положение Треска, настаивая на том, что, очевидно, такое число зависит от отношения размеров отверстия; кроме того, он допустил неточность, приводя численные значения, полученные Треска.

в 1872 г. последовал полный мемуар (Tresca [1872, 2]) на 121 страницах. К этим двум публикациям следует добавить интересный доклад академической комиссии за 1870 г., в котором Комбе, Сен-Венан и Морэн как «докладчики» провели детальное изучение этой части исследований Треска (Tresca [1870, 1]). Следуя предложению Сен-Венана (Saint-Venant [1870, 2]), Треска выполнил дополнительные серии опытов, предназначенные для получения бóльшей информации о кинематике внутри текущего тела. Эти данные описаны в дополнении к Мемуару о пробивании в 1872 г. (Tresca [1872, 3]).

Основными открытиями Треска за семь лет интенсивного труда явились следующие выводы: 1) твердые тела при достаточных уровнях давления могут течь подобно жидкостям; 2) существует промежуточная область пластического упрочнения, имеющая место за пределом упругости и до того, как начинается постоянное течение; 3) существует характеристика материала (коэффициент $K$), выражающая максимальное касательное напряжение, при котором — независимо от типа опыта — твердое тело течет; 4) при пробивке цилиндрическим пуансоном цилиндрического блока длина выбиваемой части стержня $L$ связана с радиусом штампа $R_1$ и радиусом образца $R$ зависимостью

$$L = R_1 (1 + \lg (R/R_1));$$

5) пластическое течение твердых тел происходит без изменения объема (является изохорическим).

Несмотря на то, что Сен-Венан (Saint-Venant [1870, 2]) сразу признал и восторженно описал как выдающееся достижение третье из этих открытий, продемонстрировавшее важность критерия предельного касательного напряжения при построении теории пластичности, которую Сен-Венану удалось развить, сам Треска, по-видимому, считал своим наибольшим достижением формулу для длины выбиваемой части стержня. Спустя годы, в 1883 г., исследуя механические свойства тела в форме шестигранной гайки высотой 45 мм, присланной ему с выставки в Филадельфии (Tresca [1883, 1]), он с успехом применил свою формулу для длины $L$ к новому виду поперечного сечения. Он рассматривал ее успешное применение как доказательство правильности формулы и далее отметил, что он считает открытие этого геометрического соотношения наиболее существенным из всех его наблюдений за течением твердых тел [1].

---

[1]) Век спустя можно согласиться с Треска относительно важности чисто геометрического соотношения для течения различных тел ввиду многочисленности вводившихся позднее физических ограничений на «условие Треска» в современной пластичности, не подлежит сомнению, что его открытие чисто геометрического свойства течения, независимого от характера материала, было более важным.

### 4.4. Эксперименты Треска *по пробивке и экструзии*

Данное выше деление статей относится скорее к названиям мемуаров, чем к последовательности, в которой Треска проводил свои опыты. Опыт 22 апреля 1864 г. в первой серии работ о течении описывал пробивку прямоугольного блока, состоявшего из 16 квадратных листов свинца, каждый толщиной 0,004 м и со стороной, равной 0,120 м. Пакет был слегка зажат между двумя стальными пластинами, имевшими концентрические отверстия диаметром 0,02м. Гидравлический пресс вдавливал цилиндрический стальной пуансон в свинец, создавая течение образцов, показанное на рис. 4.4, где изображено сечение слоев плоскостью, проходящей через ось пробиваемого отверстия.

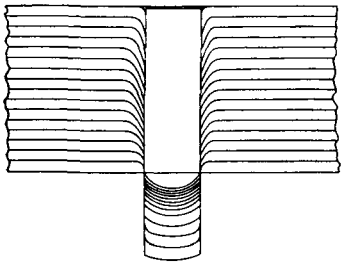


Рис. 4.4. Опыты Треска (1864). Пробивание отверстия в блоке свинцовых пластин цилиндрическим стальным пуансоном.

Описывая этот ранний эксперимент, Треска выразил большое удивление в связи с тем, что из выбитой части исчезла столь значительная доля металла, который первоначально занимал область отверстия. Проведя проверку, он обнаружил, что плотность свинца не изменилась, т. е. он получил первое свидетельство того, что пластическая деформация происходит без изменения объема, изохорически [1]). Он считал, что источник отмеченного выше расхождения в значениях объемов, представлявший собой поперечное течение материала в глубь блока,— в направлении наименьшего сопротивления,— может помочь проникнуть в законы течения жидкостей. Распределение толщин слоев в выбитом блоке, в котором наиболее удаленные от среднего слои испытали наименьшее изменение толщины, он сравнил с одинаковыми толщинами пластин пакета до пробивки [1]. Измеренные толщины приведены в табл. 116.

3 июня 1864 г. Треска сжал блок из 20 цилиндрических свинцовых пластин от первоначальной общей толщины, равной 0,063 м, до конечной общей толщины 0,018 м, как показано на рис. 4.5.

Сжатие увеличило диаметр среднего листа от 0,060 до 0,110 м, а крайних — до 0,103 и 0,105 м. Этот эксперимент, по мнению Треска, подтвердил его положение, которое он до того считал преждевременным высказывать, а именно, что можно говорить о течении твердых тел.

24 августа 1864 г. в третьем типе предварительных опытов он поместил две свинцовые пластины на стальную пластину, имею-

[1]) Изменение объема при пластической деформации впервые наблюдал Баушингер в 1879 г. (см. выше раздел 2.18). То же изменение, которое я описал исходя из современных опытов (см. раздел 4.35), не наблюдается при измерениях, производимых после деформаций, которые выполнял Треска.

Таблица 116

**Треска (1864)**

| Номера пластин в пакете | Расстояние линии контакта слоев от поверхности крайнего слоя в вырубленном блоке (мм) | Толщина пластин, измеренная по оси вырубленного блока (мм) | Номера пластин в пакете | Расстояние линии контакта слоев от поверхности крайнего слоя в вырубленном блоке (мм) | Толщина пластин, измеренная по оси вырубленного блока (мм) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4,6 | 4,6 | 9 | 23,4 | 0,7 |
| 2 | 9,0 | 4,4 | 10 | 23,9 | 0,5 |
| 3 | 13,0 | 4,0 | 11 | 24,2 | 0,3 |
| 4 | 16,2 | 3,2 | 12 | 24,6 | 0,4 |
| 5 | 19,0 | 2,8 | 13 | 24,8 | 0,2 |
| 6 | 20,8 | 1,8 | 14 | 25,3 | 0,5 |
| 7 | 22,0 | 1,2 | 15 | 26,9 | 1,6 |
| 8 | 22,7 | 0,7 | 16 | 31,3 | 4,4 |

щую центральное круглое отверстие диаметром 0,020 м. Эти листы были сжаты круглой цилиндрической стальной плитой с диаметром 0,05 м с острым ребром, что привело пластины к тюльпанообразной форме, показанной на рис. 4.6.

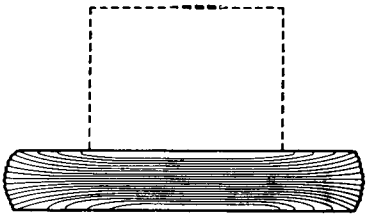


Рис. 4.5. Опыты Треска (1864). Сжатие блока из 20 свинцовых пластин.

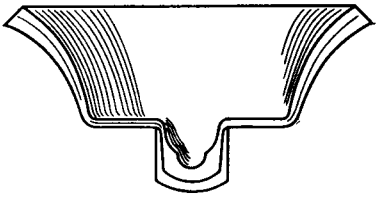


Рис. 4.6. Опыты Треска (1864). Сжатие двухслойной свинцовой пластины на стальной плите с центральным отверстием.

Два наиболее интересных исследования в больших сериях опытов состояли: первое — в экструзии через отверстие в матрице; в этих опытах число пластин и значение диаметра отверстий варьировались, а второе — в пробивке, при наличии или отсутствии стеснения цилиндрических сплошных блоков и пакетов при разном числе пластин. Штамп для первой серии опытов показан на рис. 4.7, взятом из дополнительной работы 1872 г. (Tresca [1872, 1]), содержащей чертежи к мемуару I 1868 г.

На рис. 4.8 показано диаметральное сечение десяти свинцовых пластин после экструзии их через отверстие в матрице диаметром

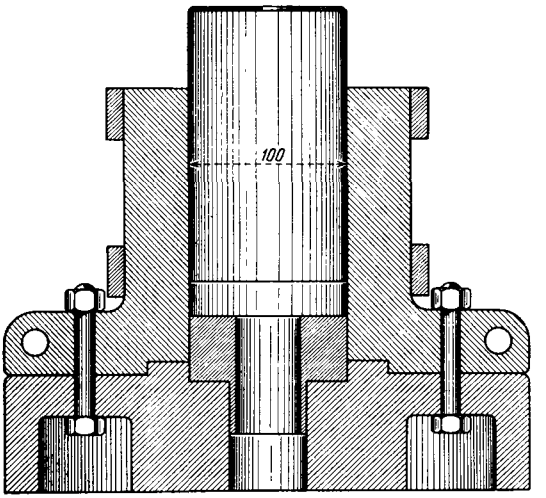



Рис. 4.7. Опыты Треска (1864). Чертеж устройства, использованного Треска в экспериментах по изучению течения, опубликованный им в 1872 г.

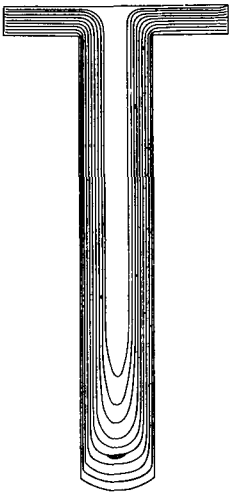


Рис. 4.8. Опыты Треска (1868). Диаметральное сечение набора из десяти свинцовых пластин после экструзии с использованием устройства, показанного на рис. 4.7.

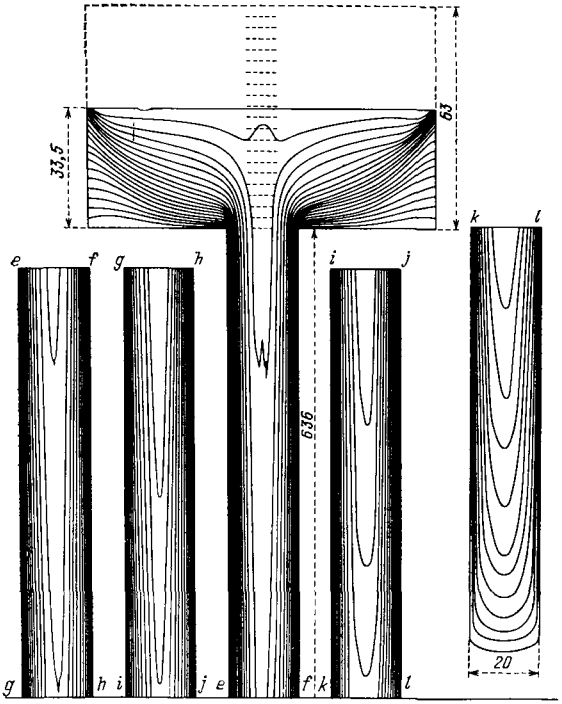



Рис. 4.9. Опыты Треска (публикация 1872 г.). Диаметральное сечение пакета из 20 свинцовых пластин после экструзии с использованием устройства, показанного на рис. 4.7.

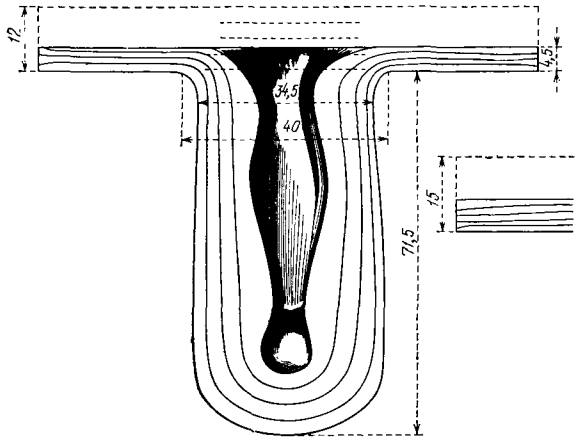



Рис. 4.10. Опыты Треска (1868). Диаметральное сечение пакета из четырех свинцовых пластин после экструзии с помощью устройства, показанного на рис. 4.7. Следует обратить внимание на центральную полость.

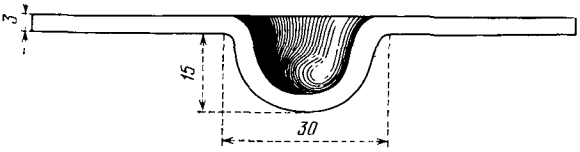



Рис. 4.11. Опыты Треска (1872). Экструзия одной свинцовой пластины.

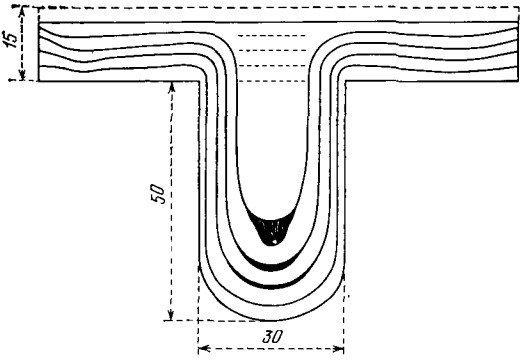



Рис. 4.12. Опыты Треска (1868). Экструзия пяти свинцовых пластин. При этом диаметре отверстия в матрице наблюдается разделение пластин.

0,020 м[1]). Его можно сравнить с рис. 4.9, соответствующим опыту при том же диаметре отверстия, проводившемуся с 20 пластинами.

При возрастании диаметра отверстия центральная часть становилась пустотелой, что, по мнению Треска, было аналогом вихреобразования (образования воронок) при течении жидкостей. При-

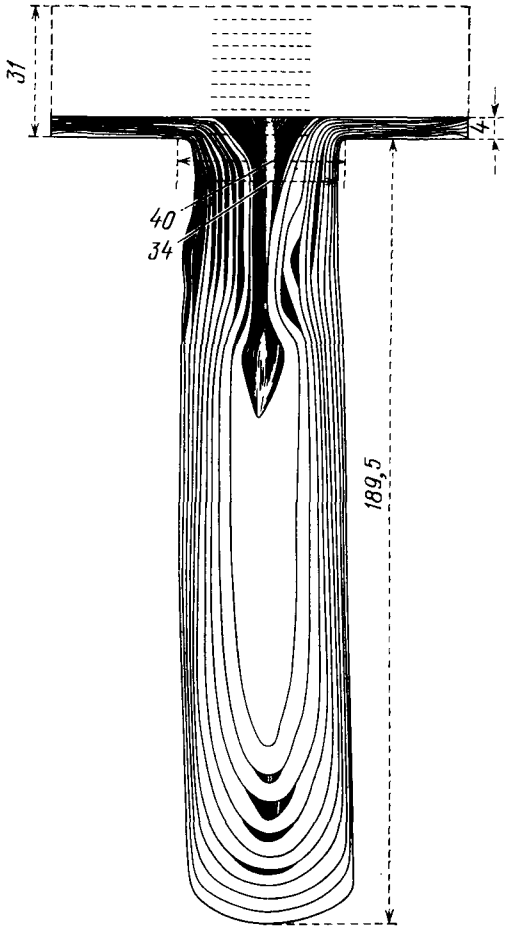



Рис. 4.13. Опыты Треска (1872). Диаметральное сечение экструзированного слоистого образца из 10 пластин. Следует обратить внимание на разделение слоев и выпучивание их при данном диаметре отверстия в матрице. Материал образца — свинец.

мером служит экструзия четырех свинцовых пластин через отверстие диаметром 0,040 м, изображенная на рис. 4.10.

Этот эффект стал особенно очевиден при экструзии одной пластины, что можно видеть на примере выдавливания через отверстие

[1]) Это тот единственный рисунок, на который ссылался Сен-Венан. Окончательный мемуар в 1868 г. содержал шесть дополнительных рисуиков, включавших три приведенных выше.

диаметром 0,030 м (рис. 4.11). Еще одним аспектом экструзии слоистого пакета было отделение одной пластины от другой в составе пакета из пяти пластин при диаметре отверстия 0,030 м (рис. 4.12) или пакета из десяти пластин при диаметре отверстия,

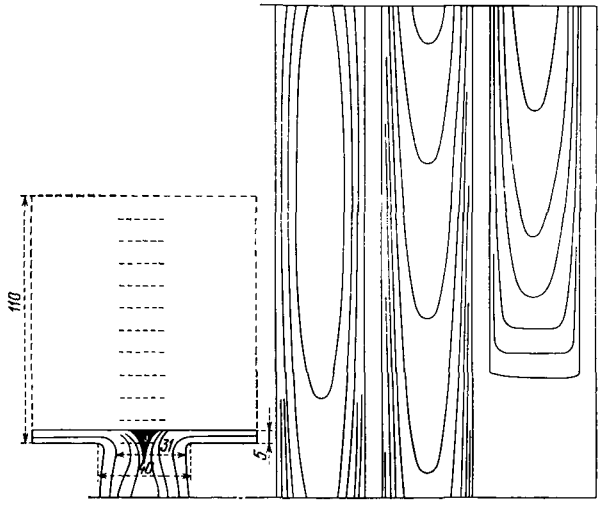



Рис. 4.14. Опыты Треска (1872). Диаметральное сечение после экструзии образца из кирпичной глины в виде пакета из 11 пластин.

равном 0,040 м (рис. 4.13). Рисунки демонстрируют разделение, выпучивание и наличие центральной полости.

Последний пример опыта на экструзию из громадного их числа, приведенных Треска, дается на рис. 4.14, на котором изображен

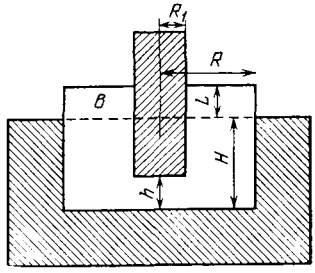



Рис. 4.15. Опыты Треска (1872). Еще один тип эксперимента по экструзии.

опыт с одиннадцатью пластинами из кирпичной глины, продавленными через отверстие диаметром 0,040 м, течение которых было сопоставлено с течением свинца, серебра, цинка, фарфоровой глины, керамической глины, каолина и парафина.

Треска изучал влияние цилиндрических стенок матрицы, удаляя их и наблюдая экструзию типа показанной на рис. 4.15. Он

варьировал радиусы пуансона и полости в матрице вплоть до получения тонких колец выдавленного материала.

Я полностью согласен с членами комиссии Французской Академии 1870 г. Комбе, Сен-Венаном и Морэном, что, «не утомляя бесцельно внимания Академии», невозможно представить в сжатой форме детальное описание громадного числа опытов и оригинальных рисунков, которые были выполнены в том же масштабе, что и испытывавшиеся образцы. Главное различие между ранним мемуаром и двумя основными мемуарами, последовавшими за ним, состоит в повышении точности измерений и в представлении детального, экспериментально обоснованного, обобщенного анализа поведения материала в процессе течения, что обеспечивалось большей тщательностью опытов.

Выражая кредо истинного экспериментатора, подобно Гуку, Кулону и Вертгейму до него, Треска утверждал во введении к своему первому мемуару о течении (Tresca [1868, 1], стр. 733—734):

«Эта работа выполнялась не как результат предвзятых идей и не как их итог, которого мы предполагали достичь. Она представлялась там только как следствие разнообразных экспериментов, выполнявшихся сначала в осложненных ситуациях, от которых мы старались перейти ко все более и более простым условиям, позволяющим легко изучать законы исследуемого явления».

Главное теоретическое обсуждение, показавшее, что Треска действительно достиг такого итога при стремлении к цели опытов, дано в мемуаре (Tresca [1869, 1]) по пробивке, полностью вышедшем в 1872 г. (Tresca [1872, 2]). Обширный анализ, посвященный обсуждению геометрических особенностей каждого типа экспериментов по течению, выполнен в терминах константы материала — фиксированного коэффициента $K$, определяемого как предельное значение максимального касательного напряжения.

То, что Треска достиг своей цели, было в дальнейшем продемонстрировано его открытием возможности полного описания в геометрических терминах последовательных состояний течения. Так, при пробивке пуансоном с радиусом $R_1$ цилиндрического блока с радиусом $R$ длина $L$ выбиваемого стержня дается формулой

$$L = R_1 \left(1 + \lg \frac{R}{R_1}\right) \tag{4.5}$$

независимо от первоначальной высоты блока [1]).

В дополнении к мемуару о пробивке в 1870 г. Треска описал новую серию опытов, выполненных по предложению Сен-Венана для того, чтобы выявить соответствие между результатами, получаемыми на основании формулы и эксперимента с модельным воском, фаянсовой глиной, фарфоровой глиной, кирпичной глиной, свинцом, оловом, медью и железом. Полученные в этих тщательных опы-

[1]) Блок должен быть, конечно, достаточно высоким, чтобы не происходил просто срез.

тах значения $L/R_1$ были сопоставлены с рассчитанными значениями для 41 случая и приведены в табл 117.

Отношение значений, наблюдавшихся в эксперименте и расчетных, данное в последнем столбце таблицы, определенно оправдывает

Таблица 117

**Треска (1872)**

| № опыта | Высота блока $H$ | Радиус блока $R$ | Радиус пуансона $R_1$ | Отношение $R/R_1$ | Длина выбиваемого стержня | Экспериментальное значение $L/R_1$ | Расчетное значение $L/R_1$ | Отношение значений в столбцах 6 и 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | | | | Модельный воск | | | | |
| 1 | 0,051 | 0,0255 | 0,005 | 5,1 | 0,012 | 2,2 | 2,629 | 0,913 |
| 2 | 0,049 | 0,0300 | 0,010 | 3,0 | 0,023 | 2,3 | 2,098 | 1,097 |
| 3 | 0,070 | 0,0505 | 0,020 | 2,525 | 0,0345 | 1,725 | 1,926 | 0,895 |
| 4 | 0,050 | 0,025 | 0,010 | 2,5 | 0,01525 | 1,525 | 1,916 | 0,795 |
| | | | | | | | Среднее | 0,925 |
| | | | | Керамические глины: фарфоровая глина | | | | |
| 5 | 0,049 | 0,029 | 0,010 | 2,9 | 0,023 | 2,3 | 2,064 | 1,114 |
| 6 | 0,061 | 0,0505 | 0,020 | 2,525 | 0,045 | 2,25 | 1,926 | 1,168 |
| | | | | | | | Среднее | 1,141 |
| | | | | Фаянсовая глина | | | | |
| 7 | 0,070 | 0,0505 | 0,010 | 5,05 | 0,029 | 2,9 | 2,619 | 1,107 |
| 8 | 0,048 | 0,028 | 0,010 | 2,8 | 0,024 | 2,4 | 2,029 | 1,052 |
| 9 | 0,072 | 0,0505 | 0,020 | 2,525 | 0,041 | 2,05 | 1,926 | 1,064 |
| 10 | 0,065 | 0,040 | 0,020 | 2,0 | 0,042 | 2,10 | 1,693 | 1,240 |
| | | | | | | | Среднее | 1,116 |
| | | | | Кирпичная глина | | | | |
| 11 | 0,070 | 0,0505 | 0,015 | 3,367 | 0,035 | 2,333 | 2,213 | 1,054 |
| 12 | 0,070 | 0,050 | 0,015 | 3,333 | 0,032 | 2,204 | 2,204 | 0,968 |
| 13 | 0,051 | 0,026 | 0,010 | 2,6 | 0,0205 | 1,955 | 1,955 | 1,048 |
| 14 | 0,072 | 0,0505 | 0,020 | 2,525 | 0,0405 | 1,926 | 1,926 | 1,052 |
| 15 | 0,050 | 0,025 | 0,010 | 2,5 | 0,0235 | 1,916 | 1,916 | 1,226 |
| 16 | 0,052 | 0,025 | 0,010 | 2,5 | 0,0185 | 1,916 | 1,916 | 0,965 |
| | | | | | | | Среднее | 1,052 |

Таблица 117 *(продолжение)*

| № опыта | Высота блока $H$ | Радиус блока $R$ | Радиус пуансона $R_1$ | Отношение $R/R_1$ | Длина выбиваемого стержня | Экспериментальное значение $L/R_1$ | Расчетное значение $L/R_1$ | Отношение значений в столбцах 6 и 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | | | | Свинец | | | | |
| 17 | 0,030 | 0,060 | 0,005 | 12,0 | 0,015 | 3,0 | 3,485 | 0,861 |
| 18 | 0,0295 | 0,055 | 0,005 | 11,0 | 0,015 | 3,0 | 3,398 | 0,883 |
| 19 | 0,050 | 0,050 | 0,005 | 10,0 | 0,015 | 3,0 | 3,303 | 0,909 |
| 20 | 0,073 | 0,060 | 0,010 | 6,0 | 0,030 | 3,0 | 2,792 | 1,074 |
| 21 | 0,050 | 0,060 | 0,010 | 6,0 | 0,028 | 2,8 | 2,792 | 1,003 |
| 22 | 0,0277 | 0,055 | 0,010 | 5,5 | 0,0235 | 2,35 | 2,704 | 0,868 |
| 23 | 0,065 | 0,050 | 0,010 | 5,0 | 0,026 | 2,6 | 2,609 | 0,997 |
| 24 | 0,070 | 0,050 | 0,010 | 5,0 | 0,0259 | 2,59 | 2,609 | 0,993 |
| 25 | 0,070 | 0,050 | 0,010 | 5,0 | 0,026 | 2,6 | 2,609 | 0,997 |
| 26 | 0,060 | 0,050 | 0,015 | 3,33 | 0,034 | 2,27 | 2,204 | 1,029 |
| 27 | 0,024 | 0,030 | 0,010 | 3,0 | 0,023 | 2,3 | 2,098 | 1,096 |
| 28 | 0,060 | 0,0505 | 0,020 | 2,525 | 0,039 | 1,95 | 1,926 | 1,012 |
| 29 | 0,070 | 0,050 | 0,020 | 2,5 | 0,0399 | 1,995 | 1,916 | 1,041 |
| 30 | 0,060 | 0,050 | 0,020 | 2,5 | 0,039 | 1,95 | 1,916 | 1,017 |
| 31 | 0,060 | 0,050 | 0,020 | 2,5 | 0,038 | 1,90 | 1,916 | 0,992 |
| 32 | 0,050 | 0,025 | 0,010 | 2,5 | 0,020 | 2,0 | 1,916 | 1,043 |
| 33 | 0,051 | 0,062 | 0,025 | 2,48 | 0,046 | 1,84 | 1,908 | 0,964 |
| 34 | 0,070 | 0,050 | 0,025 | 2,0 | 0,042 | 1,68 | 1,693 | 0,992 |
| 35 | 0,070 | 0,040 | 0,020 | 2,0 | 0,037 | 1,85 | 1,693 | 1,093 |
| 36 | 0,070 | 0,050 | 0,025 | 2,0 | 0,042 | 1,68 | 1,693 | 0,992 |
| 37 | 0,100 | 0,050 | 0,025 | 2,0 | 0,043 | 1,72 | 1,693 | 1,016 |
| 38 | 0,023 | 0,0185 | 0,010 | 1,85 | 0,016 | 1,60 | 1,614 | 0,991 |
| | | | | | | | Среднее | 0,994 |
| | | | | Олово | | | | |
| 39 | 0,050 | 0,025 | 0,010 | 2,5 | 0,0201 | 2,01 | 1,916 | 1,048 |
| | | | | Медь | | | | |
| 40 | 0,050 | 0,025 | 0,010 | 2,5 | 0,022 | 2,2 | 1,916 | 1,147 |
| | | | | Железо | | | | |
| 41 | 0,0385 | 0,040 | 0,0175 | 2,285 | 0,0325 | 1,856 | 1,825 | 1,017 |
| | | | | | | | Общее среднее | 1,020 |

Таблица 118

**Треска (1872). Монолитные блоки свинца**

| | Значения $K$, | | |
|---|---|---|---|
| | полученные до 1869 г. | | Средние результаты, полученные до 1869 г. (кгс) |
| | блоки диаметром 0,037 м (кгс) | блоки диаметром 0,100 м (кгс) | |
| Коаксиальное течение | 198 | 201 | 144 |
| Пробивание блока в цилиндрической оболочке | 176 | 221 | 184 |
| Пробивание блока в ограничивающей матрице | 190 | 211 | 202 |
| Пробивание блока без ограничивающей матрицы | 190 | 211 | 183 |
| Среднее | 188,5 | 211,0 | 183 |
| | 200 кгс | | |

высокое мнение Треска о результате. Особенно замечательной эту формулу, согласно которой длина выбиваемого стержня не зависит от начальной высоты образца, делает то, что она справедлива для большого числа весьма различных твердых тел.

Каждой конфигурации была сопоставлена нагрузка $P$, необходимая для создания течения. Так, в случае пробивки круглого цилиндрического блока Треска получил формулу

$$P = 2K\pi R_1^2 \left(1 + \lg \frac{R}{R_1}\right), \tag{4.6}$$

из которой для каждого материала может быть найдено $K$, поскольку $P$, $R$ и $R_1$ — измеряемые величины. Я опущу сравнение Треска его первоначальных, менее точных данных с поздними результатами и отошлю читателя, интересующегося деталями расчетов при различных ситуациях, к мемуару 1872 г. о пробивке. Значения $K$ для указанных типов экспериментов даны [2] в табл. 118.

Треска модифицировал соотношение (4.6) для разных типов опытов. Для осесимметричной пробивки цилиндрического блока, заключенного в цилиндрическую матрицу, он получил

$$P = \pi R_1^2 K \left(3 + \frac{2R^2}{R^2 - R_1^2} \lg \frac{R}{R_1}\right); \tag{4.7}$$

для течения в цилиндрическом блоке через концентрическое отверстие

$$P = \pi (R^2 - R_1^2) K \left(3 + \frac{2R^2}{R^2 - R_1^2} \lg \frac{R}{R_1}\right). \tag{4.8}$$

Значения $K$ определялись на сплошных блоках, поскольку для пакета пластин неизменно получались заниженные значения [1]) $K$. Данные для $K$, которые он получил в 1869 г. для сплошных блоков, действительно свидетельствуют о том, что Треска открыл постоянную материала для пластического течения твердого тела. Более низкие значения $K$ для испытывавшихся блоков диаметром 0,037 м и бóльшие значения для блоков диаметром 0,100 м указывали на слабую зависимость $K$ от $R$, не учтенную в анализе Треска.

Конечно, для разных типов твердых тел получались разные значения $K$. Так, например, для пятидесятипроцентного сплава свинца с оловом среднее значение $K$ в эксперименте дано 352 кгс/см$^2$. В случае пакета, состоявшего из пластин, среднее значение $K$ для свинца было 144 кгс/см$^2$ вместо 200 кгс/см$^2$ для сплошного блока.

Треска представил свои данные о длине выбиваемого стержня в опытах по пробивке стесненного блока в виде точек на плоскости $L/R_1$—$R/R_1$, которые сопоставил с графиком, соответствующим зависимости (4.5) (рис. 4.16). И комиссия Академии, и сам Треска считали эту корреляцию близкой, каковой она действительно является, если учесть существенное различие испытанных твердых тел, результаты для которых описываются простой формулой, показывающей, что конечная длина зависит только от двух начальных радиусов.

Треска также выполнил сравнение результатов расчетов и экспериментальных измерений, определяющих положения последовательных слоев в выбиваемом стержне. Зависимость $Y/L$ от $Y_0/L$ показана на рис. 4.17, где $Y_0/L$, $Y/L$ — отношения к длине $L$ выбитого стержня расстояний от границ слоев до плоскости контакта пуансона с верхним слоем соответственно до и после пробивки.

Проводя эти измерения, Треска использовал дифференциальный манометр, измерявший давление в гидравлическом силовозбуждающем аппарате, для определения значения $P$ — нагрузки в кгс — в функции от глубины внедрения пуансона в образец. Рис. 4.18 иллюстрирует открытие Треска, которое он считал весьма важным, а именно, что области течения, происходящего при постоянном напряжении, предшествует область пластического упрочнения твердого тела. Именно на основе этих измерений он настаивал на том, что течение твердых тел связано с достижением предельного значения напряжения, а не с тем, что упругость перестает быть линейной. Принимая во внимание данные Треска, трудно понять, почему Сен-Венан (Saint-Venant [1871, 1]) и Морис Леви (Levy [1871, 1]) сразу же, как и другие впоследствии, положили, что эта область течения начинается у предела упругости.

---

[1]) Треска испытывал затруднения в связи с различием в течении сплошных блоков и пакетов пластин. Он проводил опыты для сравнения конечных конфигураций.

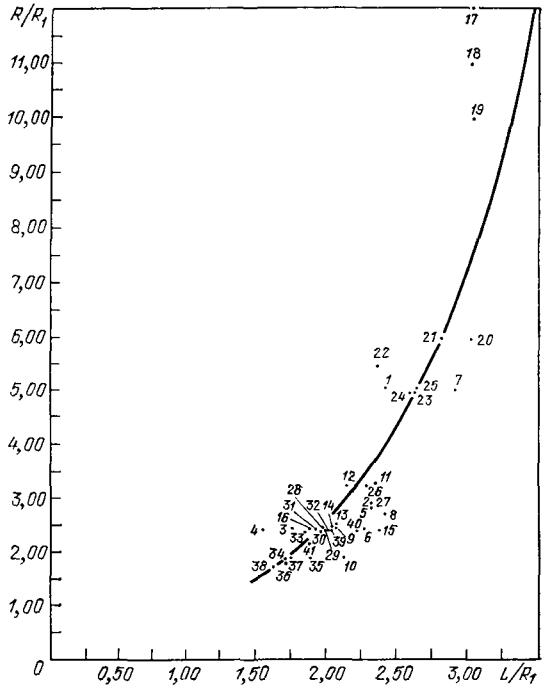



Рис. 4.16. Проведенное Треска (1872) сравнение экспериментальных (точки) и полученных расчетно (график) на основании зависимости (4.5) $[L/R_1=1+\lg(R/R_1)]$ длин экструзированного стержня для указанных материалов. Точки *1—4* соответствуют модельному воску, *5, 6* — фарфоровой глине, *7—10* — фаянсовой глине, *11—16* — кирпичной глине, *17—38* — свинцу, *39* — олову, *40* — меди, *41* — железу.

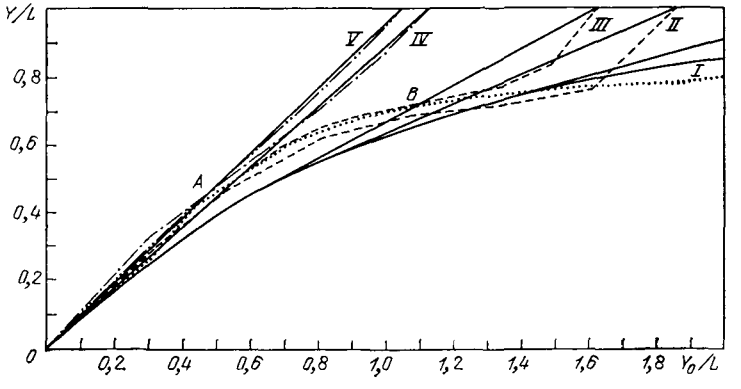



Рис. 4.17. Проведенное Треска (1872) сравнение полученных расчетно и найденных экспериментально параметров, характеризующих положение слоев в экструзированном стержне; $Y/L$ относится к расстоянию границы между слоями от контакта с пуансоном после деформации, $Y_0/L$ — к расстоянию до деформации. Сплошные линии — теоретические кривые, штриховые, пунктирные и штрихпунктирные линии — экспериментальные кривые. I — опыт 22 апреля 1864, $H=0{,}072$, $L=0{,}0313$. II — опыт 1 июня 1864, $H=0{,}028$, $L=0{,}015$. III — опыт 19 апреля 1864, $H=0{,}04975$, $L=0{,}030$. IV — опыт 1 июля 1864, $H=0{,}0285$, $L=0{,}0255$. V — опыт 17 июня 1864, $H=0{,}024$, $L=0{,}023$ (размеры $H$ и $L$ даны всюду в м).

Треска выделял пять областей: 1) область Гука до предела упругости; 2) вторая область, в которой наблюдались остаточные деформации при снятии нагрузки, но в которой еще не имело места

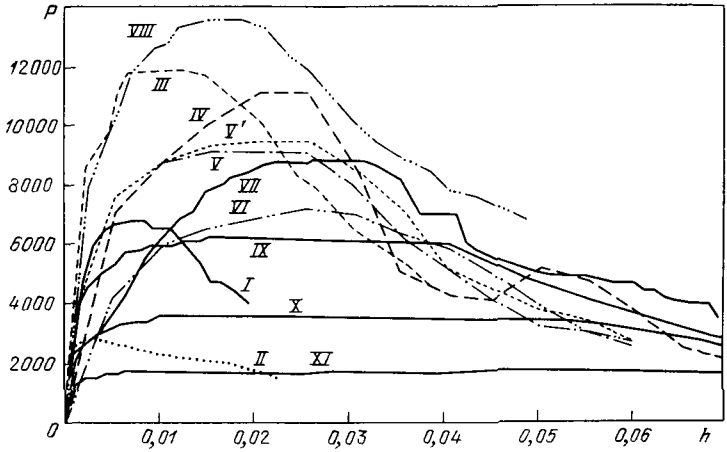



Рис. 4.18. Опыты Треска (1872). Графики зависимости значения нагрузки $P$ (кгс) от глубины внедрения пуансона $h$ (м). I—XI — номера опытов.

установившееся течение; 3) область течения при неизменных напряжениях; 4) область выхода выбиваемого стержня; 5) окончательная стадия выхода, в которой основное сопротивление создавалось

Таблица 119

**Треска (1872)**

| Номер кривой | Размеры блока (м) | Высота блока | | | Длина выбитого стержня | | Минимальное горизонтальное расстояние (м) | Диаметр пуансона (м) | Максимальная сила (кгс) | Максимальное давление (кгс/см²) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | начальная (м) | конечная снаружи (м) | конечная внутри (м) | снаружи (м) | вдоль оси (м) | | | | |
| I | 0,124×0,124 | 0,021 | 0,021 | 0,020 | 0,018 | 0,022 | 0,037 | 0,050 | 6 711 | 342 |
| II | $D=0{,}060$ | 0,024 | 0,024 | 0,024 | 0,023 | 0,023 | 0,020 | 0,020 | 2 665 | 849 |
| III | 0,124×0,124 | 0,038 | 0,038 | 0,0365 | 0,032 | 0,038 | 0,037 | 0,050 | 11 887 | 606 |
| IV | $D=0{,}100$ | 0,070 | 0,068 | 0,059 | 0,042 | 0,038 | 0,025 | 0,050 | 11 191 | 570 |
| V | $D=0{,}100$ | 0,060 | 0,060 | 0,055 | 0,039 | 0,044 | 0,030 | 0,040 | 9 451 | 752 |
| V′ | $D=0{,}100$ | 0,060 | 0,060 | 0,054 | 0,038 | 0,046 | 0,030 | 0,040 | 9 103 | 724 |
| VI | $D=0{,}100$ | 0,060 | 0,060 | 0,0565 | 0,034 | 0,0345 | 0,035 | 0,030 | 7 189 | 1017 |
| VII | $0{,}085\times x$ | 0,070 | 0,070 | 0,064 | 0,039 | 0,041 | 0,0225 | 0,040 | 8 842 | 652 |
| VIII | 0,124×0,124 | 0,051 | 0,051 | 0,047 | 0,0146 | 0,046 | 0,037 | 0,050 | 13 627 | 694 |
| IX | $0{,}085\times x$ | 0,070 | 0,070 | 0,070 | 0,036 | 0,036 | 0,0275 | 0,030 | 6 232 | 882 |
| X | $0{,}085\times x$ | 0,070 | 0,070 | 0,070 | 0,025 | 0,025 | 0,0325 | 0,020 | 3 622 | 1253 |
| XI | $0{,}085\times x$ | 0,070 | 0,070 | 0,070 | 0,014 | | 0,0375 | 0,010 | 1 795 | 2287 |

трением. Значения римских цифр на рис. 4.19 соответствуют номерам строк, приведенным выше в табл. 119, характеризующей геометрические величины в отдельных экспериментах.

Треска представил графически результаты тех же одиннадцати опытов в системе осей $P/R_1$ — внедрение пуансона. Эти результаты показаны на рис. 4.19.

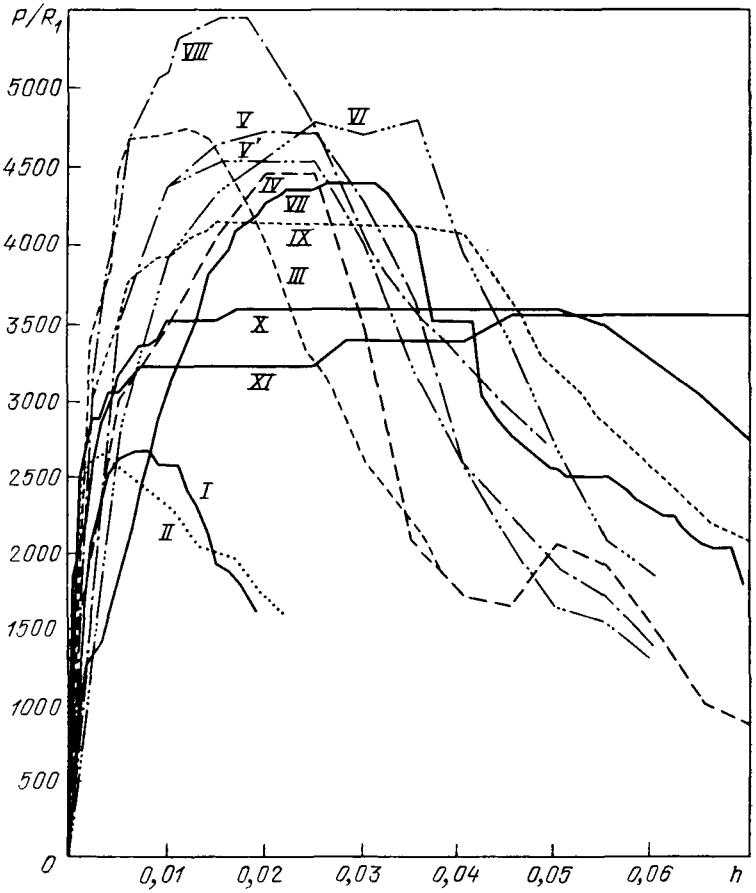



Рис. 4.19. Опыты Треска (1872). Графики зависимости $P/R_1$ (кгс) от глубины внедрения пуансона $h$ (м) для 11 опытов (I—XI — номера опытов), данные о которых приведены в табл. 119.

Наиболее важные графики в серии — те, на основе которых Треска дал зависимость коэффициента $K=P/[2\pi R_1^2(1+\lg(R/R_1))]$ как функции от глубины внедрения пуансона. Эти данные показаны на рис. 4.20. Значения по обе стороны от среднего уровня 200 кгс/см$^2$ дают некоторую меру изменений в его данных для свинца. В то же время они еще сильнее подчеркивают даже большее зна-

чение второй, промежуточной области, наблюдавшейся Треска в опытах по пластическому течению, которой обычно пренебрегают.

И Треска, и Сен-Венан были убеждены в том, что параметр материала $K$ связан с предельным значением касательного напряжения [1]), что можно видеть из сравнения комиссией Академии в 1870 г.

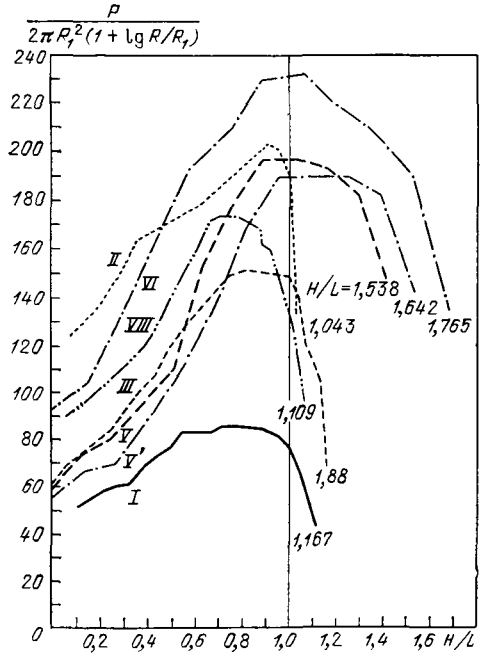



Рис. 4.20. Опыты Треска (1872). Графики зависимости величины $P/[2\pi R_1^2(1+\lg(R/R_1))]$ (кгс/см²) от глубины внедрения пуансона $H/L$. Это — графики Треска для константы материала $K$, которая в приведенных экспериментах должна иметь значение 200 кгс/см². Следует отметить наличие переходной области упрочения до возникновения пластического течения материала при постоянном напряжении. Римские цифры — номера опытов.

максимального касательного напряжения Треска для железа, составлявшего 37,57 кгс/мм², с предельным касательным напряжением 38,09 кгс/мм², полученным Фейрбейрном для литого железа; эту согласованность значений Комиссия расценила как замечательную. Треска дал подобные диаграммы и анализ для нескольких твердых тел в мемуаре 1872 г. и в графическом дополнении, которые заинтересованному читателю уже были рекомендованы для подробного ознакомления. Он привел окончательную таблицу коэффициента текучести в терминах максимального касательного напряжения (условие Треска) для металлов, указанных в табл. 120.

Мемуар Треска — *Mémoires Présentés par Divers Savants à l'Académie des Sciences Paris* (Tresca [1872, 1, 2, 3]), вторая серия, том 20) содержит 337 страниц текста, 107 отдельных рисунков и 25 вклад-

[1]) Проведенные эксперименты не давали оснований заключить, что максимальное касательное напряжение является важным параметром. Это правдоподобное предположение, несмотря на то, что оно безоговорочно принималось целый век, фактически оставалось все тем же — предположением.

ных листов, на каждом из которых имеются от 3 до 6 рисунков с изображениями объектов, выполненных в масштабе 1 : 1. Резюме работы Треска содержится в докладе комиссии Академии за 1870 г. (Tresca [1870, 1]), который следует читать в сочетании с графическим Дополнением в томе 1872 г. Треска также опубликовал два мемуара по применениям своих исследований, относящихся к течению материалов (Tresca [1867, 2], [1868, 2]).

Таблица 120

**Треска (1872)**

| Вещество | Напряжение течения (кгс/мм²) |
|---|---|
| Свинец | 1,82 |
| Чистое олово | 2,09 |
| Свинцово-оловянный сплав | 3,39 |
| Цинк | 9,00 |
| Медь | 18,93 |
| Железо | 37,57 |

В июне 1878 г. Британский институт инженеров-механиков провел встречи в Высшем ремесленном училище в Париже. Очевидным апогеем встречи было специальное сообщение президента Парижского общества гражданских инженеров Анри Треска в среду 12 июля (Tresca [1878, 1]). Мемуар, представленный и опубликованный на английском языке, отражал тот факт, что идеи Треска по пластическому течению продолжали развиваться после того, как он прекратил работы в этой области. Треска снова подчеркнул, что имеются три отчетливо различимые фазы деформации. Первые две обнаруживаются у всех тел. Это — идеально упругая фаза при малых деформациях и фаза несовершенной упругости при нелинейных деформациях, которая, если она достаточно развита, приводит во многих твердых телах при «достаточно большой силе» к третьей фазе, «определяемой автором как период течения, и к которой относится бóльшая часть его экспериментов по течению твердых тел» (Tresca [1878, 1], стр. 302). Отметив тот факт, что для разных твердых тел величина деформации в этой области текучести варьируется «от нуля до весьма значительной», Треска дал пространный обзор своей предыдущей работы, сопровождаемый большим числом рисунков, приводимых в качестве иллюстраций.

По вопросу о том, существуют ли два вида железа, а именно, волокнистое и кристаллическое, Треска высказался не в духе времени, заметив, что при травлении становились видны отдельные волокна металла, и дал примеры больших деформаций, которые удавалось объяснить только исходя из предположения о «волокнистом строении металла». По поводу этого странного спора нужно еще раз напомнить о сильном влиянии общепринятой гипотезы на ход экспериментальной мысли. Как отмечается ниже, Роберт Стефенсон (Stephenson [1850, 1]) в 1850 г. при первом же применении микроскопа в металлургии показал, что «волокнистое» и кристаллическое железо на самом деле оба оказываются кристал-

лическими, когда наблюдаются под микроскопом, т. е. никакого различия не существует. Людерс (Lüders [1860, 1]) в 1860 г. провел исследования протравленных поверхностей, которые дали дополнительные доказательства кристалличности строения. Тем не менее в 1878 г., спустя четверть века, не все еще расстались со старыми аргументами; как видно из утверждения Треска, они еще влияли как на проведение экспериментов, так и на их интерпретацию.

Однако основным новым моментом в обзорной работе Треска была его ссылка на простое заявление, с которым он выступил перед Французской Академией наук 8 июня 1874 г. Это заявление заключалось в том,

«что когда платиновый стержень в момент ковки охлаждался до температуры ниже красного каления, несколько раз случалось, что удар парового молота, который в это время производил локальное углубление в стержне и удлинял его, также вновь нагревал его вдоль двух линий, наклоненных друг другу, образуя на сторонах куска в углубленной части две диагонали, и столь значителен был этот разогрев, что в металле вдоль этих линий полностью восстанавливалось красное каление и ясно выделялась форма светящейся зоны. Эти вытянутые вдоль линии *области повышенной температуры даже сохраняли свечение в течение нескольких* секунд и имели вид двух лимбов по форме буквы X. При определенных условиях одновременно насчитывалось до шести таких букв, возникавших последовательно одна за другой в соответствии с тем, как стержень подвигался под молот и под удары попадала новая часть его длины.

Относительно причины возникновения этих светящихся следов сомнений не было. Это были линии наибольшего скольжения и соответственно зоны наибольшего выделения тепла — совершенно определенное проявление принципов термодинамики. То, что это явление не наблюдалось ранее, очевидно, объясняется тем, что не было столь благоприятного стечения обстоятельств, при которых одновременно имели место все условия, необходимые для его возникновения. Иридиевая платина требует для своей деформации совершения большого количества работы. На поверхности нет окалины, и стержень почти просвечивает, когда металл доведен до красного каления. Этот металл является плохим проводником тепла, а его удельная темлоемкость низка. Все эти условия благоприятствуют тому, чтобы эффект стал видимым при ковке данного металла, тогда как он оставался скрытым для всех других в иных условиях» (Tresca [1878, 1], стр. 314, 315).

Треска провел грубое изучение этого эффекта, покрывая противоположные боковые грани металлического стержня воском или жиром перед тем, как подвергнуть его удару парового молота. Он заметил, что воск плавился в окрестности углубления в стержне, возникающего от удара молота и

«в некоторых случаях приобретал форму буквы X, подобно тому, как это наблюдалось в случае платинового стержня. В других случаях пересекающиеся линии искривлялись так, что их выпуклости были обращены друг к другу. Тепло при этом рассеивалось интенсивнее, и воск плавился во всей области боковой поверхности стержня между упомянутыми выше кривыми» (там же, стр. 315, 316).

Он принял допущение об однородности нагрева до уровня температуры плавления воска той части объема стержня, которая располагалась в пределах участка его поверхности, где воск расплавлялся, и определил объем указанной части стержня.

Признавая грубость этой первой попытки экспериментального определения соотношения между работой, совершаемой молотом, и

Таблица 121

**Треска (1878)**

| Номер рис. на листе 41 | 32 | 33 | 34 | 35 |
|---|---|---|---|---|
| Исследуемый материал | Железо | Железо | Железо | Медь |
| Вид следа | Пересекающиеся под прямым углом отрезки прямых | Пересекающиеся под прямым углом отрезки прямых | Пересекающиеся кривые | Пересекающиеся под прямым углом отрезки прямых |
| Площадь части поверхности стержня, в пределах которой воск расплавился (дюйм$^2$) | 0,22 | 0,23 | 0,34 | 0,27 |
| Толщина полосы (дюйм) | 0,98 | 0,98 | 0,98 | 0,78 |
| Объем соответствующей призмы (дюйм$^3$) | 0,22 | 0,23 | 0,34 | 0,21 |
| Единицы тепловой энергии, поглощенной призмой при нагреве до 122 °F | 0,5944 | 0,6138 | 0,9003 | 0,5273 |
| Эквивалентная работа (принято, что 1 ед. тепла = 772 фунт·фут) | 460 | 475 | 696 | 408 |
| Работа деформирования при ударе молота (фунт·фут) | 579 | 651 | 796 | 434 |
| Доля механической энергии, перешедшей в тепловую (%) | 79,6 | 73,1 | 87,7 | 94,2 |

количеством тепловой энергии, выделяемой при пластической деформации [1]), Треска установил, что количество работы, преобразующейся в тепло, неизменно превышало 70% совершенной работы. Как можно видеть из табл. 121, эти ориентировочные нижние границы отношения, характеризующего эффективность преобразования энергии, изменялись от столь низких значений как 73,1; 79,6 и 87,7% (удары молота совершают работу 579, 651 и 796 фунт·фут соответственно) до значения 94,2% для меди при работе, совершенной молотом, 434 фунт·фут. Повышения температуры были значительными; температура плавления воска, использованного Треска, указана им как 122°F (50°C). Табл. 121 приводится

[1]) Это предприятие не было успешно завершено вплоть до момента, наступившего когда соответствующие измерения были произведены Джеффри Ингрэмом Тэйлором (Taylor [1937, 1]). На протяжении шестидесяти лет эта интересная часть исследования Треска просто игнорировалась всеми, включая Тэйлора. См. раздел 4.23.

ввиду ее исторического значения как первой попытки применить подход, напоминающий термодинамические принципы Джоуля (Joule [1859, 1]), к течению твердых тел.

Второе наблюдение, представленное в том же мемуаре, несомненно, весьма интересовало Треска. Он обнаружил, что если с одной стороны монеты удалялся рельеф и эта теперь гладкая плоскость помещалась на свинцовый лист, то удар пресса по противоположной, рельефной, стороне монеты переводил рельеф с нее на гладкую сторону монеты. Еще более интересным было наблюдение, состоявшее в том, что это рельефное изображение с верхней поверхности монеты передавалось свинцу с увеличением рельефности в пропорции 22 к 13, когда свинцовый лист имел толщину, равную 1/2 дюйма. Степень увеличения рельефности зависела от толщины свинцового листа. Хотя Треска признал, что не может сформулировать точные правила такого поведения, он подчеркнул его фундаментальное значение и практические аспекты. Он привел многочисленные иллюстрации его технологических приложений в штамповке и прокатке.

Сообщение Треска заканчивалось сожалением по поводу того, что круг интересов участников собрания и необходимость экономно использовать бюджет времени не позволяют остановиться на экспериментах, которые «поражают разум удивительной степенью точности связей строения горных пород с их дислокациями» (Tresca [1878, 1], стр. 327). Эти эксперименты в геологии, выполненные совместно с Добре (Daubrée), были частью его постоянных усилий изучить все типы деформации так, чтобы понять «явления молекулярной механики равно как... внутреннее строение веществ, которые подвергаются различным технологическим воздействиям» (там же).

Невозможно прекратить обсуждение этого мемуара, не прокомментировав по меньшей мере один аспект последовавшей за докладом длительной, происходившей в аудитории дискуссии, которая была записана. Как почти всегда бывает в подобных дискуссиях, ряд полусвязанных несущественных деталей и несвязанных сообщений о собственных более ранних решениях выступающего перемежается банальностями и мелкими недопониманиями. За редким исключением, обзоры записей дискуссионных собраний Французской Академии являются ценными лишь в единственном отношении — они позволяют оценить степень подготовленности их участников с исторической точки зрения. Так, Джон Гопкинсон, чьи эксперименты 1872 г. (Hopkinson [1872, 1, 2]) сейчас многими ошибочно считаются началом динамической пластичности, спросил Треска в 1878 г. о различии между характером течения одинаковых образцов, один из которых подвергается удару молота малой массы, движущегося с большой скоростью, а другой — удару молота с большой массой при малой скорости, если в обоих случаях работа одинакова. Гопкинсон отметил, что он не думает, что любое раз-

личие может зависеть только от инерции материала. Из этих замечаний мы можем лучше понять заблуждение Гопкинсона (и его очевидное непонимание того, что совершил Треска) в 1872 г., когда он пытался применить теорию бесконечно малых линейных упругих волн к рассмотрению динамического разрыва железных проволок при больших деформациях (там же) [1]). Треска ответил только на замечание Гопкинсона о важности временных эффектов, указав, что квазистатическое нагружение, которое он изучал, давало результаты, весьма отличные от подобных экспериментов при быстром нагружении. Можно также упомянуть, что Р. Прайс Вилиямс (R. Price Williams) был информирован Треска о том, что утверждение, будто квазистатическое и динамическое нагружения производят одинаковое в отношении температуры нагревание твердого тела, несостоятельно, поскольку при медленном нагружении успевает происходить рассеяние тепла.

Для подписчиков стандартных литературных источников, посвященных школьному образованию, Треска представляет загадку. Он родился в 1814 г. в Дюнкерке, окончил Политехническую школу в 1833 г. в возрасте 19 лет и стремился к карьере проектировщика гражданских сооружений. Будучи на некоторое время остановлен в этом стремлении серьезной болезнью, он посвятил следующие тридцать лет преподаванию, разрабатывая и проводя опыты на гидравлических машинах, и писал работы по практической механике. С 1852 г. он работал в Высшем ремесленном училище, сначала в ранге инженера, а затем помощника директора, где организовал отделение по стандартизации мер и весов [2]). Таким образом, когда в 1864 г. он неожиданно избрал карьеру старшего физика-экспериментатора, ему было уже 50 лет. Эти исследования были прерваны франко-прусской войной 1870 года, во время которой он занимался металлургическими разработками для артиллерии и электротехникой. Подобные технологические темы занимали его вплоть до самой смерти в 1885 г. Краткая (в течение всего восьми лет) карьера в экспериментальной физике дала ему всемирную известность и избрание во Французскую Академию в 1872 г. (см. биографию Треска в *École Polytechnique, Livre Centenaire*, Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1895, vol. I, pp. 206—209).

---

[1]) Гопкинсон уделил также две страницы описанию своей работы по релаксации напряжений и своего интереса к вязкости в связи с различием между вязкостью твердых тел и вязкостью жидкостей.

[2]) Морэн, который являлся директором Высшего ремесленного училища, был в то время доминирующей фигурой во французской науке и технологии. Просматривая его опубликованные работы, я обнаружил, что он был исключительно бесцветен как ученый, несмотря на видное положение члена Академии и директора Училища. Несомненно, его главным вкладом в науку и технологию стали те возможности и поддержка, которые он обеспечил Треска при начале и продолжении его исследований пластического течения.

### 4.5. Открытие Тарстоном зависимости предела упругости от предшествующей истории напряженного состояния и ее продолжительности (1873)

Примерно в то время, когда Треска проводил свое классическое изучение течения твердых тел, исследования конечных деформаций начались в нескольких различных направлениях. Всем им было предопределено в следующем веке иметь повторение, только с измененной интерпретацией, а также дальнейшее развитие. Среди них были важные и ныне широко цитируемые обширные опыты Баушингера, проводившиеся в 70-х и 80-х гг. XIX века, посвященные пределам упругости и текучести; исследования на машине с автоматической записью диаграмм Роберта Г. Тарстона, открывшего эпоху автоматизированного изучения деформаций в области работы материала между пределом упругости и разрушением; работы в период 1850—80 г. Джоуля, Эдлунда, Экснера, Винклера, Имберта и др. по термодинамике резины при конечных деформациях; эксперименты по динамической пластичности Джона Гопкинсона, проведенные в 1872 г.; возросший интерес к металлургическому аспекту науки о пластичности металлов, что проявилось, например, в открытии в 1854 г. Людерсом (W. Lüders, опубликовано в [1860, 1]) его знаменитых фигур травления на испытавших деформацию образцах из железа и стали или в предложении, сделанном Полем Р. Ходжем в 1850 г., использовать микроскоп для изучения структуры железа (Hodge [1850, 1]) [1]).

Перед тем как описать самопишущую аппаратуру Тарстона и исследования по конечным деформациям древесины и стали, которые она позволила выполнить, я кратко остановлюсь на работе Людерса, хотя она и не вполне отвечает теме данного обзора. Испытывая железные прутки, применяемые для колес экипажей и подков, Людерс заметил появление на поверхности тела следов, подобных сетке на напильнике. Его последующее изучение явления включало полировку и травление поверхности образца слабым раствором азотной кислоты, что обнаруживало на поверхности штриховку, подобную изображенной на рис. 4.21. Линия $A$—$B$ представляет собой ось стержня. Он заметил подобие штриховки в видманштедтовой структуре метеоритного железа. Соображения Людерса о возможной кристаллической природе этого явления на столетие предвосхитили последующий интерес к основному объекту чрезвычайно развитой ныне области пластичности кристаллов.

К середине второй половины XIX века как в науке, так и в тех-

[1]) Это предложение было немедленно реализовано Робертом Стефенсоном (Stephenson [1850, 1]), президентом института инженеров-механиков, хотя он не присутствовал на январском заседании. Стефенсон начал свое изучение в апреле 1850 г. и был сильно удивлен, обнаружив при первом своем использовании микроскопа в металлургическом исследовании, что под микроскопом, как я отметил выше, «волокнистое» и кристаллическое железо неразличимы.

нологии стали объектом широкого обсуждения возможности лабораторий колледжей и университетов в подготовке студентов [1]). К 80-м гг. XIX века первой и наиболее передовой немецкой лабораторией по испытаниям инженерных материалов признавалась механико-техническая лаборатория Королевской высшей технической школы в Мюнхене, руководителем которой в 1871 г. стал

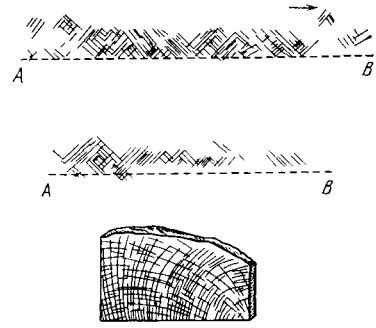



Рис. 4.21. Опыты Людерса (1860). Рисунки Людерса следов на поверхности протравленного железа, обнаруженных при исследовании явления в 1854 г.

38-летний Иоганн Баушингер. Баушингер в течение двух следующих десятилетий, вплоть до своей смерти в 1893 г. стал главной фигурой среди континентальных инженеров в быстро развивавшейся области испытаний металлов.

Где-то у противоположного конца этого спектра находился Роберт Г. Тарстон, также сильно связанный с технологией, который в 1872 г. обучал лабораторной технике студентов старших курсов в первом в Соединенных Штатах технологическом институте с машиностроительным уклоном, Стевенсоновском технологическом институте в Хобокене, штат Нью-Джерси. Тарстон создал много своей собственной аппаратуры; действительно, он спроектировал и усовершенствовал машину для испытаний на кручение с самопишущим устройством, измерения на которой сильно повлияли на направление мысли в следующие сорок лет. Его аппаратура послужила прототипом для современных стандартных автоматизированных схем испытаний материалов.

Изображение Тарстоном (Thurston [1874, 1]) его машины приведено на рис. 4.22. Рис. 4.23 воспроизводит чертеж самописца Тарстона, опубликованный Ролла С. Карпентером и Германом Дидерихсом (Carpenter, Diederichs [1911, 1]) [2]).

Палец на грузовом плече рычага позволял получить ординату, пропорциональную крутящему моменту. Абсциссой был угол за-

[1]) См. Флориан Кайори (Cajori [1928, 1]) — краткий обзор роста числа лабораторий общей физики или большую статью А. Б. У. Кеннеди (Kennedy [1887, 1]) для детального знакомства с аппаратурой механических испытаний твердых тел в технических лабораториях всего мира.

[2]) Этот рисунок взят из более ранней работы Черча (Church), озаглавленной *Mechanics of Engineering*.

кручивания или относительный угол взаимного поворота двух поперечных сечений, расположенных по концам цилиндрического образца, независимо от среднего положения грузового рычага и веса груза. Типичные графики зависимости крутящий момент — угол закручивания, записанные автоматически, показаны на рис. 4.24. Несмотря на ограниченную точность и невозможность

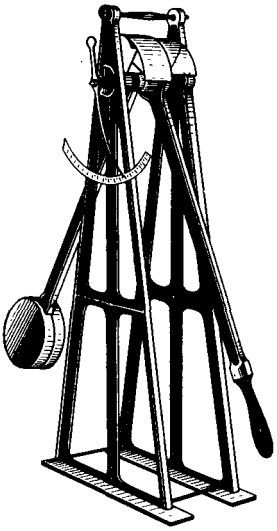


Рис. 4.22. Рисунок Тарстона (1874) его машины для испытаний на кручение с автоматической записью диаграммы деформирования. (Буквенные обозначения, имеющиеся на оригинале рисунка и не поясненные здесь, опущены.)

установить распределение напряжений в упругой и пластической зонах при конечных деформациях, изобретение Тарстона, как постоянно отмечалось в течение следующего полувека, являлось главным достижением в проведении экспериментов по конечным деформациям.

Осенью 1873 г. за несколько дней до заседания Американской Национальной Академии наук, которое должно было происходить в Стевенсоновском технологическом институте, Тарстон решил узнать, может ли пластическое поведение, описанное Треска в незадолго до этого опубликованной работе, быть изучено при кручении при помощи его машины. Возбудив в образце из пудлингового железа деформации в пластической области, он зафиксировал грузовой рычаг, чтобы обнаружить, будут ли крутящий момент и (или) угол закручивания изменяться в течение двадцати четырех часов. На следующий день 13 ноября 1873 г.— дата, которая стала предметом последующих жарких споров,— Тарстон обнаружил, что ни крутящий момент, ни угол закручивания не изменились. Однако к его чрезвычайному изумлению, когда он продолжил опыт от этого предварительно созданного напряженного состояния, начался новый линейно-упругий участок с новым пределом упругости, более чем на 25% выше, чем тот, который был бы достигнут при обычной

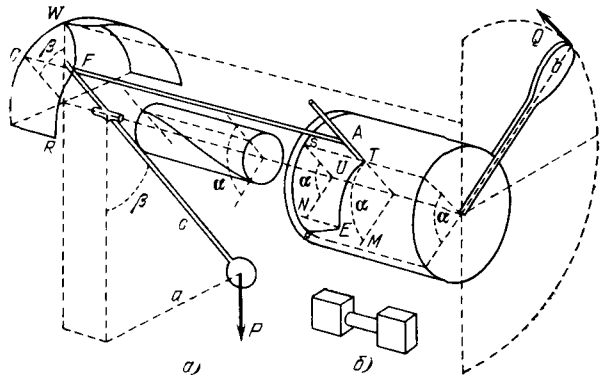



Рис. 4.23. Испытательная машина Тарстона на кручение. Схема, приведенная Карпентером и Дидерихсом (Carpenter and Diderichs [1911, 1]), автоматического регистрирующего устройства Тарстона и тип испытуемого образца. *а*) Машина Тарстона для испытаний на кручение; *б*) испытуемый образец.

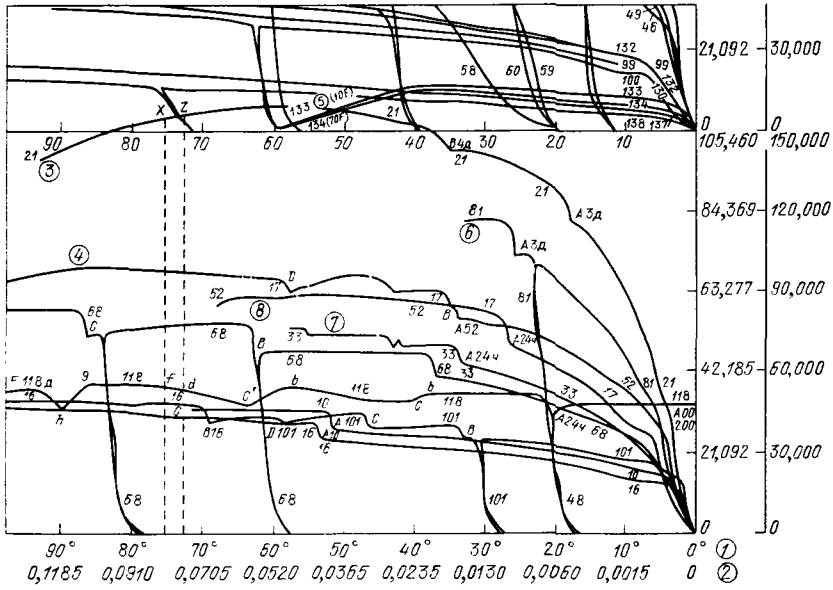



Рис. 4.24. Опыты Тарстона (1875). Автоматически записанные диаграммы крутящий момент (отложен на оси ординат) — угол закручивания, полученные Тарстоном на его машине, приведенной на рис. 4.22. Следует обратить внимание на влияние выдержки при нагружении; *1* — угол закручивания, *2* — максимальная деформация удлинения, *3* — твердая хромистая сталь, *4* — хромистое железо, *5* — литая медь, *6* — инструментальная сталь, *7* — ковкий чугун, *8* — ножевая сварочная сталь. (Приведенные выше цифры на рисунке обведены окружностями). Буква *ч* рядом с числом или цифрой означает количество часов, буква *д*—количество суток. Числа рядом с кривыми — их номера.

разгрузке и повторном нагружении образца, производимыми за сравнительно короткие промежутки времени, как это было обычным в опытах с мертвой нагрузкой, характерных для испытаний XIX века.

Сознавая важность своего открытия, Тарстон спустя шесть дней прочел доклад об этой работе на очередном заседании Американского общества гражданских инженеров 19 ноября 1873 г., что соответствующим образом отмечено в опубликованных материалах общества.

«Металл оставался деформированным двадцать четыре часа и при этом не испытал ни малейшего дополнительного течения... после того, как этот результат был зафиксирован, предпринята попытка дополнительно деформировать испытываемый образец, в ходе которой было сделано неожиданное открытие, что его сопротивление стало выше, чем в предыдущий день; возрастание сопротивления более чем на 25 процентов превышало максимум, зарегистрированный в предыдущий день, и приближалось к предельному сопротивлению материала» (Thurston [1874, 1], стр. 239—240).

и далее

«Полная разгрузка образца и немедленное повторное нагружение до той же силы не производили такого упрочняющего воздействия» (там же).

Его подробная статья об «увеличении предела упругости», представленная 4 февраля 1874 г., вышла в том же томе трудов (Thurston [1874, 2]).

Детальное описание явления Тарстоном, в котором его первый эксперимент обозначался как #16, было опубликовано в следующем томе трудов (Thurston [1875, 1]) вместе с обсуждением некоторых других его опытов, выполненных позднее. Начальная часть длинной автоматически записанной диаграммы из этой статьи также показана на рис. 4.24, из которого можно видеть явление зависимости сопротивления материала от продолжительной выдержки его под нагрузкой, обнаруженной в точке $A$ в опыте #16 и в некоторых других испытаниях.

Учитывая возражения, которые вскоре были выдвинуты его современниками, следует заметить, что Тарстон действительно наблюдал явление, состоявшее в том, что, если он полностью разгружал и затем немедленно нагружал образец, который до этого находился под постоянной нагрузкой в течение 24 ч, то достигался более высокий предел упругости. Если бы Тарстон был в большей мере ученым, чем инженером-практиком, он мог бы также включить один из своих ранних опытов, в котором он выдерживал образец в разгруженном состоянии сразу после разгрузки из пластической области. При новом нагружении он обнаружил бы, что повышение предела упругости происходит за некоторый промежуток времени, и не обязательно, чтобы образец оставался под нагрузкой столь же продолжительное время, каким был период его отдыха.

Немедленное и широкое признание Тарстона было удивительным для страны, в которой первая высшая школа — университет

Джона Гопкинса — открыла свои двери только спустя 3 года, в 1876 г.; для нации, которая в 70-х гг. XIX века явно не относилась к числу тех, от которых можно было бы ждать серьезных вкладов в науку, за исключением, быть может, ее представителей, обучавшихся в Европе [1]). «Использование нового метода исследований и важность некоторых заключений, полученных из автоматических записей, привлекли большое внимание, и статья многократно переиздавалась» (цитата из статьи Тарстона (Thurston [1876, 2], стр. 9)).

Появились также почти немедленно и отрицательные отклики в форме едких нападок на эксперименты, оборудование и на каждое в отдельности, а также в целом на все наблюдения Тарстона, высказанных Фридрихом Киком, профессором экспериментальной механики из Праги. Первоначальное возражение Кика было направлено против пренебрежения инерцией системы. Однако его заявление, что из-за этого все результаты полностью обесцениваются, было обоснованно снято в ответе Тарстона [2]), а также позднее было отведено как неосновательное и многими другими авторами, включая Баушингера, у которого были другие важные претензии к предмету обсуждения. Кик решительно отвергал всякое научное значение опыта, хотя допускал, что возможны его некоторые существенные технические приложения. Кик был прав в своей критике пренебрежения Тарстоном такими обстоятельствами, как распределение напряжений при пластическом кручении, когда тот полагал, что измерения диаметра позволяют ему представить графически некоторые из данных по кручению в форме зависимостей растяжение — удлинение, что, по-видимому, повлияло на враждебность характера комментариев работ Тарстона, появившихся в следующее десятилетие [3]). Однако эта критика не принималась во внимание, когда изобретение механизма автоматической записи графика деформирования в испытательной машине покорило лаборато-

---

[1]) В недавнем исследовании, *The Mechanical Engineer in America, 1830—1910*, Монт А. Калверт (Monte A. Calvert, [1967, 1]) посвятил много страниц разным сторонам профессиональной карьеры Тарстона на факультете Корнелльского университета. Калверт, говоря о влиянии Тарстона на Американское общество инженеров-механиков и на инженерные стандарты в Соединенных Штатах, не упомянул, что работа Тарстона в его «скромной успехами» лаборатории в Стевенсоновском технологическом институте оказала громадное влияние на развитие европейской экспериментальной механики.

[2]) Kick [1875, 1]. См. также перевод, содержащийся в ответе Тарстона (Thurston [1876, 2], немецкий перевод [1877, 1]). Любопытно, что в экспериментах через несколько лет Тарстон стал прикладывать ударные нагрузки к рукоятке, чтобы получить «динамические» результаты, делая в этом случае критику Кика справедливой, тогда как ранее она была необоснованной.

[3]) Собственные исследования Кика в этой области механики — некоторые из них описываются ниже — обнаруживают основные черты его ограниченности в понимании проблем рациональной механики. Как инженер-практик он предложил правила по методике проведения исследования, которые даже тогда имели, к его великому огорчению, и безусловно имеют сейчас, в высшей степени сомнительное значение.

рии Европы и особенно Англии, где этот механизм появился в улучшенных вариантах применительно к растяжению, изгибу, а также для кручения; автор же его в течение последующего полустолетия пользовался заслуженным признанием [1]). Например, пятнадцать лет спустя, в 1887 г. известный английский инженер Кеннеди (Kennedy [1887, 1]) создал машину с автоматическим изображением графика деформирования при растяжении и получил результаты, показанные на рис. 4.25 для пудлингового железа и стали.

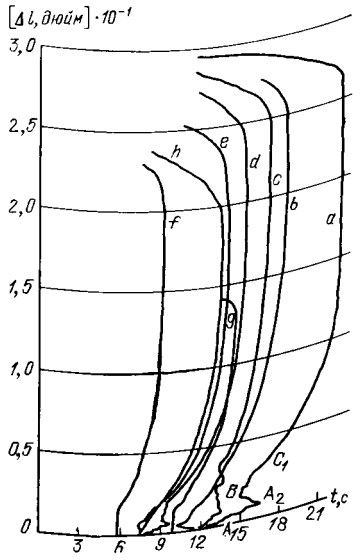



Рис. 4.25. Опыты Кеннеди (1887). Распространение использования испытательных машин с автоматической записью диаграммы деформирования на машины для испытания образцов на растяжение. По оси абсцисс отложены значения полной нагрузки в тс, а по оси ординат удлинения; единица шкалы равна 10 дюймам.

Тарстон, по-видимому, первым отметил, что кривые упрочения металлов имеют параболический вид, и показал, что значения функций напряжение — деформация во всей области пластических деформаций возрастают с убыванием температуры. Насколько мне удалось выяснить, Тарстон первым из экспериментаторов предположил, что в пластичности может иметь значение вязкость (Thurston [1876, 1]). Он отметил, что ординаты графика функции напряжение — деформация при увеличении скорости нагружения в целом увеличиваются. Эти наблюдения за вязкопластичностью основывались на испытаниях, которые выполнены при сравнительно низких скоростях деформаций для того, чтобы избежать инерционных эффектов.

Несомненно, важно не только с точки зрения восстановления истины, но также для обеспечения исторической перспективы, быть насколько возможно точным в вопросах приоритета в оригинальных открытиях. Значительно менее существенно, если не вредно, прослеживать в деталях часто обидные и столь же часто несправедливые тирады участников открытия при наличии у них противоречий. Современное значение «эффекта Баушингера» и экспериментальное мастерство Баушингера в проведении его обширного исчерпывающего исследования по «неустойчивой» пластичности поз-

[1]) См., например, исследование Фишера (Fischer [1882, 1] ) и Мюллера (Müller [1882, 1]), описанное в разделе 2.21; они использовали самопишущее устройство, адаптированное Ройшем. Или можно обратиться к обширному обзору развития испытаний на машинах с самопишущей аппаратурой Уильяма Кауторна Анвина (Unwin [1886, 1]), написанному в 1886 г. и опубликованному в Journal of the Society of Arts.

воляют мне привести один, возможно в некотором смысле крайний, пример того, что нередко происходит независимо от ранга участников спора.

Кик, не признавая всех наблюдений Тарстона, в то же время хотел отказать ему и в чести быть первым, кто обнаружил увеличение предела упругости. Кик отдал приоритет генерал-майору Ухатиусу, датировав его 1873 г. Тарстон охотно признал в дополнении к своей работе, что Ухатиус (Uchatius [1874, 1]) открыл эффект независимо. Однако, как указал Тарстон, дата публикации генерала была 10 апреля 1874 г., т. е. она вышла на пять месяцев позже заметки Тарстона. Вскоре после своего открытия Тарстон также заметил, что коммодор Л. У. Бердсли из Вашингтонского морского корпуса независимо открыл явление, использовав совершенно другой метод исследования (Beardslee [1874, 1]). Работа Бердсли по растяжению, опубликованная в конце 1874 г., продемонстрировала тот важный факт, что увеличение предела упругости, следующее за пластической деформацией, не требует того, чтобы образец в течение некоторого интервала времени выдерживался под нагрузкой перед дальнейшим возрастанием усилия. Он наблюдал более высокий предел упругости даже тогда, когда он выдерживал образец в течение этого промежутка времени вовсе разгруженным.

История Тарстона — Бердсли — Ухатиуса была бы всего лишь еще одним примером любопытного факта почти одновременности открытия, если бы не было неспровоцированной мелочной вендетты, которую Иоганн Баушингер начал в 1877 г., пытаясь не только отрицать любую заслугу Тарстона в открытии, но и призывая всех и каждого игнорировать его самого, его работу и его известную машину с самопишущим приспособлением.

Баушингер цитировал генерала Ухатиуса (Uchatius, [1877, 1]), который также включился в спор в 1877 г. Сознавая, что по дате публикации его опередили, Ухатиус заявлял, что эффект увеличения предела упругости был известен Л. Вердеру в 1854 г., хотя и не опубликован им. Честь была оказана Вердеру на основании того не вполне уместного соображения, что он использовал предварительно напряженные стержни для конструкций Мюнхенского стеклянного дворца. Однако предварительно напряженные железные проволоки для висячих мостов использовались за много десятилетий до Вердера. Целью, конечно, было поднять предел упругости с помощью пластической деформации и тем самым уменьшить последующую пластическую деформацию [1].

Баушингер вдруг также заявил о некоем своем первенстве, ссылаясь на ранний эксперимент совершенно другого типа, описанный в 1886 г. в его известной работе по пределу упругости. 24 ноября 1874 г. он разорвал железный образец, получив предельное напряжение 3200 кгс/см$^2$. Он повторял опыты на частях начального образца, пока тот не оказался разорванным в общей сложности семь раз, и предельное напряжение возросло до 4400 кгс/см$^2$. Даже

если его опыт имел отношение к проблеме увеличения предела упругости, что составляло открытие Тарстона, то тот факт, что он датировался годом позже, должен был бы исключить всякую претензию на приоритет. В последующих статьях Баушингер делал различные заявления, касавшиеся происхождения одного из аспектов того, чему предстояло быть названным «эффектом Баушингера». В 1877 г. (Bauschinger [1877, 1]) он приписал его генералу Ухатиусу. В 1881 г. (Bauschinger [1881, 1]) он утверждал, что это явление было давно известно и недавно заново открыто Тарстоном и им. Далее, в той же статье, потратив 2000 слов и оставив без внимания вклад Тарстона, он отрицал всякий приоритет Тарстона и коммодора Бердсли в открытии. В своем классическом исследовании (Bauschinger [1886, 1]) он утверждал, что существование явления было известно давно, но что Ухатиус и он показали, что оно имеет место в общем случае во многих металлах. Во введении к статье 1886 г. он заявил, что в 1877 г. он независимо открыл влияние времени на возрастание предела упругости и что только впоследствии узнал, что фактически его открыл Бердсли. Теперь Тарстон вовсе не упоминался. Баушингер добавил замечание, что на самом деле первым был Вёлер в 1858 г. (Wöler [1858, 1], [1860, 1], [1870, 1]); проводя первые в экспериментальной механике опыты по усталости, Вёлер наблюдал изменение в значении предела выносливости, когда переменные напряжения превышали некоторый уровень. Интересно, что в английском переводе (Unwin [1886, 1]) труда Баушингера 1886 г., появившемся в Трудах института гражданских инженеров в виде сводки результатов, переводчик «W. C. U.» отмечал:

«Из этой чрезвычайно тщательной работы, содержащей данные экспериментальных исследований, может быть дана только сводка окончательных заключений. Исходя из того факта, что нагружение стержня за предел упругости поднимает этот предел при последующем нагружении,— факта, впервые наблюдавшегося Ухатиусом и автором,— автор (Баушингер) приступает к более тщательному исследованию этого явления» (Unwin [1886, 1], стр. 463).

«W. C. U.», несомненно, William Cawthorne Unwin, написавший в 1910 г. широко распространенный учебник «Испытание конструкционных материалов» «*The Testing of Materials of Construction*», в котором целая глава отводилась документированной и панегирической истории испытательных машин с самопишущими устройствами, начавшейся с изобретения Тарстона (гл. 10, стр. 239); в предыдущем разделе он описал различные аспекты эффекта Баушингера. Анвин все явление, включая приоритет в открытии, приписал одному Баушингеру (Unwin [1910, 1]). По иронии, диаграммы, которыми он иллюстрировал эффект Баушингера, были взяты из числа полученных на испытательной машине с самопишущим устройством Тарстона. Анвин и Джеймс Альфред Ивинг (Ewing [1899, 1]), написавший книгу по инженерной механике, были двумя основными источниками Лява по вопросам эксперимента при

рассмотрении им «технической» механики (Love [1927, 1]). Естественно поэтому, что Ляв, касаясь эффекта Баушингера, приписывал последнему как открытие, так и детальное изучение любопытных свойств пределов упругости и текучести. Пирсон (Todhunter, Pearson [1893, 1]) во втором томе истории, опубликованном в 1893 г.— год смерти Баушингера,— приписал открытие эффекта Баушингера Густаву Генриху Видеману (Wiedemann [1859, 1]). Опыты Видемана по кручению и изгибу в связи с магнетизмом железа определенно содержат начатки открытия. Это особенно видно из его изучения остаточных деформаций при кручении как функции от нагрузки обратного знака.

Последняя ссылка на открытие Тарстоном увеличения предела упругости, которую я смог обнаружить, содержится в обращении Менсфилда Мерримана (Merriman [1894, 1]) к Американской ассоциации содействия науке на 43-м заседании общества в 1894 г. Мерриман, который был вице-президентом общества, дал довольно беглый обзор работ по сопротивлению материалов при ударе от Томаса Юнга в 1807 г. и последующих работ Навье, Понселе, Ходкинсона, Вёлера и других. Он справедливо счел автором открытия роста предела упругости Тарстона (1873). Далее он сослался на наблюдение Баушингером в 1885 г. того экспериментального факта, что повышение предела упругости при растяжении сопровождается его уменьшением при сжатии.

Возможно я потратил слишком много времени, отвлеченный этими странными усилиями Баушингера установить незаслуженное первенство, тогда как он мог быть вполне удовлетворен выполнением одного из наиболее завершенных исследований важного явления в экспериментальной механике XIX века. Каждый аспект явления, которое он систематически и изящно исследовал, был в действительности открыт другими. Название этого явления «эффектом Тарстона — Бердсли — Ухатиуса и, возможно, Видемана — Вёлера», чего я, разумеется, не предлагаю, подкрепляло бы хорошо известный факт, что очень часто несколько разных исследователей открывают важное явление почти одновременно.

### 4.6. Эксперименты по определению пределов упругости, текучести и усталости, предшествовавшие опытам Гарстона и Баушингера: Тален (1864), Видеман (1859) и Вёлер (1858—1870)

Опыты Баушингера необычайно подробно описывались в его различных публикациях на протяжении тех 22 лет, которые он был директором Мюнхенской лаборатории. Они столь же привлекательны для изучения, сколь трудны для краткого обобщения. Я буду ссылаться в основном на его большую работу 1886 г., которая представляет его эксперименты между 1877 г. и этим годом.

Первой проблемой, исследованием которой занялся Баушингер, было определение предела упругости. Он соглашался со своими предшественниками Вертгеймом, Ходкинсоном и другими в том, что некоторая малая остаточная деформация сопровождает любые деформации в металлах. Подобно своим предшественникам он подчеркивал, что то обстоятельство, удается или не удается наблюдать эти малые остаточные деформации, зависит только от разрешающей способности используемой аппаратуры. Когда зеркальный экстензометр Баушингера, изобретенный между 1877 г. и 1879 г., был окончательно усовершенствован, он позволял ему измерять удлинения, равные 1/10 000 миллиметра. Это обеспечивало возможность измерения деформаций $\varepsilon$ с точностью до $7 \cdot 10^{-7}$ при использовавшейся Баушингером в испытаниях железа и стали измерительной базы длиной 15 см.

Как я отметил в разделе 2.18, это изобретение дало Баушингеру возможность выполнить также первые исчерпывающие исследования по сжатию. Предыдущие изучения влияния реверсивных нагрузок по необходимости выполнялись при испытаниях на кручение или изгиб, поскольку при сжатии длинных образцов, которые тогда использовались для получения необходимой разрешающей способности по деформациям, происходило выпучивание. Баушингер тщательно различал пределы упругости и текучести в отношении как терминологических определений, так и сущности наблюдаемых эффектов. Хотя он отождествлял предел упругости с пределом пропорциональности, это не было чисто произвольным выбором определения. Он отмечал, что при высокой разрешающей способности измерительного прибора можно замерить остаточную деформацию при нагрузках, вызывающих напряжение ниже предела пропорциональности. Однако эта малая пластическая деформация воспроизводилась при повторном нагружении того же образца. Превышение предела пропорциональности не только вело к возрастанию величины остаточной деформации, хотя она еще оставалась чрезвычайно малой, но и к ее изменению от опыта к опыту. Таким образом, по определению Баушингера предел упругости — это точка, ниже которой микропластичность была устойчивой. Он, далее, отметил, что выше этого предела упругости наблюдался эффект упругого последействия в течение некоторого промежутка времени, хотя ниже предела упругости образец мог оставаться под фиксированными нагрузками долгое время без какого бы то ни было поддающегося измерению увеличения деформации. Он использовал термин «предел текучести» для определения напряжения, соответствующего точке на диаграмме деформаций, начиная от которой происходят сравнительно большие пластические деформации. В современной терминологии понятие «предел упругости» обычно соответствует баушингеровскому пределу текучести. Это обстоятельство надо иметь в виду, сравнивая ссылки XIX и XX веков на «эффект Баушингера».

Прежде чем описывать многогранное исследование Баушингером двух «пределов» в пластичности металлов, уместно остановиться на состоянии экспериментальных знаний о пределах упругости и текучести непосредственно перед его опытами. Показательным в этом отношении является мемуар 1863 г. Роберта Талена (Thalen, опубликовано в [1865, 1]) — шведского экспериментатора, который дал обзор исследований трех предыдущих десятилетий. Тален использовал гидравлическую испытательную машину, на которой свои эксперименты, описанные выше, выполнил в 1829 г. Лагерхельм. Тален писал, что хотел разрешить противоречие между Ходкинсоном и Морэном [1]) относительно того, действительно ли происходит возрастание предела упругости после разгрузки от высокого уровня деформации. Он отметил, что различие в их мнениях проистекало просто из упущения Морэна, не сознававшего важности предыдущей механической истории. Холоднотянутые проволоки Морэна уже имели повышенный предел упругости до того, как он начал свои испытания, тогда как длинные прессованные стержни Ходкинсона находились, по существу, в отожженном состоянии.

Тален выполнил опыты на прокатанных железных и стальных стержнях круглого и квадратного поперечного сечения, имеющих длину, равную шести шведским футам [2]); используя пятифутовую базу и микроскоп, установленный на микрометрическом винте, и имея, таким образом, возможность измерять удлинения, равные 0,0005 мм, он изучал характер возрастания предела упругости после пластической деформации.

Тален оценил свою максимально возможную ошибку в 0,02 мм, что при базе 1484,5 мм обеспечивало точность измерения деформаций $\varepsilon$ порядка $10^{-5}$ при фактически более низкой разрешающей способности по деформациям. После обсуждения проблемы определения предела упругости как начала остаточных деформаций в условиях, когда наблюдение этого начала зависит от точности измерений, Тален последовал Вертгейму в произвольном задании значения (остаточной) деформации, соответствующей пределу упругости, равного 0,00005.

Он сначала отметил (кривая (*1*) его диаграммы, показанной на рис. 4.26), что предел упругости может быть увеличен посредством пластического деформирования. Это, конечно, было хорошо известно из опытов Герстнера сорокалетней давности. Быстрыми разгрузкой и последующим новым нагружением Тален показал, что график функции напряжение — деформация после достижения при повторном нагружении уровня, от которого была произведена разгрузка, продолжался, как если бы перерыва не было.

---

[1]) Напомним, что работы Ходкинсона проводились с 20-х по 50-е гг. XIX века (см. Hodgkinson [1824, 1] и др.); работа Морэна (Morin [1862, 1]) описана выше в разделе 2.16.

[2]) 1 шведский фут = 29,69 см.

Вертгейм уже обнаружил, что когда он нагревал образец, предел упругости падал на величину, равную от 1/11 до 1/3 его значения в закаленном состоянии. Проверка Таленом этого понижения предела упругости показана на рис. 4.26 кривой (*2*) при отжиге при 200°С и (*3*) при неотожженном образце. Он наблюдал, что когда стержень нагружался шестикратно после промежуточных разгру-

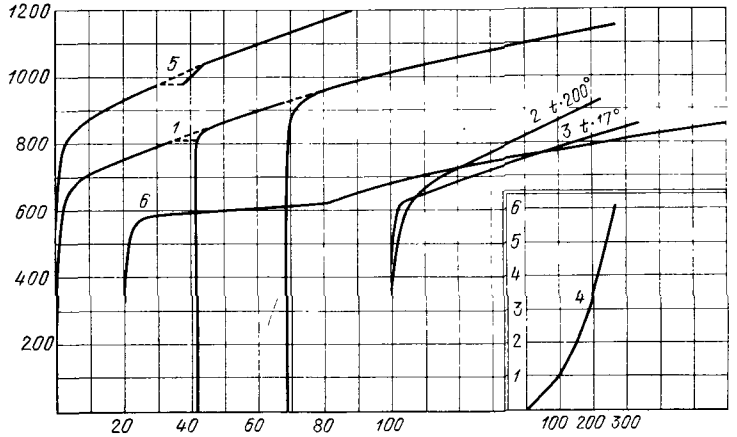



Рис. 4.26. Опыты Талена (1865). Исследование влияния повторного нагружения и отжига на пластическое деформирование стали. По оси ординат отложены напряжения (шведский фунт/(шведская десятичная линия)$^2$), по оси абсцисс — удлинение (одно деление равно 0,2 мм). На графике *4* показана величина остаточной деформации после каждого повторного нагружения (номера нагружений на оси ординат) до напряжений ниже их уровня при первом нагружении в пластической области работы материала.

зок от одного и того же уровня в области пластического деформирования, то после каждого нового нагружения до указанного уровня продолжало возникать приращение пластической деформации, которое постепенно уменьшалось по величине от одного повторного нагружения к другому. Это видно из кривой (*4*) рис. 4.26.

Наконец, Тален отметил, что «наблюдалось своеобразное явление, которое заслуживает более пристального внимания» (Thalen [1865, 1], стр. 202). Когда он последовательно нагружал стержень несколько раз до заданной нагрузки, то перед последующим нагружением до более высокого уровня напряжения наблюдалось постепенное возрастание остаточной деформации, показанное кривой (*5*) на рис. 4.26 при 10 таких циклах разгрузки и повторного нагружения до напряжения, равного 980 шведским фунтам на квадрат шведской десятичной линии. При этом возрастании напряжений касательная к кривой нагружения имела сначала большой наклон, который постепенно уменьшался, пока не достигал значения, соответствующего основной кривой. Это явление хорошо известно тем немногочисленным исследователям, которые сегодня используют статическое нагружение для изучения эффекта Сава-

ра — Массона (Портвена — Ле Шателье). Я полагаю, что демонстрация Таленом ступенчатости графика деформирования была первой отчетливой демонстрацией этого явления, хотя она содержалась в табулированных результатах уже у Массона в 1841 г. (Masson [1841, 1]).

Исследование Талена 1865 г., эксперименты Видемана (Wiedemann [1858, 1], [1859, 1]) 1858 и 1859 гг. с реверсированными кручением и изгибом и замечательные опыты Вёлера (Wöhler [1858, 1], [1860, 1], [1870, 1]), проводившиеся с 1858 г. по 1870 г. по усталости при изгибе, подобно работам Треска, стали серьезными исследованиями явлений, которые лишь слегка затрагивались ранее, и аккуратными отражениями того, что уже было известно о пределах упругости и текучести к 1873 г., когда Тарстон (Thurston [1873, 1], см. [1874, 1]) закрепил рычаг машины с автоматической записью диаграммы на 24 часа.

Видемана прежде всего интересовало расширение исследования зависимости магнетизма от деформации, которое Вертгейм проводил несколькими годами раньше на железе. В попытке показать соотношение между остаточными деформациями и магнетизмом — тема, которая двадцать пять лет спустя интенсивно разрабатывалась Гербертом Томлинсоном (Tomlinson [1883, 1]),— Видеман, попутно, не придавая этому значения, наблюдал явление, известное ныне как «эффект Баушингера». Поскольку главный его интерес состоял в изучении связи между магнетизмом и остаточной деформацией, он лишь вкратце прокомментировал поведение образцов при реверсированном воздействии нагрузки.

Опыты Видемана по изгибу, проведенные в 1859 г. (Wiedemann [1859, 1]), или его эксперименты с реверсированием нагрузки при кручении, выполненные в 1858 г. (Wiedemann [1858, 1]), могут быть названы предваряющими опыты Баушингера, проведенные 26 годами позже, в которых исследовалось поведение материала в тех же условиях. Рассмотрев в деталях большую часть из примерно 5000 опытов Баушингера (ибо я должен признаться в увлечении разбором массы надежных экспериментальных данных) и изучив работы генерал-майора Ухатиуса, коммодора Бердсли, профессора Тарстона и Вёлера, я пришел к убеждению, что Пирсон был прав, отдавая Видеману приоритет. Видеман из Базеля в своих экспериментах 1858—1859 гг. по кручению и изгибу открыл, хотя и вчерне, изменение, которое возникало в пределе упругости, когда образец, предварительно нагруженный так, что в нем возникали пластические деформации, разгружался, а затем нагружался усилиями противоположного знака. Если критерием первенства считать начало, а не завершение исследования, то следует называть «эффектом Видемана» или, быть может, эффектом «Видемана — Тарстона» явление, которое Баушингер,— возможно, с некоторыми недоразумениями, касающимися истинного происхождения явления,— исчерпывающе и великолепно исследовал в одном из наиболее пол-

ных анализов, проведенных в рамках одной публикации, во всей истории экспериментальной механики твердых тел.

Видеман охарактеризовал цели своих исследований, когда он писал:

«Серии наблюдений заставили меня верить, что изменения в форме тела, вызываемые механическими воздействиями, следуют закономерностям, очень похожим на те, которые описывают изменения, вызываемые силами, порождающими намагничивание магнитных металлов» (Wiedemann [1859, 1], стр. 161).

При кручении и изгибе он различал такие понятия, как текущее значение деформации и остаточное, наблюдаемое после снятия крутящего момента или нагрузки, и сопоставлял их со значениями, получаемыми после реверсированных нагружений. В данном случае я предоставляю читателю самостоятельно рассмотреть рассеянные по разным источникам экспериментальные результаты Видемана, но три из его заключений, относящиеся к 1859 г., имеют немалый интерес: 1) Когда произошла остаточная деформация при нагружении в одном направлении, требуется приложение напряжений противоположного знака, меньших по абсолютной величине, для полного снятия всех видимых остаточных деформаций. 2) Когда стержень подвергался последовательным нагружениям и после этого пребывал в покое в разгруженном состоянии в течение некоторого времени, то при новом нагружении имелась тенденция к возвращению, хотя и не полному, к поведению, наблюдавшемуся при первом нагружении. 3) Когда стержень встряхивался под нагрузкой, его способность испытывать деформацию возрастала, но если он встряхивался после удаления нагрузки, его остаточная деформация уменьшалась.

А. Вёлер был инженером, заслуживающим особого места в любой истории технологии XIX века. В век, который извлекал инженерный опыт из катастроф, он, несомненно, был одним из первых технологов, которые из наблюдавшихся историй нагружения пытались на основе разумной экспериментальной базы развить практические правила для анализа вероятности механического разрушения. Он был безусловно первым [1]) и, возможно, еще и сейчас остается наиболее выдающимся ученым в области изучения усталости металлов, которая уже более века при затратах многих миллионов долларов, количество которых невозможно подсчитать, является областью многочисленных загадок.

В 1847 г. Вёлер был назначен управляющим парка подвижного состава и локомотивного депо Нижнесилезской железной дороги во Франкфурте-на-Одере. Обеспокоенный поломками колесных

---

[1]) Я опускаю не имеющие значения опыты капитана Генри Джонса и капитана Галтона, которые нагружали и разгружали железные стержни около 500 000 раз, не получая никаких результатов, поддающихся интерпретации. Их данные включены в отчет комиссии по железу за 1849 г. (Jones, Galton [1849, 1]).

осей, он спроектировал опыт для определения того, сколько раз за милю пути приложенная нагрузка создавала максимальные изгибающие моменты из-за изменений в дорожном основании и других условий дороги. Записывающая система, которая оставляла следы царапины на цинке, вскрыла, что наибольшие напряжения достигались в среднем один раз за милю пути. Работа Вёлера впоследствии критиковалась за переоценку роли случайно повторяющихся больших напряжений и пренебрежение вкладом громадного числа циклов промежуточных, более низких по уровню напряжений.

Как бы то ни было, он изобрел устройство, ставшее известным как испытательная машина Вёлера [1]), для воспроизведения в лаборатории тех условий, которые он исследовал. Эксперименты его лаборатории представляют интерес и сейчас. Аппаратура, которая в различных вариантах стала стандартным оборудованием лабораторий механических испытаний с 70-х гг. XIX века до сегодняшнего дня, позволила Вёлеру изучить усталость технических металлов, интересовавших его, включая определение пределов выносливости для них в условиях наличия изменяющихся различным образом напряжений при заданном среднем их уровне.

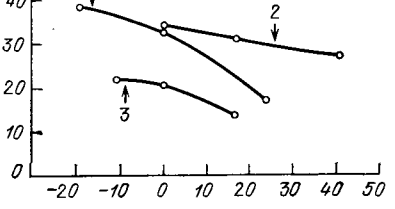



Рис. 4.27. Опыты Вёлера (1863). Кривая усталости стали в виде зависимости разности между крайними значениями переменных напряжений от минимального напряжения. Эти эксперименты Вёлера были первыми в области изучения явления усталости. Вдоль оси абсцисс отложено минимальное напряжение (кгс/мм²), вдоль оси ординат отложена максимальная разность переменных напряжений (кгс/мм²); *1* — литая сталь для осей (Крупп, *1862*), *2* — неупрочненная пружинная сталь, *3* — сталь для осей (компания Феникс, 1857).

В 80-х гг. XIX века было принято, представляя данные по усталости, рассматривать размах изменений напряжений как функцию от наименьшего, а не среднего напряжения. Так, результаты Вёлера 1863 г. для трех сталей, использовавшихся в осях железнодорожных колес, даны в виде, показанном на рис. 4.27.

Баушингер в своей попытке эмпирически формализовать практическое определение пределов усталости называл такие графики «параболами Гербера». Число циклов повторных нагружений, которого он достигал, используя машину Вёлера, составляло несколько миллионов. Наибольшее число циклов, зафиксированное им в 1886 г., равнялось шестнадцати миллионам.

В 1886 г. Баушингер (Bauschinger [1886, 1]) цитировал из

---

[1]) Машина для испытаний на усталость была также изобретена англичанином Фейрбейрном в 1864 г.

статьи Вёлера [1]) 1863 г. те аспекты работы последнего, в которых признавал первенство Вёлера, а именно, установление факта, что твердое тело при переменных напряжениях может быть разрушено нагрузками, меньшими квазистатического разрывающего усилия; что значение разности между максимальным и минимальным напряжениями имеет важное значение для оценки сопротивляемости материала усталости и что наиболее опасен симметричный цикл изменения напряжений. Баушингер пространно обсуждал данные Вёлера; он признавал, что Вёлер открыл «естественный предел упругости» для растяжения и сжатия, который ниже, чем первоначальный предел упругости, и достигается после ряда циклов изменения напряжений, в которых последние превышают первоначальный предел упругости в одном из направлений.

### 4.7. Эксперименты Баушингера по изучению пределов текучести и упругости (1875—1886)

Документация о лабораторном оборудовании, данных исследований и деталях экспериментов в лаборатории Баушингера необычайно полна. Баушингер нумеровал свои опыты последовательно. В трактате 1886 г. упоминается 3678 опытов, выполненных начиная с 1875 г. (номера опытов в этом году были от 938 до 1000) и кончая опытом 4615, датированным ноябрем 1885 г. В некоторые месяцы он проводил на одной машине до 150 испытаний, каждое из которых требовало сложной настройки оптического экстензометра — иногда несколько раз за один эксперимент. В 1886 г. Баушингер дал Кеннеди (Kennedy [1887, 1]) описание своего лабораторного оборудования для предстоявшего большого исследования, озаглавленное «Использование и оборудование инженерных лабораторий»: 1) 100-тонная испытательная машина Вердера, снабженная прибором с зеркальным экстензометром Баушингера (это было основное оборудование, на котором выполнено около 5000 опытов); 2) машина типа Вёлера для испытаний на усталость при растяжении; 3) машина типа Вёлера для циклического изгиба; 4) машина для изгиба пластин; 5) машина для испытаний материалов на износ; 6) приспособление для испытаний цемента на 100-тонной машине Вердера; 7) механические станки для изготовления образцов с приводом от двигателя Отто в две лошадиные силы.

Список заголовков отчетов лаборатории Баушингера, опубликованных между 1874 и 1895 гг., обнаруживает расширение интересов этого инженера-экспериментатора конца XIX века. С 1874 по 1885 гг. отчеты почти целиком посвящены прочностным свойствам стали, железа, камня, дерева, гипса и цемента. Исключением было

---

[1]) Данные Вёлера были представлены в CTR на Zoll $^2$, которые в кгс/мм$^2$ приведены на рис. 4.27. Один CTR/Zoll$^2$=6,84 кгс/см$^2$. Эти данные взяты из публикации Вёлера 1870 г. (Wöhler [1870, 1]).

экспериментальное изучение в 1879 г. малого упругого сжатия, происходившего при пластическом деформировании, описанное выше в разделе 2.18 настоящего труда. Как я упомянул, замечательный зеркальный экстензометр, который он разработал между 1877 и 1879 гг., обеспечил возможность этого исследования. В 1886 г. было описано грандиозное исследование пределов упругости и текучести. Следующие девять томов, до 1895 г., отражали интерес Баушингера к установлению мировых стандартов на испытания инженерных материалов. Он способствовал привлечению внимания международных конференций к этой теме. Тома фиксировали также его возвращение к изучению разрушения кожи, дерева, камня и металлов. Поздние тома содержат ссылки на временные эффекты при разрыве металлов и на ряд испытаний, предназначенных для изучения влияния формы образца на результаты испытания при растяжении и проведенных в связи с его интересом к единым стандартам. Таким образом, видно, что подобно Давиду Киркалди, Баушингер всю жизнь сохранял интерес к установлению нормативов для практических инженерных испытаний. Исключениями из этой отчетливо выраженной направленности были два его смелых предприятия в области физики деформаций, датированные 1879 и 1886 гг. Он иногда изучал много проблем одновременно, но в каждом частном отчете упоминал только одну из них, что явствует из нарушения последовательности в нумерации опытов в любом отдельном отчете или в его статьях.

Баушингер начал свою работу 1886 г. с описания экспериментов на бронзе при растяжении и сжатии: он выполнил их в 1875 г. на 100-тонной машине. В этих опытах он сначала отметил предел упругости при начальном нагружении. Затем он поднял нагрузку на 25% выше соответствующей этому пределу упругости, увеличив при этом пластическую деформацию. После немедленных разгрузки и нового нагружения образца он обнаружил, что хотя предел упругости был теперь выше, чем значение, обнаруженное вначале, но все же оказался немного ниже, чем предыдущее (до разгрузки) максимальное напряжение. Он выполнял свои опыты либо только при растяжении, либо только при сжатии. Поведение предела упругости в каждом из этих двух типов простого нагружения оказывалось подобным.

Двумя годами позже, 6 марта 1877 г., Баушингер провел тот же опыт с плоским стержнем из бельгийского цинка при растяжении. На третьем образце, для которого начальный предел упругости был 24 кгс/см$^2$, возрастающее напряжение поднималось до 98 кгс/см$^2$, он заметил, что при быстрой разгрузке и новом нагружении предел упругости остается таким же 98 кгс/см$^2$ при остаточной деформации, равной 0,000860. В этом случае, однако, он выждал 24 ч 48 мин и после этого обнаружил, что остаточная деформация уменьшилась до 0,000730; снова нагрузив образец, он нашел, что предел упругости теперь поднялся до 108 кгс/см$^2$. Он утверждал

(Bauschinger [1886, 1]), что в этом эксперименте он открыл влияние времени на увеличение предела упругости [1]).

Решающим экспериментом Баушингера являлся опыт № 1765, он и был датирован 6 марта 1877 г. Баушингер описал серию опытов, которые, по его словам, были задуманы для изучения недавно обнаруженного влияния на значение предела упругости продолжительности отрезка времени между разгрузкой и повторным нагружением или продолжительности сохранения неизменным уровня напряжения. Однако опыты, в которых это явление было обнаружено, имели № 1731 и 1739; он выполнил их на месяц раньше — 16, 17 и 20 февраля 1877 г. и зафиксировал такое же, по-видимому тогда не замеченное, поведение бессемеровской стали. Табл. 122 показывает измеренные значения нагрузки, удлинения и продолжительности воздействия нагрузки данного уровня, включая восемнадцатичасовой перерыв в воздействии нагрузки для одного из образцов из бессемеровской стали. На мой взгляд, вряд ли можно сомневаться в том, что Баушингер считал наиболее существенным наблюдением в его экспериментах влияние продолжительности воздействия нагрузки на предел упругости предварительно нагруженного стержня, т. е. деформационное старение. Его оценка находится в резком контрасте с распространенным суждением о том, что первостепенную важность имело снижение предела упругости при повторном нагружении, когда напряжение меняло свой знак по сравнению с напряжением при первом нагружении; именно это, как отмечалось, является тем, что стало именоваться «эффектом Баушингера».

Баушингер дал затем пространное и интересное обсуждение проблемы определения предела упругости. Как я заметил выше, он заключил, что *различие в стабильности* малых остаточных деформаций по разные стороны от предела пропорциональности более предпочтительно для определения предела упругости, чем определение, избранное Вертгеймом, как напряжения, соответствующего точке, которая отвечает остаточной деформации с произвольно назначенным фиксированным значением. Баушингер отметил, что принятое им определение исключает возможность применения его к ряду твердых веществ, таких, как чугун или камни, испытываемых при сжатии, для которых не могло быть найдено никакого предела упругости в этом смысле.

После этого он выполнил серию опытов с последовательными разгрузками и нагружениями за пределом упругости, обнаруживавшимся при первом нагружении, и установил, что даже для большого числа циклов новое, более высокое значение предела упругости оставалось неизменным.

[1]) Именно в связи с этим Баушингер объявил, что он с опозданием узнал, что Бердсли и Вёлер сделали подобные наблюдения соответственно в 1874 и 1863 гг., что означало любопытный просмотр ученого, который сам печатал статьи в *Dinglerische Politechnisches Zeitschrift*.

Таблица 122

**Результаты испытания на растяжение круглого стержня из бессемеровской стали (Баушингер, 1886; лабораторный номер 939*f*; диаметр стержня 2,52 см, база измерения деформации 15 см)**

| Уровень нагрузки (тс) | Продолжительность выдержки нагрузки данного уровня (мин) | Удлинение (мм) | Разность между удлинениями в конце промежутков нагружения соседними уровнями нагрузки (мм) | Уровень нагрузки (тс) | Продолжительность выдержки нагрузки данного уровня (мин) | Удлинение (мм) | Разность между удлинениями в конце промежутков нагружения соседними уровнями нагрузки (мм) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 1 | 0,195 | — | 20 | 1 | 2,650 | 0,520 |
| | 2 | 0,195 | — | | 7 | 2,850 | — |
| 14 | 1 | 0,210 | 0,015 | 21 | 1 | 3,180 | 0,505 |
| | 2 | 0,210 | — | | 5 | 3,355 | — |
| 15 | 1 | 0,725 | 0,610 | 22 | 1 | 3,840 | 0,610 |
| | 5 | 0,820 | — | | 6 | 3,965 | — |
| 16 | 1 | 1,085 | 0,340 | 23 | 1 | 4,445 | 0,635 |
| | 5 | 1,160 | — | | 8 | 4,600 | — |
| 17 | 1 | 1,420 | 0,350 | 0 | 1 | 4,165 | — |
| | 5 | 1,510 | — | | 9 | 4,165 | — |
| 0 | — | 1,235 | — | 23 | 1 | 4,700 | — |
| | 18 ч ненагруженного состояния | | | | 4 | 4,730 | — |
| | | | | 24 | 1 | 5,155 | 0,730 |
| | | | | | 9 | 5,460 | — |
| 0 | — | 1,235 | — | 25 | 1 | 6,020 | 0,885 |
| 17 | 1 | 1,530 | — | | 10 | 6,345 | — |
| | 2 | 1,530 | — | 0 | 1 | 5,870 | — |
| 18 | 1 | 1,550 | 0,020 | | 3 | 5,870 | — |
| | 2 | 1,550 | — | 25 | 1 | 6,380 | — |
| 19 | 1 | 1,835 | 0,780 | | 4 | 6,420 | — |
| | 9 | 2,330 | — | 0 | — | 5,830 | — |

Разрушение произошло при нагрузке 26,5 тс, соответствующей напряжению 5300 кгс/см², действовавшей в течение нескольких минут (опыт под номером 1731, проведенный 16—17 февраля 1877 г.)

Баушингер затем обратил свое внимание на предел текучести литого железа, пудлингового железа и мягкой стали, в которых большое резкое изменение деформации приводило к тому, что показания экстензометра выходили за шкалу. Это резкое течение, которое происходило как при растяжении, так и при сжатии, неизменно сопровождалось значительным упругим последействием, длившимся иногда несколько суток. Он отметил, что это вносит некоторую неточность в определение предела текучести.

Два наблюдения Баушингера относились к определению предела текучести. Первое состояло в следующем. При быстрой разгрузке и новом нагружении, проводившимися немедленно после

возникновения течения, новое течение после повторного нагружения наблюдалось при том же напряжении, которое было перед разгрузкой, но если перед повторным нагружением проходили сутки, то новое течение при повторном нагружении не возникало при более высоком уровне напряжения, сохранявшемся месяцы, «возможно годы». Второе наблюдение состояло в том, что в процессе немедленного нового нагружения, следующего за течением, предел упругости снижался до значения, гораздо более низкого, чем первоначальный предел упругости, а иногда до нуля — замечательное и все еще мало изученное свойство материала. Предел упругости восстанавливался через несколько дней и постепенно возрастал, пока не достигал значения напряжения, при котором начиналось течение, значительно превышавшего первоначальный, предшествовавший течению предел упругости. Баушингер выразил свою уверенность в том, что с течением достаточно большого промежутка времени новое значение предела упругости превзойдет первоначальное значение.

В качестве иллюстрации такого поведения я выбрал из обширного массива данных Баушингера его таблицу (здесь табл. 123), представляющую три испытания на растяжение образца из пудлингового железа: начальное нагружение, повторение через 7 мин и через 62 ч (Bauschinger [1886, 1]).

Одной линией подчеркнуты наблюдавшиеся значения предела упругости, двумя и тремя — наиболее отчетливые значения предела текучести. Можно видеть, что при повторном нагружении через 7 мин предел упругости исчез, а предел текучести увеличился совсем немного. При третьем нагружении, после временного интервала в 62 ч, предел упругости появился вновь и возрос до значения, полученного при первом нагружении, а предел текучести заметно возрос по сравнению с начальным значением. В статье Баушингера приведены табулированные данные, показывающие, что аналогичное поведение наблюдалось и при сжатии.

Баушингер отметил, что в общем случае в металлах нет резкого предела текучести, свойственного железу и мягкой стали. Он распространил свои опыты на цинк, бронзу, медь и томпак, производя их до точки на диаграмме $\sigma$—$\varepsilon$, которой соответствовало значительное течение, чтобы выяснить, вызовет ли последующее (после разгрузки) нагружение уменьшение предела упругости. Ни в одном из этих металлов он такого снижения не наблюдал, даже когда до разгрузки и повторного нагружения имело место «значительное течение». Для меди и томпака в опытах отмечалось увеличение предела упругости, которое спустя два или три дня возрастало, приводя к превышению им предыдущего (до разгрузки) уровня предела текучести.

В своем систематическом исследовании Баушингер поднял далее вопрос экспериментального характера о том, каково влияние — если оно есть вообще — промежуточной механической и термической

Таблица 123

**Результаты испытания на растяжение стержня из кованого железа (Баушингер, 1886; лабораторный номер 938)**

| Начальное состояние<br>Круговая шкала<br>Диаметр поперечного сечения = 2,50 см<br>Начальная длина = 15,00 см | | | | 7 мин после окончания предыдущего испытания<br>Круговая шкала<br>Диаметр поперечного сечения = 2,50 см<br>Начальная длина = 15,10 см | | | | 62 ч после окончания последнего испытания<br>Круговая шкала<br>Диаметр поперечного сечения = 2,495 см<br>Начальная длина = 15,13 см | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Нагрузка (тс) | Удлинение (0,001 см) | Разность | Время | Нагрузка (тс) | Удлинение (0,001 см) | Разность | Время | Нагрузка (тс) | Удлинение (0,001 см) | Разность | Время |
| 0 | 0 | | | 0 | 0 | | 4 ч 56 мин | 0 | 0 | | |
| | | *143* | | | | *149* | | | | *150* | |
| 1 | 1,43 | | | 1 | 1,49 | | 4 ч 57 мин | 1 | 1,50 | | |
| | | *146* | | | | *150* | | | | *150* | |
| 2 | 2,89 | | | 2 | 2,99 | | 4 ч 58 мин | 2 | 3,00 | | |
| | | *143* | | | | *153* | | | | *151* | |
| 3 | 4,32 | | | 3 | 4,52 | | 4 ч 59 мин | 3 | 4,51 | | |
| | | *143* | | | | *155* | | | | *151* | |
| 4 | 5,75 | | | 4 | 6,07 | | 5 ч 0 мин | 4 | 6,02 | | |
| 0 | 0,05 | | | 0 | 0,05 | | 5 ч 1 мин | 0 | 0,02 | | |
| 4 | 5,73 | | | 4 | 6,07 | | 5 ч 2 мин | 4 | 6,01 | | |
| | | *143* | | | | *156* | | | | *154* | |
| 5 | 7,16 | | | 5 | 7,63 | | 5 ч 3 мин | 5 | 7,55 | | |
| | | *145* | | | | *157* | | | | *151* | |
| 6 | 8,61 | | | 6 | 9,20 | | 5 ч 4 мин | 6 | 9,06 | | |
| | | *145* | | | | *164* | | | | *154* | |
| 7 | 10,06 | | | 7 | 10,84 | | 5 ч 5 мин | 7 | 10,60 | | |
| | | *142* | | | | *167* | | | | *151* | |
| 8 | 11,48 | | | 8 | 12,51 | | 5 ч 6 мин | 8 | 12,11 | | |
| 0 | 0,02 | | | 0 | 0,15 | | 5 ч 7 мин | 0 | 0,04 | | |
| 8 | 11,48 | | | 8 | 12,51 | | 5 ч 8 мин | 8 | 12,11 | | |
| | | *69* | | | | *82* | | | | *77* | |
| 8,5 | 12,17 | | | 8,5 | 13,33 | | 5 ч 9 мин | 8,5 | 12,88 | | |
| | | *73* | | | | *89* | | | | *75* | |

Таблица 123 *(продолжение)*

| Начальное состояние<br>Круговая шкала<br>Диаметр поперечного сечения=2,50 см<br>Начальная длина=15,00 см | | | | 7 мин после окончания предыдущего испытания<br>Круговая шкала<br>Диаметр поперечного сечения=2,50 см<br>Начальная длина=15,10 см | | | | 62 ч после окончания последнего испытания<br>Круговая шкала<br>Диаметр поперечного сечения=2,495 см<br>Начальная длина=15,13 см | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Нагрузка (тс) | Удлинение (0,001 см) | Разность | Время | Нагрузка (тс) | Удлинение (0,001 см) | Разность | Время | Нагрузка (тс) | Удлинение (0,001 см) | Разность | Время |
| 9 | 12,90 | | | 9 | 14,22 | | 5 ч 10 мин | 9 | 13,63 | | |
| | | *77* | | | | *88* | | | | *78* | |
| 9,5 | 13,67 | | | 9,5 | 15,10 | | 5 ч 11 мин | 9,5 | 14,41 | | |
| | | *92* | | | | *103* | | | | *78* | |
| 10 | 14,59 | | | 10 | 16,13 | | 5 ч 12 мин | 10 | 15,91 | | |
| 0 | 0,13 | | | 0 | 0,45 | | 5 ч 13 мин | 0 | 0,06 | | |
| 10 | 14,72 | | | 10 | 16,28 | | 5 ч 14 мин | 10 | 15,17 | | |
| | | *25* | | | | | | | | *79* | |
| 10,1 | 14,97 | | | 10,5 | 17,50 | | 5 ч 15 мин | 10,5 | 15,96 | | |
| | | *20* | | | | *56* | | | | *79* | |
| 10,2 | 15,17 | | | 10,6 | 18,06 | | 5 ч 16 мин | 11 | 16,75 | | |
| | | *19* | | | | *85* | | | | *82* | |
| 10,3 | 15,36 | | 4 ч 19 мин | 10,7 | 18,91 | | 5 ч 19 мин | 11,5 | 17,57 | | |
| | | *24* | | | | *88* | | | | *102* | |
| 10,4 | 15,60 | | 4 ч 22 мин | 10,8 | 19,79 | | 5 ч 22 мин | 12 | 18,58 | | |
| | | *20* | | | | *107* | | | | | |
| 10,5 | 15,80 | | 4 ч 25 мин | 10,9 | 20,86 | | 5 ч 25 мин | 0 | 0,32 | | |
| | | *35* | | | | *161* | | | | | |
| 10,6 | 16,15 | | 4 ч 28 мин | 11,0 | 22,47 | | 5 ч 28 мин | 12 | 18,69 | | 4 ч 39 мин |
| | | *95* | | | | | | | | *114* | |

Таблица 123 *(продолжение)*

| Начальное состояние<br>Круговая шкала<br>Диаметр поперечного сечения=2,50 см<br>Начальная длина=15,00 см | | | | 7 мин после окончания предыдущего испытания<br>Круговая шкала<br>Диаметр поперечного сечения=2,50 см<br>Начальная длина=15,10 см | | | | 62 ч после окончания последнего испытания<br>Круговая шкала<br>Диаметр поперечного сечения=2,495 см<br>Начальная длина=15,13 см | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Нагрузка (тс) | Удлинение (0,001 см) | Разность | Время | Нагрузка (тс) | Удлинение (0,001 см) | Разность | Время | Нагрузка (тс) | Удлинение (0,001 см) | Разность | Время |
| 10,7 | 17,10 | | 4 ч 31 мин | 11,1 | Отсчет невозможен из-за очень быстрого деформирования | *775* | 5 ч 31 мин | 12,1 | 19,83 | *227* | 4 ч 42 мин |
| 10,8 | Отсчет невозможен из-за очень быстрого деформирования | *9789* | 4 ч 34 мин | | | | | 12,2 | 22,10 | *200* | 4 ч 45 мин |
| | | | | | | | | 12,3 | 24,10 | *168* | 4 ч 48 мин |
| | | | | | | | | 12,4 | 25,78 | *195* | 4 ч 51 мин |
| | | | | | | | | | | *340* | |
| | | | | 11,1 | 30,22 | *824* | 5 ч 34 мин | 12,5 | 27,73 | *11 145* | 4 ч 54 мин |
| 10,8 | 114,99 | | 4 ч 49 мин | 11,2 | 38,46 | *1620* | 5 ч 40 мин | 12,6 | 31,13 | | 4 ч 57 мин |
| 0 | 97,30 | | | 11,3 | 54,66 | | 5 ч 52 мин | 12,7 | | | 9 ч 0 мин |
| | | | | 0 | 35,91 | | 5 ч 54 мин | 12,7 | 142,58 | | 9 ч 15 мин |
| | | | | 0 | 35,83 | | 5 ч 57 мин | 0 | 120,65 | | 9 ч 15¼ мин |
| | | | | 0 | 35,67 | | после 15 ч | 0 | 120,53 | | 9 ч 16 мин |
| | | | | | | | | 0 | 120,47 | | 9 ч 17 мин |
| | | | | | | | | 0 | 120,44 | | 9 ч 18 мин |
| | | | | | | | | 0 | 120,42 | | 9 ч 19 мин |
| | | | | | | | | 0 | 120,41 | | 9 ч 20 мин |
| | | | | | | | | 0 | 120,37 | | 9 ч 25 мин |
| | | | | | | | | 0 | 120,32 | | 9 ч 30 мин |
| Опыт 3202: 24 марта 1880 г. | | | | Опыт 3202: 24 марта 1880 г. | | | | Опыт 3202: 27 марта 1880 г. | | | |

истории на эти новые значения пределов упругости и текучести. Сильные вибрации, подобные тем, которые происходят при холодной ковке, вновь снижали предел упругости, который до этого повышался из-за предыдущей пластической деформации. Такое воздействие также немного уменьшало возрастание предела текучести, хотя оно все же наблюдалось и значение этого предела было выше первоначального. Отжиг при 350° С сказывался только на чистом железе. На пудлинговое железо и сталь некоторое влияние оказывало лишь быстрое охлаждение от температур между 350 и 450°С. В общем случае быстрое охлаждение снижало предел упругости сильнее, чем медленное охлаждение. Только в технически чистом железе при температуре ниже 450°С медленное охлаждение могло снизить первоначальное значение. Баушингер дал табулированные результаты влияния различных предварительных термических историй на исходные пределы упругости и текучести и на их уровни после нагружения и разгрузки. В данном контексте эти данные в основном интересны в том отношении, что подчеркивают общее значение и важность предыдущей термической обработки на последующую деформируемость.

В разделе 5 Баушингер начал обсуждение того, что современные металлурги и специалисты по физике континуума называют «эффектом Баушингера». Поскольку к 1879 г. он усовершенствовал зеркальный экстензометр, он впервые смог достичь сравнимой разрешающей способности при сжатии и растяжении. Теперь он мог изучать пределы упругости — в принятом им смысле этого понятия — при обоих знаках напряжений. Когда напряжения превышали предел текучести при растяжении или при сжатии, предел упругости при последующем возбуждении напряжений противоположного знака существенно снижался или временно исчезал. Когда напряжение превышало предел упругости, но не достигало предела текучести, то при последующем возбуждении напряжений противоположного знака предел упругости неизменно уменьшался. Чем больше первоначальное напряжение, превосходившее начальный предел упругости, превышало это последнее значение, тем большим было уменьшение предела упругости при возбуждении напряжений противоположного знака. Когда напряжение превосходило предел упругости в обратном направлении, предел упругости в первоначальном направлении также снижался. Циклическое изменение знака напряжений и доведение их значений до уровней, превышающих эти пределы при растяжении и сжатии, приводило в конце концов к пределу упругости, который имел меньшее (чем исходное) значение, названное Баушингером «естественным пределом упругости».

Образцы для этих переменных нагружений изготавливались такого вида, какой показан на рис. 4.28. Растяжение прикладывалось с помощью щек, которые прижимались к цилиндрическим выточкам на пятиугольных гранях в концевых частях образца. Плос-

кие торцевые поверхности образца позволяли прикладывать к нему сжимающие нагрузки. Баушингер отмечал, что против его ожидания ему не потребовалось использовать просверленные в образце отверстия при испытаниях на растяжение.

Первый эксперимент в этой серии по растяжению — сжатию ковкого чугуна должен рассматриваться как знаменательное событие в экспериментальной механике кристаллических тел. Несомненно, что 26 годами раньше Видеман открыл, хотя и в несовершенных условиях, влияние знакопеременности усилий на предел упругости, а Тарстон 11 годами раньше — влияние времени на увеличение предела упругости. Видеман, как отмечалось выше, использовал несовершенное определение предела упругости и проводил неточные замеры, касавшиеся появления пластических деформаций в условиях изменения направления усилий при изгибе и кручении. Только Баушингер выполнил первое количественное исследование в своем эксперименте 1885 г., результаты которого приведены в табл. 124.

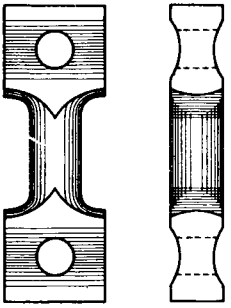


Рис. 4.28. Образец для испытаний на растяжение — сжатие, использованный Баушингером при изучении влияния на предел упругости и предел текучести реверсивного нагружения.

Последовательность циклов нагружения может быть прослежена по табл. 124. Первые две серии состояли в пяти нагружениях образца растягивающими усилиями через интервалы, указанные в заголовках столбцов. Проведя опыты при растяжении, после того, как предел упругости установился на значении 2091 кгс/см² и нагрузка превысила уровень, соответствующий ему, вызвав напряжение 2214 кгс/см², Баушингер выполнил испытание на сжатие (столбец 3), которое показало снижение предела упругости примерно до трети первоначального значения, т. е. до 738 кгс/см². При сжатии, когда напряжение достигало 2214 кгс/см², предел упругости поднялся до 1476 кгс/см² через 5 мин и до 1968 кгс/см² спустя 20 ч. Когда было превышено это последнее значение, которое оставалось все же ниже первоначального предела упругости, Баушингер обнаружил в последующем испытании на растяжение этого образца, что предел упругости в образце исчез. Сорок шесть минут спустя тот же образец был испытан снова на сжатие. В нем не было обнаружено никаких изменений в пределе упругости, равнявшемся 1968 кгс/см² — наибольшему значению, наблюдавшемуся в предыдущем испытании на сжатие, которое предшествовало растягивающему воздействию. Ни в одном из этих опытов Баушингера напряжения не превышали предела текучести.

Статья Баушингера содержала большое число таблиц, подобных табл. 124, в которых отражались истории нагружений. Его эксперименты обнаружили, что понижение предела упругости, вызванное изменением знака напряжений, сохранялось несколько не-

Таблица 124

**Результаты эксперимента Баушингера (1885)**

| Нагрузка (тс) | Начальное состояние, растяжение; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | | Через 6 дней, растяжение; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | | Через 51 мин, сжатие; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | | Через 5 мин, сжатие; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | | Через 20 ч, сжатие; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | | Через 1 ч, растяжение; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) |
| 0 | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | |
| | | | *66* | | | | *63* | | | | *69* | | | | *60* | | | | *63* | | | | *72* | |
| 4 | 246 | 0,66 | | | 246 | 0,63 | | | 246 | 0,69 | | | 246 | 0,60 | | | 246 | 0,63 | | | 246 | 0,12 | | |
| | | | *68* | | | | *68* | | | | *67* | | | | *66* | | | | *66* | | | | *83* | |
| 8 | 492 | 1,34 | | | 492 | 1,31 | | | 492 | 1,36 | | | 492 | 1,26 | | | 492 | 1,29 | | | 492 | 1,55 | | |
| | | | *68* | | | | *64* | | | | *68* | | | | *64* | | | | *64* | | | | *86* | |
| 12 | 738 | 2,02 | | | 738 | 1,95 | | | 738 | 2,04 | | | 738 | 1,90 | | | 738 | 1,93 | | | 738 | 2,41 | | |
| | | | *68* | | | | *67* | | | | *72* | | | | *68* | | | | *66* | | | | *93* | |
| 16 | 984 | 2,70 | | | 984 | 2,62 | | | 984 | 2,76 | | | 984 | 2,58 | | | 984 | 2,59 | | | 984 | 3,34 | | |
| 0 | 0 | 0,07 | | | 0 | 0,02 | | | 0 | 0,18 | | | 0 | 0,02 | | | 0 | 0,02 | | | 0 | 0,76 | | |
| 16 | 984 | 2,72 | | | 984 | 2,63 | | | 984 | 2,79 | | | 984 | 2,55 | | | 984 | 2,57 | | | 984 | 3,37 | | |
| | | | *67* | | | | *65* | | | | *72* | | | | *68* | | | | *67* | | | | *100* | |
| 20 | 1230 | 3,39 | | | 1230 | 3,28 | | | 1230 | 3,51 | | | 1230 | 3,23 | | | 1230 | 3,24 | | | 1230 | 4,37 | | |
| | | | *65* | | | | *64* | | | | *73* | | | | *64* | | | | *66* | | | | *111* | |
| 24 | 1476 | 4,01 | | | 1476 | 3,92 | | | 1476 | 4,24 | | | 1476 | 3,87 | | | 1476 | 3,90 | | | 1476 | 5,48 | | |
| | | | *70* | | | | *66* | | | | *83* | | | | *70* | | | | *67* | | | | *119* | |
| 28 | 1722 | 4,74 | | | 1722 | 4,58 | | | 1722 | 5,07 | | | 1722 | 4,57 | | | 1722 | 4,57 | | | 1722 | 6,67 | | |
| | | | *68* | | | | *66* | | | | *109* | | | | *70* | | | | *68* | | | | *132* | |
| 32 | 1968 | 5,42 | | | 1968 | 5,24 | | | 1968 | 6,16 | | | 1968 | 5,27 | | | 1968 | 5,25 | | | 1968 | 7,99 | | |
| 0 | 0 | 0,16 | | | 0 | 0,01 | | | 0 | 0,94 | | | 0 | 0,02 | | | 0 | 0,05 | | | 0 | 2,88 | | |
| 32 | 1968 | 5,46 | | | 1968 | 5,22 | | | 1968 | 6,31 | | | 1968 | 5,29 | | | 1968 | 5,28 | | | 1968 | 8,12 | | |
| | | | *34* | | | | *93* | | | | *245* | | | | *273* | | | | *97* | | | | *147* | |
| 34 | 2091 | 5,80 | | | 2091 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 36 | | | | | 2214 | 6,15 | | | 2214 | 8,76 | | | 2214 | 8,02 | | | 2214 | 6,25 | | | 2214 | 9,59 | | |
| 40 | | | | | 0 | 0,41 | | | 0 | 2,90 | | | 0 | 1,15 | | | 0 | 0,28 | | | 0 | 3,71 | | |
| 0 | | | | | | | | | | | | | 0 | 1,06 | | | | | | | | | | |
| | Опыт 4387 6 октября 1885 г. | | | 2 160 000 | Опыт 4404 12 октября 1885 г. | | | 2 260 000 | Опыт 4404 12 октября 1885 г. | | | 2 170 000 | Опыт 4404 12 октября 1885 г. | | | 2 290 000 | Опыт 4404 13 октября 1885 г. | | | 2 260 000 | Опыт 4404 13 октября 1885 г. | | | |

| Через 46 мин, сжатие; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | | Через 30,5 ч, сжатие; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | | Через 15,5 ч, растяжение; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | Через 2 ч, растяжение; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | Через 9 мин *), растяжение; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | Через 27 ч, сжатие; $d=4{,}55$ см, $l=6{,}00$ см | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Нагрузка (тс) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Нагрузка (тонны) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) |
| 0 | 0 | 0 | | | 0 | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | |
| | | | *77* | | | | | *66* | | | | *82* | | | | *69* | | | | *68* | |
| 4 | 246 | 0,77 | | | 4 | 246 | 0,66 | | | 246 | 0,82 | | | 246 | 0,69 | | | 246 | 0,68 | | |
| | | | *88* | | | | | *65* | | | | *97* | | | | *64* | | | | *71* | |
| 8 | 492 | 1,65 | | | 8 | 492 | 1,31 | | | 492 | 1,79 | | | 492 | 1,33 | | | 492 | 1,39 | | |
| | | | *97* | | | | | *65* | | | | *114* | | | | *67* | | | | *75* | |
| 12 | 738 | 2,62 | | | 12 | 738 | 1,96 | | | 738 | 2,93 | | | 738 | 2,00 | | | 738 | 2,14 | | |
| | | | *101* | | | | | *66* | | | | *140* | | | | *76* | | | | *76* | |
| 16 | 984 | 3,63 | | | 16 | 984 | 2,62 | | | 984 | 4,33 | | | 984 | 2,76 | | | 984 | 2,90 | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | *66* | | | | *40* | |
| 20 | 0 | 0,99 | | | 18 | 0 | 0,00 | | | 0 | 1,70 | | | 1107 | 3,42 | | | 1107 | 2,98 | | |
| 16 | 984 | 3,69 | *102* | | 0 | | | | 2 250 000 | | | | | 0 | 0,48 | | 2 210 000 | 0 | 0,06 | | 2 260 000 | 0 | 0,31 | | |
| 20 | 1230 | 4,71 | | | 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1107 | 3,31 | | |
| | | | *111* | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | *47* | |
| 24 | 1476 | 5,82 | | | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1230 | 3,78 | | |
| | | | *130* | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | *95* | |
| 28 | 1722 | 7,12 | | | 24 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1476 | 4,73 | | |
| | | | *191* | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | *110* | |
| 32 | 1968 | 9,03 | | | 28 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1722 | 5,83 | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | *135* | |
| 0 | 0 | 3,68 | | | 32 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1968 | 7,18 | | |
| 32 | 1968 | 9,36 | | | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | 1,79 | | |
| 36 | 2214 | Выход показания эксперимента за пределы шкалы (предел текучести) | | | 32 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1968 | 7,33 | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | *307* | |
| | | | | | 36 | | | | | | | | | | | | | | | | | 2214 | 10,40 | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | *147 5* | |
| | | | | | 40 | | | | | | | | | | | | | | | | | 2460 | 25,15 | | |
| | | | | | 43 | | | | | | | | | | | | | | | | | 2644 | | | |
| Опыт 4404 13 октября 1885 г. | | | | | Опыт 4406 14 октября 1885 г. | | | | | Опыт 4406 15 октября 1885 г. | | | | Опыт 4406 15 октября 1885 г. | | | | Опыт 4406 15 октября 1885 г. | | | | Опыт 4406 16 октября 1885 г. | | | |

*) После четырехкратного изменения нагрузки от 0 до 18 т и увеличения удлинения: общего до 3,65; остаточного до 0,72/1000 см.

Таблица 124 (*продолжение*)

| Нагрузка (тс) | Через 30 мин, сжатие; $d$=4,58 см, $l$=5,93 см | | | | Через 3 дня, сжатие; $d$=4,58 см, $l$=5,93 см | | | | Через 2 дня, сжатие; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | | Через 2 дня, растяжение; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | | Через 5 ч, сжатие; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | | На следующий день, растяжение; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) |
| 0 | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | |
| | | | *69* | | | | *74* | | | | *66* | | | | *64* | | | | *62* | | | | *65* | |
| 4 | 243 | 0,69 | | | 243 | 0,74 | | | 243 | 0,66 | | | 243 | 0,64 | | | 243 | 0,62 | | | 243 | 0,65 | | |
| | | | *68* | | | | *108* | | | | *66* | | | | *65* | | | | *63* | | | | *67* | |
| 8 | 486 | 1,37 | | | 486 | 1,82 | | | 486 | 1,32 | | | 486 | 1,29 | | | 486 | 1,25 | | | 486 | 1,32 | | |
| | | | *68* | | | | *127* | | | | *66* | | | | *63* | | | | *63* | | | | *64* | |
| 12 | 729 | 2,05 | | | 729 | 3,09 | | | 729 | 1,98 | | | 729 | 1,92 | | | 729 | 1,88 | | | 729 | 1,96 | | |
| | | | *65* | | | | *165* | | | | *83* | | | | *65* | | | | *62* | | | | *67* | |
| 16 | 971 | 2,70 | | | 971 | 4,74 | | | 971 | 2,81 | | | 971 | 2,57 | | | 971 | 2,50 | | | 971 | 2,63 | | |
| 0 | 0 | 0,00 | | | 0 | 2,11 | | | 0 | 0,15 | | | 0 | 0,02 | | | 0 | 0,00 | | | 0 | 0,03 | | |
| 16 | 971 | 2,70 | | | 971 | 5,01 | | | | | | | | | | | 971 | 2,50 | | | 971 | 2,65 | | |
| | | | *70* | | | | *213* | | | | | | | | | | | | *34* | | | | *34* | |
| 20 | 1214 | 3,40 | | | 1214 | 7,14 | | | | | | | | | | | 1092 | 2,84 | | | 1092 | 2,99 | | |
| | | | *70* | | | | *293* | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | 1475 | 4,10 | | | 1457 | 10,07 | | | | | | | | | | | 0 | 0,00 | | | 0 | 0,13 | | |
| | | | *70* | | | | *324* | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 28 | 1700 | 4,80 | | | 1700 | 13,31 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | *69* | | | | *669* | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 32 | 1943 | 5,49 | | | 1943 | 20,00 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0,09 | | | 0 | 14,61 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 32 | 1943 | 5,52 | | | 1943 | 20,62 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | *86* | | | | *763* | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 36 | 2186 | 6,38 | | | 2186 | 28,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | *164* | | | | *1400* | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | 2 100 000 | | | | 2 190 000 | | | | | | | | 2 250 000 | | | | 2 310 000 | | | | 2 200 000 |

Таблица 124 (*продолжение*)

| Нагрузка (тс) | Через 30 мин, сжатие; $d$=4,58 см, $l$=5,93 см | | | | Через 3 дня, сжатие; $d$=4,58 см, $l$=5,93 см | | | | Через 2 дня, сжатие; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | | Через 2 дня, растяжение; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | | Через 5 ч, сжатие; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | | На следующий день, растяжение; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) |
| 40 | 2429 | 8,02 | *188* | | 2429 | 42,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 42 | 2550 | 9,90 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 44 | 2671 | Выход показания эксперимента за пределы шкалы (предел текучестн) | | | 2671 | Выход показания эксперимента за пределы шкалы наступнл при нагрузке, не достнгшей 44 т | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Опыт 4406 16 октября 1885 г. | | | | Опыт 4423 19 октября 1885 г. | | | | Опыт 4444 21 октября 1885 г. | | | | Опыт 4457 23 октября 1885 г. | | | | Опыт 4462 23 октября 1885 г. | | | | Опыт 4468 23 октября 1885 г. | | | |

Таблица 124 (*продолжение*)

| Нагрузка (тс) | Через 2 дня, сжатие; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | | Через 2,5 ч, растяжение; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | | Через 4,5 ч, сжатие; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | | Через 1 день, растяжение; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | | Через 9 ч, сжатие; $d$=4,58 см, $l$=5,94 см | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Удлинение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) | Напряжение (кгс/см²) | Укорочение (1/1000 см) | Разность | Модуль упругости (кгс/см²) |
| 0 | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | | |
| | | | *63* | | | | *68* | | | | *67* | | | | *67* | | | | *65* | |
| 4 | 243 | 0,63 | | | 243 | 0,68 | | | 243 | 0,67 | | | 243 | 0,67 | | | 243 | 0,65 | | |
| | | | *62* | | | | *68* | | | | *63* | | | | *68* | | | | *65* | |
| 8 | 486 | 1,25 | | | 486 | 1,36 | | | 486 | 1,30 | | | 486 | 1,35 | | | 486 | 1,30 | | |
| | | | *62* | | | | *64* | | | | *64* | | | | *66* | | | | *66* | |
| 12 | 729 | 1,87 | | | 729 | 2,00 | | | 729 | 1,94 | | | 729 | 2,01 | | | 729 | 1,96 | | |
| | | | *62* | | | | *64* | | | | *63* | | | | *67* | | | | *64* | |
| 16 | 971 | 2,49 | | 2 310 000 | 971 | 2,64 | | 2 190 000 | 971 | 2,57 | | 2 260 000 | 971 | 2,68 | | 2 150 000 | 971 | 2,60 | | 2 250 000 |
| 0 | 0 | 0,00 | | | 0 | 0,06 | | | 0 | 0,00 | | | 0 | 0,06 | | | 0 | 0,01 | | |
| 16 | 971 | 2,49 | | | 971 | 2,64 | | | 971 | 2,57 | | | 971 | 2,68 | | | 971 | 2,58 | | |
| | | | *32* | | | | | | | | | | | | *68* | | | | *64* | |
| 18 | 1092 | 2,81 | | | 1092 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | *68* | | | | *63* | | | | | | | | | |
| 20 | 0 | 0,00 | | | 1214 | 3,32 | | | 1214 | 3,20 | | | 1214 | 3,36 | | | 1214 | 3,22 | | |
| | | | | | | | | | | | *45* | | | | *33* | | | | *85* | |
| 22 | | | | | 0 | 0,08 | | | 1335 | 3,65 | | | 1335 | 3,69 | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | | 0 | 0,10 | | | 0 | 0,10 | | | 1475 | 4,07 | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | 0,25 | | |
| | Опыт 4474 26 октября 1885 г. | | | | Опыт 4478 26 октября 1885 г. | | | | Опыт 4482 26 октября 1885 г. | | | | Опыт 4486 27 октября 1885 г. | | | | Опыт 4495 27 октября 1885 г. | | | |

дель. Результаты опытов также включали данные о многочисленных историях нагружений усилиями разных знаков, которые неизменно вели к одному и тому же «естественному пределу упругости».

Баушингер включил в последнюю часть своей статьи (Bauschinger [1886, 1]) девять больших таблиц последовательных экспериментов, в которых он рассматривал пределы упругости для многочисленных разных ситуаций при циклическом изменении напряжений и числе циклов, достигавшем 16 миллионов. Его исследование усталости стало возможным благодаря получению лабораторией в 1881 г. машины Вёлера. Баушингер, выбрал машину для испытания на усталость при растяжении с приводом от двигателя Отто мощностью в две лошадиные силы, позволявшую одновременно испытывать четыре стержневых образца с площадью поперечного сечения в каждом из них, равной 1 см$^2$. Испытания никогда не продолжались ночью и, кроме того, машина, а следовательно, и опыты регулярно останавливались на два часа ежедневно после полудня.

Удовлетворенный сначала тем, что изменение значения растягивающих напряжений между нулем и уровнем, немногим меньшим начального предела упругости, не приводит к разрыву за 16 миллионов циклов, Баушингер заметил, что если в одном из циклов нагружения превысить этот предел, то возникают интересные осложнения, которые он весьма обстоятельно описал. Такое превышение предела упругости при напряжении одного знака снижало предел упругости при возбуждении напряжений противоположного знака; в последующих циклах естественный предел упругости (предел выносливости) становился границей разрушения. Значение этого естественного предела упругости было, конечно, ниже начального значения предела упругости и могло быть найдено из квазистатического циклического нагружения.

Для иллюстрации я выбрал одну серию из пяти образцов. Эти данные, показанные в табл. 125, описывают образец (5), который Баушингер нагрузил до разрушения квазистатически, не меняя напряжений, и четыре других образца (1—4), которые он подверг квазистатическим испытаниям на растяжение на 100-тонной машине Вердера (указано число циклов) при напряжениях, изменявшихся от нуля до приведенных в таблице максимальных значений.

Баушингер определял $E$ и предел упругости до того, как он создавал указанное увеличение напряжений до уровня, при котором пластические деформации уже возникали, после чего снова прикладывал переменное напряжение. Он придавал существенное значение росту предела упругости от первоначального уровня, равного 1043 кгс/см$^2$ для образца (5), до уровня 2500 кгс/см$^2$, равного максимуму переменных напряжений в образце (4). Он считал разрыв последнего после 2,288 млн циклов нетипичным и возникшим, вероятно, из-за дефекта в образце. Этот опыт, конечно, не включал перемену знака напряжений, так что естественный предел упругости не достигался. Постепенное увеличение предела упругости при

Таблица 125

**Опыты Баушингера (1886). Результаты испытаний при циклическом нагружении стержней прямоугольного сечения, вырезанных из листа пудлингового железа толщиной 11 мм**

| Поперечное сечение образца (см×см) | № пп | Маркировка образца | Число циклов после нагружения | Крайние значения переменных напряжений (кгс) | Количество дней отдыха | Результат изменения нагрузки | Испытание при стационарном нагружении | | | | После разрушения переменной или стационарной нагрузкой | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | испытание под номером | модуль упругости (кгс/см²) | предел упругости (кгс/см²) | максимальная нагрузка (кгс/см²) | остаточная деформация (1/1000 см) | прочность при растяжении (кгс/см²) | сужение площади поперечного сечения | деформация (%) |
| | 1 | 5 | 0 | — | — | — | 3478 | 2 090 000 | 1043 | — | — | 3840 | 20 | 15,5 |
| 1,01×1,16 | 2 | 1 | 378 971 | 0—1080 | 0 | — | 3503 | 2 090 000 | 1620 | 1710 | 0,17 | — | — | — |
| | 3 | 1 | 1 043 422 | 0—1080 | 0 | — | 3513 | 2 010 000 | 1620 | 1710 | 0,28 | — | — | — |
| | 4 | 1 | 1 096 141 | 0—1080 | 5 | — | 3517 | 2 000 000 | 1710 | 1880 | 0,13 | — | — | — |
| | 5 | 1 | 2 085 884 | 0—1080 | 0 | — | 3534 | 2 050 000 | 1620 | 1880 | 0,20 | — | — | — |
| | 6 | 1 | 5 170 523 | 0—1080 | 50 | — | 3571 | 2 090 000 | 1880 | 2051 | 0,22 | 3600 | 24 | 8,1 |
| 1,04×1,16 | 7 | 2 | 369 800 | 0—1500 | — | — | 3502 | 2 030 000 | 1670 | 1670 | 0,09 | — | — | — |
| | 8 | 2 | 1 029 189 | 0—1500 | 0 | — | 3512 | 2 065 000 | 1670 | 1670 | 0,01 | — | — | — |
| | 9 | 2 | 1 114 623 | 0—1500 | 4 | — | 3516 | 2 020 000 | 1670 | 1670 | 0,24 | — | — | — |
| | 10 | 2 | 2 104 366 | 0—1500 | 0 | — | 3533 | 2 025 000 | 1670 | 1670 | 0,08 | — | — | — |
| | 11 | 2 | 5 189 005 | 0—1500 | 50 | — | 3570 | 2 100 000 | 2020 | 2270 | 0,55 | 3710 | 28 | 10,4 |
| 1,02×1,16 | 12 | 3 | 364 456 | 0—2000 | 0 | — | 3501 | 2 030 000 | 1525 | 2030 | 0,66 | — | — | — |
| | 13 | 3 | 1 025 506 | 0—2000 | 0 | — | 3511 | 2 070 000 | 2030 | 2030 | 0,07 | — | — | — |
| | 14 | 3 | 1 110 940 | 0—2000 | 4 | — | 3515 | 2 020 000 | 2030 | 2030 | 0,11 | — | — | — |
| | 15 | 3 | 2 098 014 | 0—2000 | 0 | — | 3532 | 2 020 000 | 2030 | 2030 | 0,08 | — | — | — |
| | 16 | 3 | 5 182 653 | 0—2000 | 48 | — | 3569 | 2 100 000 | 2200 | 2460 | 0,49 | 3730 | 19 | 12,5 |
| 1,04×1,155 | 17 | 4 | 353 569 | 0—2500 | 0 | — | 3500 | 2 055 000 | 2310 | 2480 | 0,42 | — | — | — |
| | 18 | 4 | 992 525 | 0—2500 | 0 | — | 3510 | 1 985 000 | 2330 | 2500 | — | — | — | — |
| | 19 | 4 | 1 086 227 | 0—2500 | 4 | — | 3514 | 2 050 000 | 2290 | 2500 | 0,21 | — | — | — |
| | 20 | 4 | 2 066 685 | 0—2500 | 0 | — | 3531 | 2 050 000 | 2500 | 2500 | 0,25 | — | — | — |
| | 21 | 4 | 2 288 446 | 0—2500 | — | Разрушение | — | — | — | — | — | — | 10 | 0,9 |
| 1,10×1,12 | 22 | 49 | 1 708 010 | 0—2000 | 1/4 | — | 4514 | 2 060 000 | 1790 | 2110 | 0,62 | — | — | — |
| | 23 | 49 | 3 872 604 | 0—2000 | 3/4 | — | 4612 | 2 160 000 | 2190 | 2440 | 0,78 | — | — | — |

База тензометра = 10 см; перед статическим разрушением использован тензометр с базой 15 см.

растяжении до значения, намного превосходившего первоначальный предел упругости, для образцов, имеющих подобную историю нагружения, имеет очевидное значение как для науки, так и для практики.

В целом эффекты, рассматривавшиеся Баушингером, включали влияние времени на увеличение значения предела упругости; уменьшение до нуля и постепенное возвращение значения предела упругости после превышения напряжением предела текучести; непрерывное снижение предела упругости при сжатии или при растяжении после превышения предела упругости в первом нагружении, если оно имело место при растяжении или сжатии; понижение уровня увеличенного предела упругости отжигом при достаточно высокой температуре; влияние на значение предела упругости нескольких миллионов циклов изменения напряжений. Все эти эффекты представляют явление *памяти* материала, которое имеет чрезвычайное значение для современной теории континуальной среды. Любой экспериментатор наших дней, который не хочет понапрасну потерять время, должен начать с тщательного анализа этого отчета Баушингера 1886 г. и соответствующих его статей в журналах того времени, в которых он подробно комментирует смысл этих явлений. Подобно соотношению между работами Корню и Штраубела, отношение работ Видемана, Тарстона и других к исследованию Баушингера представляет замечательный контраст, который иногда существует между относительно грубым первоначальным открытием и последующим законченным изучением. Подчас трудно оценить сравнительную важность этих этапов в экспериментальном познании.

### 4.8. О прочности твердых тел, находящихся под воздействием давления: эксперименты Спринга (1880)

Третьим главным направлением экспериментальных исследований XIX века в области больших деформаций, наряду с исследованием текучести Треска и изучением поведения предела текучести Баушингером, было исследование явления «смерзания» или «спайки», выполненное в замечательных опытах Вальтером Спрингом в 1880 г. (Spring [1880, 1]; [1881, 1]) [1]), корреспондентом Академии Бельгии и профессором университета в Льеже. Явление смерзания двух кусков льда, прижимаемых друг к другу, которое в 1848 г. Дж. Томсон (Thomson [1849, 1]) объяснил изменением точки плавления под давлением, вновь привлекало внимание исследователей в связи с наблюдением, выполненным Фарадеем в 1850 г. (Faradey [1850, 1]), в результате которого он обнаружил, что этот процесс происходит вследствие облегчения возможности достигнуть температуры плавления, соответствующей атмосферному давлению.

[1]) Я использовал статью Спринга, опубликованную в 1881 г.

В течение тридцати лет оживленной полемики по этому поводу, которая в деталях описана Спрингом в обширном введении к его мемуару, приложение теории Дж. Томсона к объяснению образования и течения ледников и эксперименты Треска ([1872, 1]), Гельмгольца (Helmgoltz [1865, 1]), У. Томсона (Кельвина) ([1850, 1]), Бунзена (Bunsen [1850, 1]) и многих менее известных исследователей, главным образом, основывались на предположении, что лед по существу неспособен к пластическому течению. Разрушение льда мыслилось, как происходящее благодаря растрескиванию и плавлению под давлением. У. Томсон показал, что если лед смешан с водой, а затем подвергнут давлению от 8,1 до 16,8 атм, то он тает при температуре 0,059°С и 0,129°С соответственно.

В своей работе Спринг указывает на эксперименты Пфаффа 1875 г. (I. B. A. F. Pfaff [1875, 1]), который продемонстрировал, что при 0°С лед обладает слабой пластичностью, уменьшающейся с падением температуры, на эксперименты Моуссона (Mousson [1858, 1]), который сумел совершенно расплавить лед при давлении 13 000 атм; на работу Тиндалла (Tyndall, [1871, 1]) [1]), который, помимо сжатия кусков льда в горячей воде, добился соединения двух кусков в нагретой водой капсуле при их незначительном контакте. Спринг приводит другие многочисленные примеры смерзания льда и высказывает сомнение в том, что природа ограничила это явление только одной субстанцией — водой. Обсуждение было прелюдией к описанию его собственных экспериментов с высоким давлением, в которых он получил превращение в твердое тело восьмидесяти трех различных измельченных в порошок веществ, в том числе восьми различных металлов. На основе своих экспериментов Спринг заключает, что твердые тела при близком контакте обладают способностью к взаимному самосвариванию.

В первоначальных экспериментах 1878 г. Спринг использовал винт, который проталкивал пистон в цилиндрическое отверстие в стальном цилиндре. Он оценивал возможный уровень создаваемого давления 20 000 атм. Спринг обнаружил, что перемещение упакованных в контейнере блоков твердого тела под давлением становится трудно осуществимым или даже невозможным.

В основной экспериментальной серии, описанной в статье 1880 г., и в серии из шести дополнительных заметок и статей, появившихся в период между 1880 и 1888 гг., Спринг использовал расколотый по центру литой стальной цилиндр диаметром 3,8 см и длиной 5 см с отверстием посередине, в которое был вставлен маленький пистон. Спринг вставлял этот цилиндр в точно соответствующее по разме-

---

[1]) Описание экспериментов Тиндалла по исследованию льда содержалось в главе IV его книги, и в немецком варианте к этому ничего не добавлялось. Я не мог найти ссылки на его «объединение двух кусков в капсуле, нагретой водой». Он наблюдал соединение (смерзание) кусков льда при контакте в процессе плавления в теплой ванне.

рам центральное отверстие обмотанного снаружи лентой чугунного цилиндра. Используя легкую ленту и массивную скобу, он препятствовал разделению двух частей расколотого цилиндра. Давление прикладывалось к пистону посредством рычага, на котором были укреплены подвижные чугунные грузы, достаточные для того, чтобы создать давление в центральной опытной секции свыше 8000 атм. Спринг подсчитал, что аппарат может быть нагружен без опасности разрушения до 30 000 атм.

Спринг подверг испытанию размельченные в порошок или пудру 83 вещества: 8 металлов, 6 металлоидов, 10 окисей и сульфатов, 32 соли, 19 соединений углерода и 8 смесей, подвергнув их сжатию для изучения влияния давления на химическую реакцию в телах.

Отвердевающие под давлением металлы при расположении их в последовательности от наиболее легко отвердевающего к наиболее трудно отвердевающему образуют ряд: свинец, висмут, олово, цинк, алюминий, медь, сурьма и платина. Свинцовые опилки, сжатые в вакууме под давлением 2000 атм, сформировались в компактную массу, в которой даже при микроскопическом исследовании Спринг не мог найти малейших следов границ зерен свинца. Удельный вес отвердевшего под давлением свинца оказался равным 11,5013 вместо веса 11,3 для идентичного блока, полученного другим способом. При увеличении давления до 5000 атм свинец течет и проникает во все щели аппарата и вокруг пистона. Обнаружение у тонких свинцовых листов, имевших слоистый вид, сопротивления при давлении 5000 атм более низкого, чем у твердого тела, Спринг рассматривал как «подтверждение» эксперимента Треска.

Вопреки тому факту, что висмут является хрупким металлом, Спринг обнаружил, что он легко поддается отвердению под давлением. Блок, полученный из тонкого порошка сжатием при давлении 6000 атм, при разрушении обнаружил кристаллический излом наподобие того, который имеется у литого металла. Плотность обоих (прессованного порошкового и литого) была идентичной. Это был единственный из восьми металлов, изученных Спрингом, который имел кристаллический излом в случае, когда твердое тело было получено из порошка под давлением.

Олово из порошка превращалось в твердое тело при 3000 атм и, подобно свинцу, текло при 5000 атм. В отличие от свинца течение вскоре прекращалось. При увеличении давления до 5500 атм текучесть возобновлялась. Давление не достигло еще 7500 атм, когда стало наблюдаться непрерывное течение. Такое поведение обладает всеми физическими признаками эффекта Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье), обычно изучавшегося при очень низком гидростатическом давлении; Спринг был первым, кто наблюдал это явление при высоком давлении.

Все эксперименты с металлами проводились при температуре 14°С, кроме экспериментов с цинком, который испытывался не только при этой температуре, но также, для сравнения, приблизительно

при 130°С. При давлении 260 атм, которое создавалось «невесомым» рычагом, цинк оставался в первоначальной форме опилок. При 700 атм Спринг наблюдал появление связи, хотя полученный блок при таком давлении легко распадался в порошок. Следы связи были видны под микроскопом. Полученный при 2000 атм блок мог подвергнуться распиливанию, но разрушался молотком. При 5000 атм блок получался уже совершенно твердым, его можно было сильно сдавливать в тисках или ковать, как обычный металл.

Алюминиевый порошок превращался в сплошное твердое тело при давлении 6000 атм с удельным весом таким же, как и у металла, полученного плавлением. Медь вела себя подобно алюминию. Сурьмовая пудра, сжатая под давлением 5000 атм, не только отвердевала, но и приобретала на поверхности характерный металлический блеск. При дальнейшем увеличении давления металлический блеск появлялся и на поверхностях разрезов блока на части. Наконец, платиновая губка при давлении 5000 атм показала начальную стадию отвердения, но даже при увеличении давления до некоторого неопределенного максимума предположительно между 8000 и 9000 атм не удалось получить «совершенно» твердого тела, что наблюдалось во всех других металлах.

На основании этих результатов Спринг сделал вывод, что последовательность расположения металлов по признаку легкости отвердения из порошка под давлением согласуется с последовательностью расположения их по признаку твердости. Так, при температуре 130°С цинк был более способен к отвердению под давлением, чем при 14°С: увеличение окружающей температуры уменьшает твердость и увеличивает легкость отвердения из порошка под давлением. Этот факт, подчеркивает Спринг, был хорошо известен и использовался при сварке мягкого железа при высокой температуре.

Опуская детали, относящиеся к длинному списку веществ, от сургуча, стекла, каменной соли, графита, многих хлоридов, бромидов и соединений серы до желтой окиси ртути и алюминия, мы переходим к основному заключению Спринга, которое состоит в том, что порошки всех без исключения исследованных кристаллических тел оказалось возможным отвердить под давлением. Спринг сделал заключение, что объединение твердых тел достигается с помощью механизма образования кристаллов, когда внутренние поверхности приводятся в достаточно близкий контакт благодаря созданию высокого давления, и что этот рост кристаллов происходит вдоль кристаллических осей, вызывая наблюдавшееся объединение частиц твердых тел.

Спринг предположил, что в аморфных телах таких, как воск, вар, смола акации и т. д., обычная текучесть, имеющаяся при обычном давлении, при высоком давлении прекращается и образуется твердая масса. Однако в общем случае некристаллические вещества не отвердевают под давлением, как кристаллические, хотя аморфное состояние не всегда препятствует этому.

Спринг предполагал, что состояние тела в отношении твердости скорее определяется окружающим давлением, чем внутренними свойствами твердого тела. В заключение статьи он описывает свое исследование подвижности серы, находящейся под давлением, и обращает внимание на общую важность этого исследования для геологии и минералогии. На основании своих замечательных результатов Спринг заключает, что образование из порошка под давлением твердого тела, так же как и разрыв при растяжении, является фундаментальным свойством твердых тел и что эти явления в определенном смысле противоположны друг другу.

Воздействие открытия Спринга на научную мысль на протяжении следующих тридцати лет было очень велико. Его исследование стало классическим примером работы, которая стимулировала как дополнительные исследования, так и значительную дискуссию. Даже в середине XX века Бриджмен (Bridgman [1949, 1], стр. 6) ссылался на «большую дискуссию о результатах Спринга, многие из которых были в высшей степени эффектными; кажется несомненным, что многие из открытых им явлений обязаны своим существованием не одному только давлению, но и движению с трением одной частицы о другие с возникновением интенсивного касательного напряжения». Ни Спринг, ни его последователи в этой области в XIX веке не предвидели технологического расцвета в XX веке «порошковой металлургии», которая, несомненно, произросла из исследований Спринга 1880 г.

Уильям Хэллок (W. Hallock [1888, 1]) в 1888 г. реферировал результаты Спринга и утверждал, что ни свинец, ни воск в действительности не начинают течь под давлением и только кажутся текущими вследствие пластической деформации, происходящей при очень больших напряжениях. Джеймс Дьюар (J. Dewar [1895, 1]) в «Замечании о вязкости твердых тел», определенно под влиянием взглядов Спринга, описывает повторение эксперимента по изучению вязких свойств течения соли и органических соединений под высоким давлением. В аппарате, схематически воспроизводящем аппарат Треска в его эксперименте с выдавливанием, при диаметре выдавливаемого образца, равном 1/16 дюйма, Дьюар испытывал различные твердые тела, подразделяя их на такие, которые при выдавливании образовывали проволоку, и на такие, которые проволоку не образовывали. Максимальное оцененное им давление было равно 60 английским тоннам на квадратный английский дюйм, или 8500 атм, т. е. значению, достигнутому Спрингом на тринадцать лет ранее. Для большинства твердых тел, которые легко вытягивались в проволоку, эта вытяжка происходила при давлениях примерно между 4000 и 5700 атм; указанные значения также совпадали с подобными значениями у Спринга.

В табл. 126 представлены эти две группы твердых тел. Дьюар указал на различие скоростей течения; для расправленного сульфоцианида аммония при давлении 8700 атм он дал значение «около одного

Таблица 126

**Результаты опытов по экструзии (выдавливанию) Джеймса Дьюара (1895)**

| Твердые тела, принимающие под давлением форму проволоки | Твердые тела, не принимающие форму проволоки вплоть до максимального давления 8500 атм |
|---|---|
| Сульфат натрия *) | Фосфат натрия *) |
| Карбонат натрия *) | Бура *) |
| Тиосульфат натрия *) | Кварцы |
| Хлорид магния *) | Нитрат натрия |
| Сульфат железа *) | Хлорид натрия |
| Хлорид аммония | Литий |
| Хлорид калия | Цинк |
| Бромид | Ртуть |
| Йодид | Сульфид марганца *) |
| Цианид | Сульфат аммония |
| Нитрат аммония | Щавелевый натрий |
| Калий и серебро | Щавелевое железо |
| Хлорид стронция *) | Соль Рочелла |
| Сульфат алюминия *) | Окись мышьяка |
| Каустическая сода | Ферроцианид калия |
| Щавелевая кислота *) | Ацетат натрия |
| Ацетат натрия | Ацетат аммония *) |
| Хлорид кальция (медленно) | Нитраты бария |
| Ацетамид (медленно) | Стронций |
| Ацетат свинца (медленно) | Каустическая сода |
| Бензойная кислота (медленно) | Сухие карбонат и сульфат натрия |
| Графит (легко, хрупкая проволока) | Сухой сульфид алюминия |
| Йод (легко, длинные сплошные нити) | Сахар |
| Мочевина (легко) | Нафталин |
| Антраквинон (очень медленно, хрупко) | |

*) Гидраты солей.

дюйма в минуту» (Dewar [1895, 1], стр. 138). С другой стороны, некоторые твердые тела, которые не принимали форму проволоки, прорывались через узкое отверстие внезапным взрывом. Эти внезапные толчки также явились свидетельством проявления эффекта Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье) при разрушении твердых тел под высоким давлением, достигающим достаточно большого значения, такого, что, как было в двух случаях, эти толчки вызывали разрушение прочного стального цилиндра. Некоторые из твердых тел, не принимавшие форму проволоки, при максимальном давлении 8750 атм просто не текли или текли слишком слабо.

Дьюар заключил, что степень понимания предмета была в общем столь ничтожна, что «требовалось продолжение исследований». Он высказал мнение, что для каждого вещества существует предельное давление, «вероятно, постоянное», которое может быть достигнуто до того, как возникает умеренная скорость течения».

## 4.9. Ранние эксперименты XX века по течению твердых тел, находящихся под высоким давлением: Тамманн (1902)

Деформация твердых тел при высоком давлении была единственным аспектом, которым интересовалась физика высокого давления, развивавшаяся в конце XIX и начале XX веков. В историческом введении к своей монографии «Физика высокого давления» Бриджмен (Bridgman [1931, 1]) подчеркнул вклад многих экспериментаторов перед началом его собственной работы в 1906 г. Среди них с особым акцентом описаны работы Таммана (Tammann [1902, 1]). Как заметил Бриджмен, Тамманн не разработал новых экспериментальных методов и достиг давления лишь в 3000 атм, что значительно ограничило его исследование. В настоящем контексте основной интерес представляет критика Таммана предшествующих исследований текучести, включая выполненные Треска и его последователями. Тамманн подчеркивал, что в предшествующих экспериментах в процессе течения в отверстии не поддерживалось высокое давление. В мемуаре 1902 г. о течении льда он описал аппарат, с помощью которого удалось не только поддерживать давление в продолжение течения, но и измерять скорость течения как функцию давления и температуры.

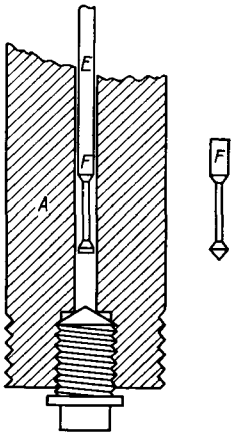



Рис. 4.29 Опыты Таммана (1902). Схема камеры давления, в которой проводились эксперименты по исследованию текучести.

На рис. 4.29 показан схематический чертеж камеры давления. Твердое тело под давлением текло вокруг элемента $F$, который при изучении скорости течения для поддержания давления суживался на конус. Давление с помощью рычага передавалось на пистон $E$.

Весь аппарат, изготовленный для Таммана промышленным способом, показан на рис. 4.30.

Наличие эффекта последействия требовало ожидания в течение двух минут, прежде чем можно было начать измерение скорости, основанное на наблюдении за положением рычага. Тамманн измерял изменения окружающей температуры, заключая аппарат в ванну требуемого объема, наполненную жидкостью. Опуская описание результатов по течению льда, включенных Таммана в статью 1902 г., я закончу обсуждение данного вопроса упоминанием об использовании аппарата Н. Веригина, Ж. Левкоева и Таммана (Werigin, Lewkojeff, Tammann [1903, 1]), для исследования зависимости скорости течения от давления и температуры для олова, калия, натрия, свинца, таллия, висмута, кадмия и цинка.

Из-за наличия отмеченных флуктуаций я сохранил единицы скорости на оси абсцисс каждой из фигур такими, которые в оригинале

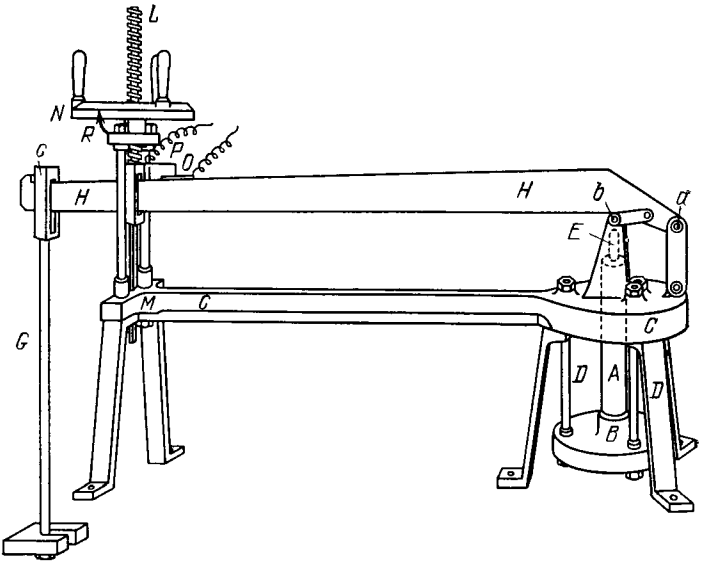



Рис. 4.30. Опыты Тамманна (1902). Аппарат, использовавшийся в экспериментах.

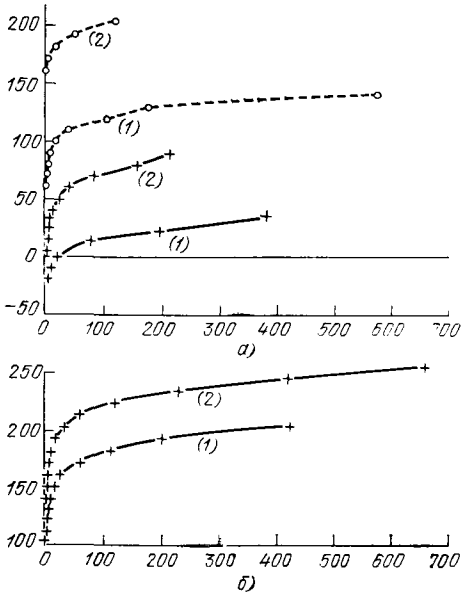



Рис. 4.31. Опыты Веригина, Левкоева и Тамманна (1903). Скорость течения в единицах «деление шкалы в минуту» в зависимости от температуры для свинца при двух различных давлениях и двух значениях угла при вершине конусов и для кадмия при двух значениях угла при вершине конусов. *а*) Свинец; *б*) кадмий. (*1*) — графики, относящиеся к первому значению угла при вершине конуса, (*2*) — графики, относящиеся ко второму значению угла при вершине конуса; штриховая линия соответствует давлению 500 кгс/см², сплошная — давлению 1000 кгс/см². По оси абсцисс отложена скорость в единицах «деление шкалы в минуту», по оси ординат — температура (°С).

были названы как единица длины в минуту, хотя, как указывали авторы, для оценки значений в см/с имелась достаточная информация. Они использовали два конуса различной формы. Для графиков, обозначенных на рис. 4.31 символом (1), угол при вершине конуса

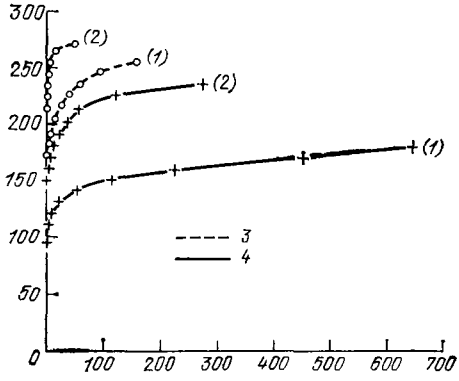



Рис. 4.32. Опыты Веригина, Левкоева и Таммания (1903). Скорость течения в единицах «деление шкалы в минуту» в зависимости от температуры для висмута при двух различных значениях давления и двух значениях угла при вершине конусов; *(1)* — графики, относящиеся к первому значению угла при вершине конуса, *(2)* — графики, относящиеся ко второму значению угла при вершине конуса; *3* — штриховая линия соответствует давлению 500 кгс/см², *4* — сплошная линия — давлению 1000 кгс/см². По оси абсцисс отложена скорость в единицах «деление шкалы в минуту», по оси ординат — температура (°С).

был равен 95°, а площадь основания конуса 0,1444 см², а для графиков, обозначенных символом (2), угол при вершине конуса был равен 100°, площадь же основания равнялась 0,1816 см². Площадь поперечного сечения полости стального цилиндрического контей-

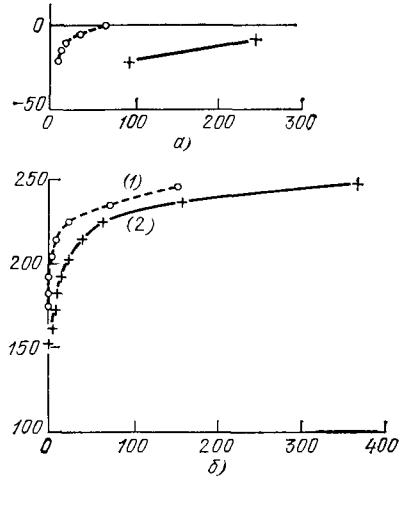



Рис. 4.33. Опыты Веригина, Левкоева и Таманна (1903). Скорость течения в единицах «деление шкалы в минуту» в зависимости от температуры для цинка, натрия и калия для двух давлений при обозначенных значениях угла при вершине конусов. *а*) Калий (штриховая линия); натрий (сплошная линия); давление 260 кгс/см²; площадь основания 0,1847 см². *б*) Цинк. Штриховая линия соответствует давлению 500 кгс/см², сплошная — давлению 1000 кгс/см². По оси абсцисс отложена скорость в единицах «деление шкалы в минуту», по оси ординат — температура (°С); *(1)* — график, относящийся к первому значению угла при вершине конуса; *(2)* — график, относящийся ко второму значению угла при вершине конуса.

нера, которой ограничены размеры стержня, была 0,1988 см². Перед началом опыта цилиндрический стержень был аккуратно подогнан по размерам этого стального цилиндра.

Заинтересованный читатель отсылается к оригинальной статье, в которой результаты экспериментов детально представлены в таб-

лицах. Рис. 4.31, 4.32 и 4.33 содержат графическое изображение результатов испытаний свинца, висмута, цинка, калия, кадмия и натрия при использовании двух различных конусов.

В каждом примере заметно увеличение скорости течения с ростом температуры, хотя абсолютная скорость при фиксированном уровне

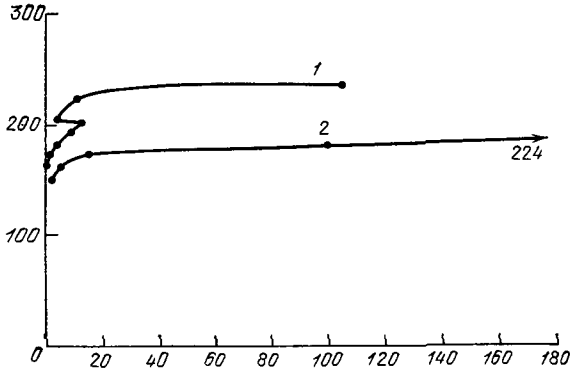



Рис. 4.34. Опыты Веригина, Левкоева и Тамманна (1903). Необычное поведение олова и таллия в процессе течения; *1* — график для олова при напряжении 500 кгс/см², *2* — таллий. По оси абсцисс отложена скорость в единицах «деление шкалы в минуту», по оси ординат — температура (°С).

температуры зависит от вида штампа. Веригин, Левкоев и Тамманн заметили, что изменение температуры на 10°С может удвоить скорость течения. Они интересовались, в частности, необычным поведением олова и таллия, показанным на рис. 4.34. В первом случае при температуре между 203 и 204°С имело место внезапное уменьшение

Таблица 127

**Опыты Веригина, Левкоева и Тамманна (1903). Олово, давление 1000 кгс/мм², конус № 1**

| Температура (°С) | Скорость (единица длины в минуту) | | | Средняя скорость |
|---|---|---|---|---|
| 10,0 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2±0,0 |
| 20,0 | 0,4 | 0,4 | 0,5 | 0,4±0,0 |
| 32,0 | 0,7 | 1,0 | 0,9 | 0,9±0,1 |
| 41,8 | 1,6 | 1,5 | 1,7 | 1,6±0,1 |
| 51,2 | 4,0 | 3,8 | 3,6 | 3,8±0,1 |
| 60,5 | 8,3 | 7,7 | 7,7 | 7,9±0,3 |
| 70,4 | 14,3 | 13,2 | 14,9 | 14,1±0,6 |
| 83,2 | 32,0 | 33,6 | 31,8 | 32,5±0,8 |
| 90,6 | 59,7 | 55,5 | 54,3 | 56,5±2,1 |
| 100,3 | 107,6 | 89,2 | 96,0 | 97,6±6,6 |
| 110,5 | 206,0 | 178,0 | 201,0 | 195,0±11,3 |
| 120,6 | — | 362,0 | — | 362,0 |
| 131,4 | — | 584,0 | — | 584,0 |

скорости, в то время как во втором случае примерно при 180°С произошло большое увеличение скорости. Это поведение было объяснено как изменение, связанное с изменением в кристаллической структуре материала.

Результаты испытаний олова, представленные в табл. 127, показывают уровень, которого достигает постоянная скорость течения. Как можно видеть, такая ситуация наблюдается вплоть до температуры, равной примерно 200°С.

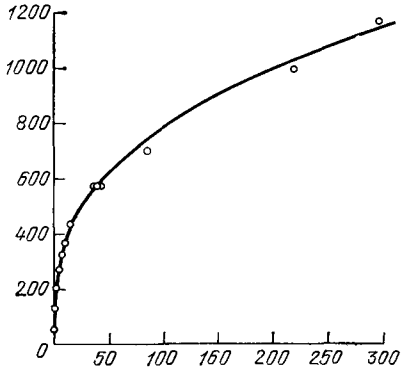



Рис. 4.35. Зависимость течения от давления при — 217°С (5 опытов), полученная Таммaном для льда и использованная Обермейером в его анализе, выполненном в 1904 г. Диаметр основания конуса 4,5 мм; значение угла при вершине конуса 78°; площадь кругового отверстия 0,0389 см²; эмпирическая зависимость $v = \frac{p^3}{[p^3/v]_{\text{средн}}}$. По оси абсцисс отложена скорость течения в единицах «деление шкалы в минуту», по оси ординат — давление в кгс/см².

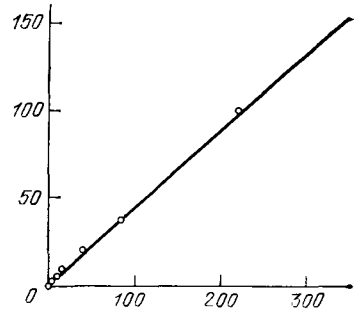



Рис. 4.36. Сравнение экспериментальных значений скорости течения льда под давлением, полученных Таммaнном в 1902 г. (кружки), со значениями, определенными на основе эмпирической зависимости Обермейера (сплошная линия). По оси абсцисс отложена скорость течения в единицах «деление шкалы в минуту», по оси ординат — давление³ (кгс/см²)³ · 10⁻⁷.

В 1904 г. Обермейер (Obermayer [1904, 1]), не внеся ничего своей собственной экспериментальной деятельностью, издал реферативную статью о работах Треска (Tresca [1867, 1], [1868, 1]), Спринга (Spring [1881, 1]) и Таммaнна (Tammann [1902, 1]). Он заметил, что результаты исследования для льда зависимости скорости течения от давления при —21,7°С, показанные на рис. 4.35, дают хорошее приближение к кубической экспериментальной зависимости скорости течения от давления. Обермейер предполагал, что график, показанный на рис. 4.36, вообще говоря, не является характеристикой данных эксперимента и поэтому представляет собой лишь аппроксимацию. Статья Обермейера представляет собой хорошее краткое резюме по дискуссиям, определившим поворот исследований века в сторону изучения течения и отвердения под давлением.

### 4.10. Начало экспериментального изучения больших деформаций кристаллических твердых тел с учетом историй нагружения, при которых имеются более чем один ненулевой компонент напряжения: Гест (1900)

Открытие Кулоном (Coulomb [1784, 1]) в 1784 г. предела упругости металлов было исчерпывающим, так же как и его обширное исследование кручения, показавшее, что значение этого предела зависит от остаточной деформации, возникающей в процессе циклического нагружения и разгрузки образца.

Поскольку предел упругости был определен как напряжение, при котором начинается остаточная деформация, ведущие экспериментаторы XIX века, которые занимались этим вопросом, Ходкинсон, Вертгейм и даже Баушингер всерьез сомневались в его существовании. Их возражение состояло в том, что малые пластические деформации, или микропластичность, сопровождают деформацию с самого ее начала и могут быть обнаружены, если имеются инструменты, которые в состоянии определить их. Вертгейм выбрал за предел упругости просто напряжение, соответствующее произвольному значению деформации. Баушингер же выбрал более строго предел пропорциональности — напряжение, выше которого наблюдаемые остаточные деформации оказываются невоспроизводимыми.

Открытие Вертгеймом (Wertheim [1844, 1(a)]) в 1844 г. зависимости значения первоначального предела упругости от температурной предыстории, открытие Вёлером (Wöhler, [1858, 1]) снижения значения предела упругости при повторяющихся разгрузках и нагружениях, открытие Тарстоном (Thurston [1873, 1]) увеличения значения предела упругости после паузы в нагружении и открытие Баушингером того факта, что при превышении напряжением предела текучести в стали предел упругости после разгрузки при повторном нагружении, если не прошло достаточное время, может исчезнуть (Bauschinger [1881, 1], [1886, 1],—все это было развитием деталей различных аспектов открытия Кулона.

Аналогично в области пластичности кристаллов, которая в основном была развита в физике в XX веке, Джеймс Гест (Guest [1900, 1]) в 1900 г. поставил первые эксперименты, на основе которых получил при воздействиях, вызывающих более чем один ненулевой компонент напряжения, аналог начального предела текучести — поверхность текучести. Используя тонкостенные полые трубки при осевом растяжении в сочетании с внутренним давлением и кручением (этим обеспечивается растяжение в двух ортогональных направлениях и сдвиг, если пренебречь напряжениями на площадках, параллельных срединной поверхности стенки, имеющими больший градиент между внутренней и внешней поверхностями стенки при наличии внутреннего давления), Гест пытался проверить основ-

ные гипотезы того времени о поверхности текучести. В 1900 г. их было три.

Первая, теория максимального напряжения, которую Гест излагал «заимствуя, ввиду отсутствия экспериментальных данных, у Рэнкина» (Guest [1900, 1], стр. 77), была исключительно английской и американской. Европа, с другой стороны, приняла теорию наибольших удлинений, «впервые выдвинутую Сен-Венаном как согласующуюся с такой атомистической теорией, которая приводила к одноконстантной теории упругости» (Guest [1900, 1]). Третья теория, которую выделил Гест, была одной из возможных теорий, включенных в «Прикладную механику» (*Applied Mechanics*) Коттрелла (элементарный учебник конца XIX века),— теория максимального касательного напряжения. Гест заметил, что формула для поверхности текучести, основанная на гипотезе о максимальном сдвиге, не была выдвинута своевременно, хотя простое знакомство с наблюдением Треска больших деформаций 35-летней давности «должно было значительно ускорить заключение, что это правильный критерий упругой прочности для пластичного материала» (Guest [1900, 1] стр. 79.)

Треска (Tresca [1872, 2] доказал, что существуют три области деформации: упругая область, следующая за ней промежуточная область пластической работы упрочнения и третья — состояние пластического течения при постоянном напряжении. Гест излагал доводы для тех, кто после прочтения работ Треска удивлялся, как концепция идеально пластичного тела, в котором пластическое течение при постоянном напряжении предполагалось имеющим место после достижения предела упругости, могла быть выведена из экспериментов Треска.

«Сен-Венан, вслед за которым и многие другие специалисты по теории упругости, не заметил промежуточной стадии и заключил, что закон Гука имеет силу до точки, в которой начинается пластичность; он использовал результаты Треска о том, что в пластической стадии сдвигающая сила постоянна, и считал достижение максимальным удлинением определенного уровня условием ограничения упругости.

Я не мог понять, как материал мог иметь одно условие для начала пластичности и совершенно другое для ее существования; возможно, пользователи этих условий молчаливо допускают существование промежуточной стадии, но пренебрегают ею для упрощения расчета и из-за того, что физическое различие между упругим и пластическим состоянием так велико; или может быть они не видят строгого основания для дедукции закона пластичности из экспериментов Треска» (Guest [1900, 1], стр. 78).

Гест подчеркивал невозможность получения результатов для любых величин (для любых отношений главных напряжений в условиях двумерного напряженного состояния.— *А. Ф.*) из экспериментов по пластическому кручению — растяжению *сплошных стержней*. Он выполнил для определения $E$ и $\mu$ серию предварительных исследований малых деформаций растяжения и кручения девяти стальных, двух медных и двух латунных образцов в виде *трубок*, которые

находились в сложном напряженном состоянии. На основании этих данных Гест хотел предпринять определение коэффициента Пуассона, он надеялся вычислить его значение, используя значения двух модулей $E$ и $\mu$, которые получил экспериментально обычным путем.

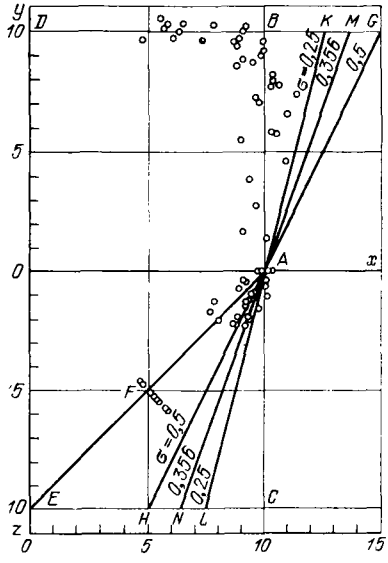



Рис. 4.37. Опыты Геста (1900). Сокращенные диаграммы. Сравнение экспериментальных результатов опытов Геста по исследованию стальных полых трубок на совместное растяжение, кручение и внутреннее давление с гипотезами наибольшего главного напряжения, наибольшей главной деформации и наибольшего сдвига (наибольшего касательного напряжения.—*А. Ф.*).

Эксперимент состоял в испытании трубок на растяжение, отдельно — на кручение и отдельно — на воздействие внутреннего давления, при этом наблюдался уровень каждого из указанных воздействий, при котором возникала текучесть. Следующая процедура состояла в испытании трубок на кручение, на кручение и растяжение совместно, только на растяжение, на растяжение и внутреннее давление совместно, на кручение и внутреннее давление совместно и только на воздействие внутреннего давления. Были проведены измерения осевого удлинения, угла закручивания и в некоторых случаях окружной деформации специально спроектированными оптическими тензометрами. Я посчитал невозможным сжато изложить статью Геста, содержащую 64 страницы. Статья содержит исчерпывающее описание ограниченных возможностей аппаратуры, проблем трения и калибровки, теорию экстензометров, описание метода измерения и способа приложения давления. В приложении Гест дает детально в виде таблиц все результаты измерений на стальных, медных и латунных трубках, из которых точку текучести легко обнаружить только для стальной трубки. Он представил диаграммы экспериментов с медными трубками, на которых, как и в случае латунных трубок, нельзя было наблюдать определенной точки текучести. Я надеюсь, что заинтересованный читатель рас-

смотрит все эти детали в оригинальной статье, и ограничу обсуждение показом диаграммы, представляющей экспериментальные результаты для стальных трубок. Результаты в том виде, как они даны Гестом, представлены на рис. 4.37. *Ox* — ось главного напряжения, совпадающего с образующей трубки. Относительные величины других главных напряжений отложены параллельно осям *Oy* и *Oz*, параллельно оси *Oy* — среднее, а параллельно оси *Oz* — минимальное главное напряжение.

Гест предполагал, что для геометрического представления диаграммы ее следует мысленно согнуть вокруг оси *Ox* так, чтобы между плоскостями *xOy* и *xOz* образовался прямой угол. Тогда на рис. 4.37 точки, соответствующие максимальному напряжению, расположатся на линии *BH*. Для теории максимального удлинения получаются линии *GAH*, *KAL* или *MAN* в зависимости от значения коэффициента Пуассона. Для гипотезы максимального касательного напряжения, обследованной экспериментально на основании измерений Геста, получилась диаграмма *EFABD*. Отклонение Гестом гипотез максимального главного напряжения и максимальной главной деформации вместе с международным инженерным конфликтом мнений было фактически преамбулой к новому конфликту, который возник между гипотезой Геста, или условием Треска для поверхности текучести, с одной стороны, и критерием энергии формоизменения Максвелла — фон Мизеса — с другой. Хотя 75 лет последующего экспериментирования оказались предоставляющими аргументы в пользу критерия, впервые предложенного Максвеллом, но описанного только фон Мизесом, так как статья Максвелла долго оставалась неопубликованной, пионерное историческое значение имеет экспериментальное исследование Геста [1]. Гест отмечает, что явно выраженное начало пластичности в медных и латунных трубках, несмотря на трудность определения его местоположения при сравнении, производимом в терминах сходного поведения зависимости напряжение — деформация, согласовалось с его гипотезой максимального сдвига.

Эксперименты Кармана (Karman [1911, 1]) с мрамором по гидростатическому сжатию — растяжению, проведенные в 1911 г. и описанные ниже, являются следующим шагом в этом направлении, если представить пластичность при конечной деформации как расширение начальной поверхности течения [2] либо определить как семейство подобных поверхностей или как определенное соответствующим образом функциональное изменение с увеличением деформации. Гест (Guest [1900, 1]) не оценил своего вклада в развитие этих представлений, иначе бы он воздержался от критики тех, кто пытался приложить результаты Треска по большим деформациям к объяснению возникновения пластичности, и от своей ссылки на «фальшивые точки текучести».

### 4.11. Пластичность мрамора и песчаника, возникающая при объемном напряженном состоянии: фон Карман (1911)

Хотя оба — Спринг (Spring [1881, 1]) и Тамманн (Tammann [1902, 1]; Werigin, Lewkojeff and Tammann [1903, 1]) изучали большие деформации и пластическое течение твердых тел при объемном напряженном состоянии, когда более чем один компонент напряжения был не равен нулю, их работа в данном направлении имела ограниченную ценность, поскольку они были не в состоянии определить значения этих ненулевых компонентов напряжения. Подобная ограниченность была также присуща и некоторым результатам Треска (Tresca [1864, 1], [1868, 1]). Карман (Karman [1911, 1]) был первым экспериментатором, который подверг твердое тело большим напряжениям, сопровождающимся большой деформацией при трех отличных от нуля главных напряжениях, и определял их значения на протяжении всего процесса деформации.

Карман предпринял эксперимент, в процессе которого можно было подвергать цилиндрический образец гидростатическому давлению при одновременном независимом приложении дополнительного осевого напряжения. Оба напряжения можно было варьировать и измерять. Измеряемым параметром деформации было осевое удлинение. В проведенных экспериментах выбранное гидростатическое напряжение поддерживалось постоянным, в то время как квазистатическое осевое напряжение изменялось. Постоянные значения гидростатического напряжения имели значения в разных опытах от 0 до 3260 атм, в то время как увеличивающиеся осевые напряжения, доходившие до значения свыше 5000 атм, всегда превышали гидростатическое давление. (Максимальное давление, которое могло быть достигнуто в цилиндре (куда помещался образец) высокого давления, изготовленный из никелевой стали, имеющем внутренний диаметр 50 мм, было 10 000 атм). Прибор, с помощью которого достигались гидростатическое давление и упомянутое выше осевое напряжение, не зависящее от гидростатического, показан на рис. 4.38.

Жидкость в цилиндре $a$ под давлением насоса передавала в отношении 1 к 25 через пистон $b$ требуемое давление в камеру $c$. Через отверстие $e$ это давление передавалось в экспериментальную камеру $d$, в которой устанавливались цилиндрические образцы; длина их варьировалась от 100 до 110 мм. Диаметр образцов был равен 40 мм, что обеспечивало значения отношения $L/D$ от 2,5 до 2,75, использовавшиеся в более ранних экспериментах Людвига Прандтля и Фридриха Ринне (Rinne [1909, 1]), в которых при таких отношениях $L/D$ не возникала потеря устойчивости. Длина образцов была такой, что эффекты трения на торцах были пренебрежимо малыми и, действительно, несмотря на высокое давление и трение на торцах, образцы в основном оставались цилиндрическими на протяжении всего испытания. Однако в данной статье было показано не-

сколько фотографий бочкообразных образцов; воспроизведение этих фотографий в более поздних публикациях других авторов привело к некоторым неправильным заключениям.

Выбор мрамора и песчаника в качестве объектов экспериментального исследования был случайным, результаты, между тем, оказались неожиданными. Эти твердые тела, допускающие сравнительно высокое осевое напряжение перед разрушением при атмосферном давлении, оказываются хрупкими под действием сжимающей нагрузки. Белый с голубыми жилками каррарский мрамор и красный песчаник из Мутенберга, которые изучались Карманом, имели при атмосферном давлении разрушающие напряжения 13,60 кгс/мм² и 6,90 кгс/мм² соответственно. Разрушение достигалось при осевой деформации порядка 0,5%.

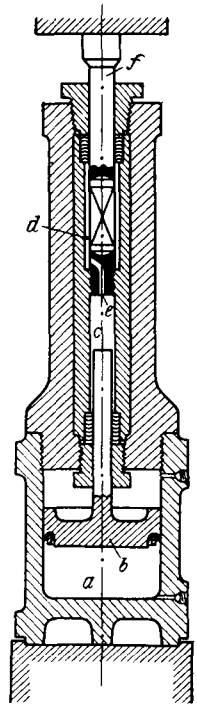



Рис. 4.38. Опыты Кармана (1911). Аппарат, использовавшийся для исследования осевого нагружения образцов при наличии высокого внешнего давления.

Из-за пористости этих веществ для предотвращения проникновения глицерина, использовавшегося в качестве жидкости, создающей давление, образцы были обернуты по боковой поверхности в латунную фольгу толщиной 0,1 мм с отогнутыми участками, припаянными к плитам, создающим осевое давление [1]).

Статья содержала детальное обсуждение того, как определялся эффект трения; было показано, что влияние латунной фольги пренебрежимо мало. Рис. 4.39 демонстрирует замечательные результаты, полученные при увеличении гидростатического давления в мраморе, а рис. 4.40 дает результаты, полученные в тех же условиях в опытах с красным песчаником: $\sigma_1$ — осевое главное напряжение, $\sigma_2=\sigma_3$ — главные напряжения на боковой поверхности призмы (гидростатическое давление). В процессе роста напряжений осевое напряжение было всегда выше гидростатического давления, поэтому ординаты на рис. 4.39 и 4.40 даны как $\sigma_1-\sigma_2$.

В одном и том же твердом теле реализовался каждый тип поведения при осевом напряженно-деформированном состоянии от хрупкого излома при малых деформациях до пластического течения твердого тела, приводящего к большим деформациям. Как заметил Карман, в опытах с мрамором был достигнут уровень гидростатического давления, достаточный, чтобы обнаружить возможное соотношение между давлением и максимумом функции напряжение — деформа-

[1]) Позднее экспериментаторы, применявшие эту методику при попытках повторить эксперименты Кармана, получали неверные результаты.

ция. Увеличение максимума при изменении давления от 16,50 до 24,90 кгс/мм² было много больше, чем увеличение максимума при примерно таком же увеличении давления от 24,90 до 32,60 кгс/мм².

Среди многих вопросов, относящихся к пластической деформации кристаллических твердых тел, поверхность текучести и критерий разрушения очень рано стали предметом особого внимания.

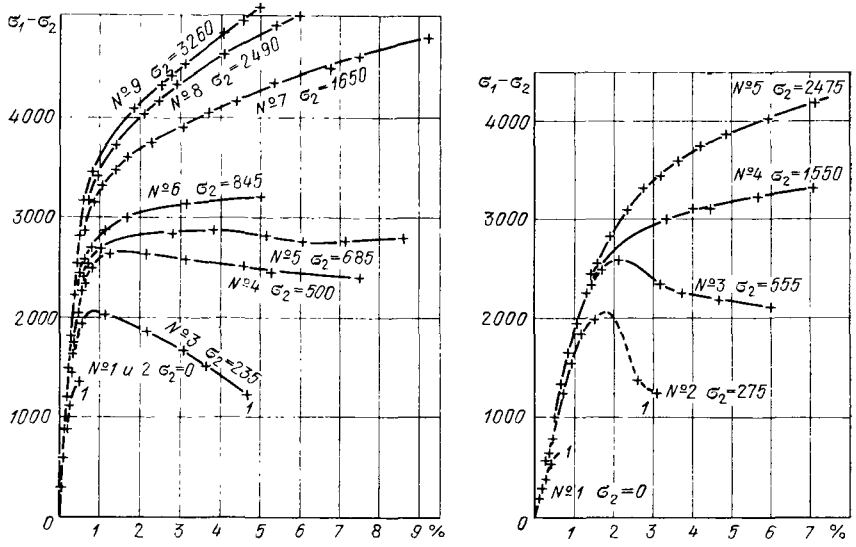



Рис. 4.39. Опыты Кармана (1911). Осевое сжатие мраморных образцов, проведенное при указанных давлениях. Замечено значительное увеличение пластичности при увеличении уровня давления. По оси абсцисс отложена деформация укорочения в %, по оси ординат — разность напряжений $\sigma_1-\sigma_2$ в атмосферах. Напряжение $\sigma_2$, указанное на графиках в качестве параметра, дано в атмосферах; *1* — разрушение.

Рис. 4.40. Опыты Кармана (1911). Осевое сжатие образцов из красного песчаника, проведенное при указаиных давлениях. По оси абсцисс отложена деформация укорочения в %, по ос ординат — разность напряжений $\sigma_1-\sigma_2$ в атмосферах. Напряжение $\sigma_2$, указанное на графиках в качестве параметра, дано в атмосферах, *1* — разрушение.

Это произошло отчасти из-за толчка, вызванного исследованиями предела упругости при простом нагружении Баушингером, но в большей степени из-за того, что доминирующими были попытки исследователей установить некоторый, хотя бы грубый, критерий как верхнюю границу при проектировании объектов, находящихся в условиях объемного напряженного состояния. Исследования XIX века от Карстена в 1816 г. (Karsten [1816, 1]) [1]) до самого Баушингера в 1886 г. (Bauschinger [1886, 1]) подчеркнули трудность установления такого критерия для напряженных состояний даже с одним отличным от нуля напряжением. Между тем большинство из известных экспериментаторов XIX века сомневалось, что суще-

[1]) Я использовал второе издание, переведенное с немецкого на французский Кульманом, опубликованное в Метце в 1830 г.

ствует такой феномен, как предел упругости, не говоря уже о поверхности текучести. Новые проблемы начала XX века — определение точных математических границ истинной упругости, которому было посвящено полвека экспериментов, и исследование ограниченной теории пластичности для «идеально пластического тела» — не сняли большинства первоначальных вопросов.

В той же самой статье 1911 г. Карман (Karman [1911, 1]) показал, что в мраморе и песчанике невозможно определить предел упругости как максимальное напряжение, при котором и ниже которого вся деформация полностью обратима, и присоединился к основному мнению XIX века, указав, что с помощью достаточно точных инструментов всегда можно найти остаточную деформацию, которая сопровождает любую упругую деформацию. Под влиянием желания технологов иметь какой-либо критерий для предела упругости, Карман ввел условный «предел текучести», который относится к точке, в которой появляется «значительная» остаточная деформация. Безусловно грубый критерий такого типа, введенный Ходкинсоном (Hodgkinson [1843, 1]), Вертгеймом (Wertheim [1844, 1(a)]) и другими для одноосного нагружения, используется и в современной технологии. В настоящее время при установлении этого предела обычно выбирают значение деформации, равное 0,2%, вместо также произвольного значения 0,05%, принятого Вертгеймом.

Карман сравнил свои значения «предела упругости» и свои кривые постоянной деформации с представленными Отто Мором [1]). Далее Карман одним из первых сделал утверждение (в длинном списке аналогичных утверждений, высказанных начиная от него и до нашего времени и независимо от того, к какой частной гипотезе, касающейся поверхности текучести, они относятся), что он получил такое хорошее согласование между гипотезой и экспериментом, которое укладывается в рамки допускаемой погрешности эксперимента.

Статья Кармана снабжена фотографиями шлифов образцов, снятых под микроскопом, и фотографиями деформированных образцов, которые обнаружили важность плотности расположения и связности кристаллитов в образовании наблюдаемой текучести при высоком гидростатическом давлении.

Экспериментальное определение функций напряжение — деформация для металлов в присутствии высокого гидростатического давления интенсивно исследовалось Бриджменом (Bridgman, *Collected Experimental Papers*, Vols I to VII, Cambridge, Massachusetts [1964, 1]) три десятилетия спустя после экспериментов Кармана при давлениях порядка 40 кгс/мм². Несмотря на важность экспериментов Кармана, они вызвали небольшое число исследований в этом направлении. Теперь обычно этот тип исследований приписывается

[1]) Для подробного знакомства как с различными гипотезами, так и с экспериментами, относящимися к ним, см. монографию А. Л. Надаи (Nadai [1950, 1]).

Бриджмену. Однако эксперименты последнего в 1940 г. со сталями сложных составов были менее исчерпывающими, чем оригинальная работа Кармана.

### 4.12. Большая деформация твердых тел под воздействием высокого гидростатического давления: Бриджмен (1909—1961)

Из изложенного выше ясно, что со времени Кулона до Кармана основные исследования в экспериментальной механике твердого тела покоились на изучении трех простых видов напряженного состояния: одноосного растяжения, одноосного сжатия и кручения цилиндрических труб и стержней. Пьезометрические эксперименты, начиная от экспериментов Рено (Regnault [1847, 1]) и кончая экспериментами Мэллока (Mallok [1879, 1]) и Грюнайзена (Grüneisen [1906, 1], [1907, 1], [1908, 1], [1910, 1, 2, 3]), обычно предпринимались с целью определения модуля объемной упругости в случае малых деформаций. Интерпретация результатов была основана на использовании закона линейной упругости. Поэтому такие эксперименты не могли успешно распространяться на исследование больших деформаций, происходящих при нагружении с более чем одним ненулевым компонентом напряжений, несмотря на то, что теория конечных деформаций уже была хорошо сформулирована. В первом десятилетии XX века экспериментальные исследования Ричардса (Richards [1915, 1], [1924, 1]) [1], посвященные изучению зависимости сжимаемости элементов при гидростатическом давлении от атомной природы явления не только были ограничены давлением 500 кгс/см², но и характеризовались разбросом результатов измерений. При определении абсолютной сжимаемости необходимость каким-нибудь путем иметь сведения по крайней мере об одном твердом теле как об относительном стандарте была наиболее ограничивающим фактором во всех исследованиях, включая классическое исследование Бриджмена по высокому гидростатическому давлению.

Бриджмен, так же как и Кулон, Дюло, Вертгейм и Грюнайзен, является выдающейся фигурой в данной области исследований. Интересно, сделают ли пятьдесят шесть лет хождения по Луне, возможные благодаря усилиям десятков тысяч людей, так же много для фундаментальной физики, сколько сделали для современного мира за такой же промежуток времени усилия одного исследователя — Бриджмена и несколько кубических сантиметров его аппарата высокого давления. Не отдать должное великой фигуре Бриджмена в экспериментальной физике XX века означало бы недооценку результатов, достигнутых ценой выдающегося экспериментального мастерства. Значительная часть двухсот статей и двух моно-

---

[1]) Ричардс написал свыше тридцати статей о сжимаемости с 1902 по 1930 г. Бриджмен указывал на недостаточную точность экспериментов Ричардса, которую подозревал и сам Ричардс.

графий Бриджмена (Bridgman [1964, 1]) [1]), посвященных физике высоких давлений, касается деформации твердых тел, подвергнутых квазистатическому гидравлическому давлению.

В своей первой работе (Bridgman [1909, 1, 2, 3]) [2]), начатой в 1905 г. и предложенной в последующие годы, он создал метод уплотнения (Bridgman [1943, 1]) [3]), который прекращал утечки, ограничивавшие достигавшийся прежде уровень давления. На рис. 4.41 и 4.42 показаны «основные схемы уплотнения, с помощью которых давление в мягких уплотняющих материалах автоматически поддерживается и оказывается в определенном процентном отношении выше, чем давление в жидкости», и «основной принцип метода, обеспечивающего внешнюю опору для сосуда давления, при котором опора автоматически увеличивается с увеличением внутреннего давления» (Bridgman [1943, 1]) [4]).

Первоначально максимум давления у Бриджмена был таким же, как у некоторых из его непосредственных предшественников и современников, 6200 кгс/см². Это значение было увеличено до 10 000 кгс/см² в 1911 г. В ранних исследованиях требовалась разборка аппарата после каждого отдельного нагружения — медленный, скучный процесс, который, к счастью, стал ненужным. Прогресс последовательного улучшения аппарата Бриджменом хорошо документирован в его многих статьях и частично в его монографии 1931 г. «Физика высоких давлений», которая была переиздана с приложением (Bridgman [1949, 1]) в 1949 г., а также в его большой статье

[1]) Эти тома содержат собрания его трудов.

[2]) Это — дата первой публикации.

[3]) «Когда в 1905 г. я начал свою работу, я намеревался изучить некоторые оптические эффекты. Я не надеялся достичь в какой-то мере уровня давления, полученного Амага, поскольку дело касалось необходимости использовать стекло для обеспечения видимости. После того как мой аппарат был сконструирован и были сделаны некоторые подготовительные манипуляцин, произошел взрыв — вероятно, что-то случилось со стеклом — материалом наиболее непостоянных свойств. Взрыв разрушил существенную часть аппарата, которая была вновь заказана в Европе: Соединенные Штаты в то время еще не достнгли их современной степени независимости в области нзготовления такнх объектов. Во время ожидания замены прибора я попытался найти иное нспользованне аппарата: применить его для создания давления. Проектируя затвор для сосуда высокого давления так, чтобы можно было быстро собирать и разбнрать его, я увндел, что проект получился удачнее, чем первоначально предполагалось: сосуд автоматически закупоривался, когда давленне увеличивалось, так что не возннкало прнчнны нарушения герметичностн. Это открыло совершенно новый диапазон увелнчения уровня давления, ограниченного теперь только прочностью сосуда, а не опасностью возникновения течи. Мой первоначальный оптический экспернмент был вследствие этого заброшен; лабораторня аннулировала заказ на заменяемую часть аппарата, которая была уже изготовлена, и началось развнтие нового направлення. Я никогда не возвращался уже к первоначальной проблеме. Это был случай, когда настойчнвость в достиженнн цели не была бы хорошей тактикой».

[4]) Эти цнтаты представляют собой подписи под рис. 1 и 7 на стр. 3 и 18 оригннала соответственно, использованными в его лекцин в 1946 г. прн полученнн Нобелевской премин, н былн напечатаны (Bridgman [1948, 1]) на стр. 149 н 150, как рис. 1 и 2 с соответствующимн, указанными выше подпнсями.

1946 г., озаглавленной «Новое исследование в области высоких давлений» (Bridgman [1946, 1]), в которой описывалась работа, проводившаяся в течение пятнадцати лет после публикации его монографии [1]). Бриджмен дал также интересную краткую оценку своей работы «Общий обзор некоторых результатов в области высокого

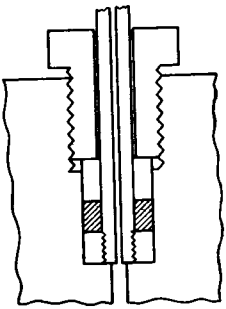


Рис. 4.41. Опыты Бриджмена (1943). Способ уплотнения, использованный в опытах.

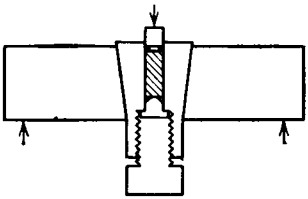


Рис. 4.42. Опыты Бриджмена (1943). Схема, иллюстрирующая основной принцип создания внешней опоры сосуда давления, при котором опора увеличивается с увеличением внутреннего давления.

давления» в своей лекции, прочитанной в Стокгольме в декабре 1946 г. при вручении ему Нобелевской премии по физике за этот год.

Бриджмен получил давление 12 000 кгс/см². Это давление, за исключением давления 21 000 кгс/см² в единичном эксперименте с водой, стало предельным максимальным давлением, полученным до 1930 г. В этом диапазоне давлений по производящей большое впечатление систематической экспериментальной программе, похожей на программу Вертгейма, Бриджмен исследовал зависимость объема и температуры жидкости от давления, процесс сварки под давлением, электрическое сопротивление под давлением, полиморфные превращения в твердых телах под давлением, влияние сжатия на термоэлектрические свойства, теплопроводность под давлением, вязкость под давлением и сжимаемость твердых тел.

Удивительная позиция Бриджмена по отношению к прикладной механике обнаружилась в его сообщении о том, что он только в 1923 г., т. е. через 18 лет после своего первого исследования в области высокого давления, обратился к изучению соотношения между объемом твердого тела и давлением, приложенным к телу. В реферативной статье для *American Scientist* (Bridgman [1943, 1]) после обсуждения сжимаемости жидкости, полиморфных превращений и термоэлектрических свойств Бриджмен пишет об исследовании сжимаемости твердых тел:

---

[1]) В этой публикации Бриджмен заметил, что на протяжении пятнадцати лет было опубликовано больше статей по предмету, чем за все годы перед монографией 1931 г. Этот факт — дань, в некотором отношении сомнительная, достижениям его пионерного исследования.

«До тех пор, пока опыты не были завершены, я не предпринял исследования вопроса, который с точки зрения сегодняшнего дня каждый пытался бы предположить наиболее простым из всех и наиболее скоро используемым в теории, а именно, вопрос о сжимаемости твердых тел, в частности металлов и простых солей. Причина того, почему это не было сделано, скорее заключается в том, что лишь относительно недавно появились некоторые стимулы сделать это и теоретически. В начале века считали, что последовательность, в которой следует изучать материю теоретически, такова: газы, жидкости, твердые тела. Однако с развитием теории структуры твердого тела около 1920 г. трудами Борна и других стало очевидным, что твердые тела, как и газы, просты, и что изучение жидкостей следовало бы оставить напоследок» (Bridgman [1943, 1], стр. 12).

В первые два с половиной десятилетия своих исследований Бриджмен достиг давления 12 000 кгс/см². Большое значение здесь имели опыты, в которых было установлено соотношение между гидростатическим давлением и изменением объема для 60 элементов и большого числа соединений [1]). Эти результаты вместе с анализом методики раннего периода исследований были описаны с огромной детализацией в монографии Бриджмена (Bridgman [1931, 1]).

Измеряя изменение длины железного стержня по сравнению с длиной сосуда давления и проделывая одновременно независимое измерение деформации самого этого сосуда, Бриджмен (Bridgman [1940, 1, 2], [1946, 1], [1949, 2]) получил величину абсолютной сжимаемости чистого железа, с помощью которой путем сравнения могли быть преобразованы в абсолютные значения результаты измерений разности деформаций сосуда и образцов из других материалов. Абсолютная сжимаемость многих изученных твердых тел, как было показано, определяется соотношением

$$-\frac{\Delta V}{V_0} = ap - bp^2, \tag{4.9}$$

где $p$ — измеренное гидростатическое давление, $\Delta V$ — измеренное соответствующее изменение объема, $V_0$ — начальный объем при атмосферном давлении, $a$ и $b$ — две экспериментальные константы, для которых Бриджмен табулировал значения для большого числа твердых тел.

На протяжении 1930 г., поднимая максимум давления от 12 000 до 30 000 кгс/см² и выше, Бриджмен проверил результаты своих измерений абсолютной сжимаемости железа. Он нашел серьезную несогласованность со своими прежними результатами. Он получил мало отличающееся значение для первой константы «$a$», но обнаружил, что значение второй константы «$b$» от ранее получавшейся отличается в три раза. Новые значения для железа даются формулой

$$-\frac{\Delta V}{V_0} = 5{,}826 \cdot 10^{-7} p - 0{,}80 \cdot 10^{-12} p^2, \tag{4.10}$$

---

[1]) Результаты исследования свойств 30 металлов в функции от температуры и давления были опубликованы в 1923 г. (Bridgman [1923, 1]). Статья содержала первые результаты длительного изучения сжимаемости твердых тел.

где $p$ — в кгс/см². Бриджмен исправил все ранее опубликованные значения двух констант в формуле (4.9), включая константы для многих твердых тел, данные в монографии (Bridgman [1931, 1], [1949, 1]). Он предложил следующие формулы для осуществления необходимых исправлений, которые следует делать, в основном когда речь идет о данных по сжимаемости, относящихся ко времени ранее 1940 г.:

$$a_{\text{новое}} = a_{\text{старое}} - 0{,}033 \cdot 10^{-7},$$
$$b_{\text{новое}} = b_{\text{старое}} - 1{,}56 \cdot 10^{-12} - a_{\text{старое}} \cdot 0{,}022 \cdot 10^{-7}.$$

В последующие годы Бриджмен занимался только табулированием наблюдаемого изменения объема в зависимости от измеренного давления. На протяжении последних 20 лет своей жизни он продолжал систематическое занятие физикой, получая все более высокое давление и добиваясь большей точности измерений.

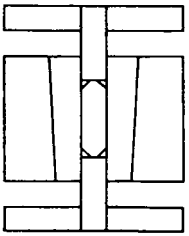


Рис. 4.43. Опыты Бриджмена (1942). Миниатюрный пистон из карболоя, использованный для достижения давления 100 000 кгс/см². Этот аппарат помещался в жидкость, находящуюся под высоким давлением в бо́льшем по размерам сосуде.

Мы должны особо отметить, что Бриджмен измерял изменение длины в единственном направлении, на основании этого измерения, предполагая изотропию, он вычислял изменение объема. Предположение об изотропии могло быть проверено в последующих измерениях путем поворота образца. Бриджмен, касаясь этого одномерного измерения, называет его «линейным сжатием». Чтобы определить изменение объема некубических монокристаллов, он с успехом проделал измерения в двух направлениях.

Используя миниатюрный аппарат (показан схематически на рис. 4.43), погружавшийся в жидкость в аппарате высокого давления, достигавшего 25 000 кгс/см² или более, Бриджмен (Bridgman [1942, 1]) к 1942 г. распространил свои исследования до давления 100 000 кгс/см². Цилиндр аппарата и два пистона были сделаны из карболоя. Задолго до того, как достигалось наивысшее давление, жидкости и газы превращались в твердые тела, следовательно, при давлении такого высокого порядка Бриджмен не мог более предполагать давление гидростатическим. В результатах, полученных при таких высоких давлениях, специалист, изучающий механику сплошной среды, вероятно, доведет некоторые возражения до требования обнаружить наличие некоторых компонентов напряжений и уметь их измерить. Бриджмен сам первый подчеркнул эту огра-

ниченность и важность, по-видимому, имеющих место, касательных напряжений.

Доводя сжимаемость твердых тел до такой высокой степени, Бриджмен интересовался прежде всего изучением переходов в функции отклика давление — объем. Встречаются переходы первого,

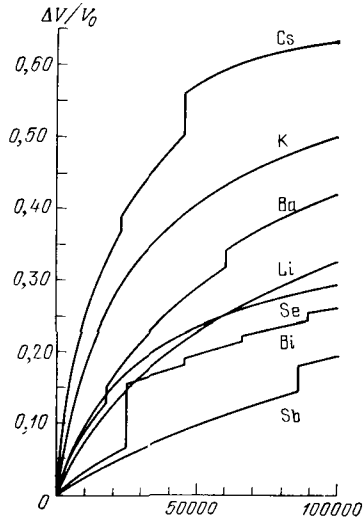



Рис. 4.44. Опыты Бриджмена (1948). Объемное сжатие образцов, изготовленных из различных химических элементов, до уровня давления, равного 100 000 кгс/см², демонстрирующее в некоторых случаях полиморфные переходы. Эти результаты экспериментов значительно отличаются от результатов, которые Бриджмен приводил в более ранних работах. По оси абсцисс отложено давление в кгс/см².

второго и третьего порядков: разрыв в значении объема при некотором уровне давления, разрыв в наклоне касательной к кривой давление — объем, не сопровождающийся изменением самого объема, и разрыв во второй производной функции давление — объем. В некоторых случаях переходы первого порядка оказались полиморфными. Исследование изменений в кристаллической структуре при очень высоком давлении, конечно, представляет большие экспериментальные трудности. Переходы второго порядка, которые, как мы увидим (Bell [1965, 2], [1967, 2], [1968, 1]), см. ниже разделы 4.18, 4.21, 4.32), являются весьма общими и важными при более общих напряженных состояниях, не так легко соотносились с преобразованиями фаз, как переходы первого порядка. На рис. 4.44 показаны примеры результатов исследования зависимости давление — объем; в некоторых из них переходы первого порядка происходили при давлениях, превосходящих уровень 100 000 кгс/см² (Bridgman [1948, 1], стр. 155; [1949, 1], стр. 421).

Описывая «линейное сжатие до 30 000 кгс/см² различных веществ, включая относительно несжимаемые субстанции», Бриджмен (Bridgman [1949, 2]) в 1949 г. представил экспериментальное объяснение переходов второго порядка или переходов второго рода, которые, как только что было сказано, проявляются в форме разрыва в значениях первой производной. В этой статье он табулировал

наблюдения для 25 элементов, 18 сплавов и межметаллических смесей, 20 материалов с кубической и некубической решеткой и 3 органических кристаллов. Затем он проанализировал данные для каждого вещества. В разделе о сжатии монокристалла никеля Бриджмен описал открытие перехода второго порядка.

«*Никель.* Получить ннкель в монокристаллической форме мне удалось благодаря любезностн доктора Бозорта. Поскольку монокристалл имел форму куба, достаточно было провести измерения в одном направленни. Первоисточником материала была Международная никелевая компания. Анализ материала не проводнлся, но чистота, по-виднмому, была сравнима с чистотой монокристалла железа (полученного также от доктора Бозорта), анализ которого был произведен позднее. Подобно кобальту он подвергался нагреву в водороде до уровня, блнзкого к точке плавления. На этом образце было проделано значительное число измерений, так как из первого измерения стало очевндно, что нмеется нечто, свойственное только никелю. Сначала было дважды приложено и выдержано давление 30 000 атм. Четыре серни нзмерений до 30 000 атм были сделаны сначала в аппарате, недостаточно чувствнтельном, затем было сделано нзмерение в усовершенствованном аппарате. При этом совпадение результатов не было достигнуто. Затем никель был отожжен нагреванием в течение часа до красного калення в баллоне в условиях вакуума и охлажден в печи. Далее с помощью усовершенствованного аппарата были сделаны два измерения прн 30 000 атм, затем трижды прнкладывалось и выдерживалось давление 30 000 атм без измерений и далее следовало финальное измерение при 30 000 атм. Во всех опытах с использованием усовершенствованного аппарата был обнаружен один и тот же факт — разрыв в значенни первой производной, илн переход второго рода. Параметры перехода второго рода изменялись при следующнх одно за другим приложениях давления; давление, при котором появился разрыв, колебалось между 10 000 и 20 000 кгс/см², и значенне самого разрыва также колебалось. Прн фннальном измерении величина разрыва достигла воего нанбольшего значения». (Bridgman [1949, 2], стр. 203; Сборник трудов 1964, 1], стр. 3947.)

Далее Бриджмен замечает:

«При 10 600 атм разрыв в значениях величины $\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)$ достиг $6{,}9\times$ $\times 10^{-8}$ (кгс/см²) в направленнн увелнчения сжимаемостн прн более высоком давлении». (Bridgman [1949, 2]).

Поясненная выше экспериментальная картина показана на рис. 4.45.

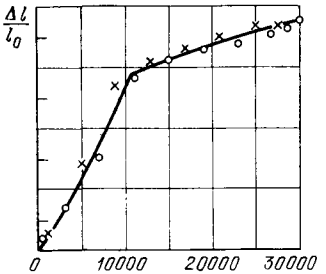
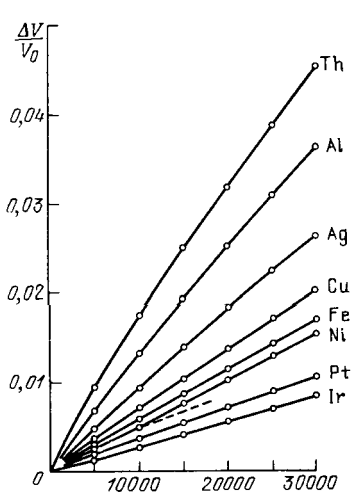



Рис. 4.45. Опыты Бриджмена (1949). Экспериментальные значения для относнтельного измеиения длины никелевого образца, показывающие переход «второго порядка». Кружки соответствуют значенням, наблюдавшимся при увеличенни давления, крестики — при уменьшенин давления. По оси абсцнсс отложено давление в кгс/см², по оси ординат — относительное удлинение $\Delta l/l_0$.

Я нанес на график рис. 4.46 данные Бриджмена, приведенные в таблицах, в осях давление — изменение объема для нескольких элементов, включая монокристалл никеля с переходом второго порядка при $p=10\,600$ кгс/см².

Аналогичные переходы второго порядка в резине (крестики) показаны на кривых давление — изменение объема для различных веществ при давлениях до 25 000 кгс/см² (рис. 4.47). Эти результаты заимствованы из таблиц, приведенных в статьях Бриджмена (Bridgman [1945, 1], [1949, 2]) 1945 и 1949 гг.



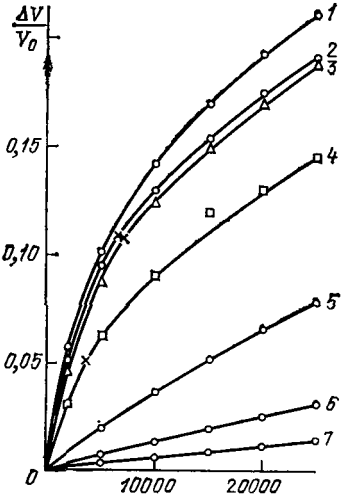




Рис. 4.46. Опыты Бриджмена (1949). Графики табулированных данных зависимости относительное изменение объема — давление для восьми из тридцати веществ, испытанных до давления 30 000 кгс/см². Виден переход второго порядка в никеле при 12 500 кгс/см². По оси абсцисс отложено давление в кгс/см², по оси ординат — относительное изменение объема $\Delta V/V_0$.

Рис. 4.47. Опыты Бриджмена (1945), (1949). Графики зависимости относительное изменение объема — давление для различных веществ, включая резину. Переходы второго порядка обозначены крестиками; *1* — резина из естественного каучука, *2* — резина из естественного каучука, испытывавшаяся после значительного употребления, *3* — бутиловый каучук, *4* — хлоропреновый каучук, *5* — NaCl, *6* — Al, *7* — железо. По оси абсцисс отложено давление в кгс/см², по оси ординат — относительное изменение объема $\Delta V/V_0$.

Еще ранее Бриджмен дал пример перехода третьего порядка, или разрыв в значении второй производной, для стекла $SiO_2$. Результаты по установлению зависимости давление — изменение объема (Bridgman [1939, 1]), которые он получил в 1939 г., показывают существование точки перегиба при 33 000 кгс/см², рис. 4.48.

Бриджмен (Bridgman [1939, 1]) привел также обнаруженное в этом опыте отклонение от линейности зависимости изменение объема — давление. Результаты опыта, представленные в виде графика, показаны на рис. 4.49. Виден острый пик этого перехода.

Переходы третьего порядка обычно наблюдаются в функциях отклика при путях нагружения с неравными главными напряжениями. Они впервые наблюдались Риккати (Riccati [1721, 1]) в 1721 г.

при испытании кетгута и других твердых тел. Кармарш (Karmarsch [1841, 1]) показал, что в кетгуте переходы третьего порядка связаны с началом остаточной деформации. Резина и ряд других твердых тел обнаруживают такое изменение кривизны графика зависимости сила — удлинение по другим причинам, нежели возникновение остаточной деформации, и, конечно, такие точки перегиба при одноосном сжатии обнаруживают металлы. Для отожженных металлов

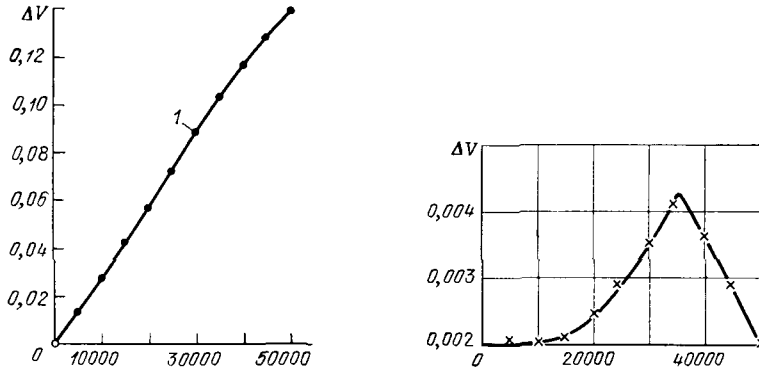



Рис. 4.48 Опыты Бриджмена (1939). Переход третьего порядка, наблюдаемый в зависимости давление — изменение объема для стекла ($SiO_2$) (отмечен цифрой *1*). По оси абсцисс отложено давление в кгс/см², по оси ординат — изменение объема в см³ ($\Delta V$).

Рис. 4 49. Опыты Бриджмена (1939). Отклонение от линейности зависимости приращение объема — давление при переходе третьего порядка (в стекле $SiO_2$), показанном на рис. 4.48. По оси абсцисс отложено давление в кгс/см², по оси ординат — изменение объема $\Delta V$.

при сжатии напряжение, при котором появляется перегиб, соответствует напряжению предела прочности в опыте на растяжение; сравнение при растяжении и сжатии проводилось для условного напряжения (определенного применительно к первоначальным размерам тела).

Согласно Бриджмену (Bridgman [1931, 1], [1949, 1], гл. VIII, стр. 223), переходы первого порядка, или полиморфные переходы, наблюдались впервые Маллардом и Ле Шателье в 1883 г. в зависимости $\sigma$ — $\varepsilon$ при сжатии (Mallard et Le Chatelier [1883, 1]). Переход во льду при атмосферном давлении был известен на протяжении значительного периода времени. Бриджмен был прав, придавая большое значение явлению перехода при гидростатическом воздействии. Как теперь известно (Bell[ 1968, 1]), такое явление перехода как при больших, так и при малых деформациях кристаллических твердых тел имеет место и при более общем виде напряженного состояния и является фундаментальным фактом для понимания природы определяющих уравнений, относящихся к такому классу материалов

## 4.13. Динамическая функция отклика для твердых деформируемых тел, находящихся под воздействием высокого давления

Естественным продолжением квазистатических исследований Бриджмена твердых тел при высоких давлениях явились работы, возникшие около 25 лет назад в связи с интенсивным интересом к отклику твердых тел на импульсы, вызванные нагрузкой от взрыва на плоской поверхности плиты. Стимулированный военной технологией второй мировой войны и превращенный более поздними индустриальными потребностями в новый промышленный метод, известный как взрывной, этот метод позволил продолжить фундаментальное исследование свойств, которое не под силу отдельному исследователю в маленькой лаборатории. Появление статей, написанных совместно более чем семью или восьмью авторами, иллюстрирует как высокую стоимость, так и «бригадный» характер экспериментального исследования, в котором единственный опыт может развеять тысячи долларов, составляющих стоимость аппаратуры и образцов.

Эксперимент заключается в нагружении твердого тела пиковым давлением, действующим в течение долей микросекунд, возбуждаемым посредством взрывов на его поверхности и превышающим в четыре-пять раз то, которое прикладывается квазистатическим способом. Для создания распространяющегося в плите плоского волнового фронта, параллельного плоскости поверхности, на которой сосредоточен взрыв, существенным является тип взрыва, пространственная форма эпюры возбуждаемого им давления и способ детонации. В процессе опыта исследовалось движение противоположной поверхности плиты и доньев просверленных углублений, расположенных на определенном расстоянии от этой противоположной поверхности. Благодаря наличию углублений разной высоты на основании измерений в двух точках определяется скорость распространения ударной волны. На основании полученной зависимости перемещения точек свободной поверхности плиты от времени можно получить только сумму скоростей падающей и отраженной волн.

В этом отношении экспериментальная ситуация аналогична ситуации, возникшей в экспериментах Дэвиса (Davies [1948, 1]), описанной выше в разделе 3.37 (ч. I). Проделав измерения перемещений в зависимости от времени на свободном конце бруса, Дэвис не мог интерпретировать эти данные, не используя результаты, вычисленные на основании некоторой частной теории, способной описать явление. Аналогично, если при проводимом мною исследовании конечных пластических деформаций я мог бы установить зависимость от времени перемещения на свободном конце цилиндрического образца, производя единственное измерение, выполняемое оптическими средствами, я должен был бы иметь теорию, применимую к волнам конечной амплитуды, чтобы интерпретировать полученные

данные. Однако в этих исследованиях я *экспериментально* получал профили волны динамически с помощью дифракционных решеток (Bell [1961, 3, 4] и см. ниже раздел 4.29), дающих информацию, необходимую для того, чтобы оценить численно такую зависимость перемещений поверхности от времени для интерпретации нелинейной разгрузки, какую обеспечивала теория Поххаммера — Кри, использованная Дэвисом.

Большинство экспериментаторов на протяжении двух десятилетий предполагали априори, что когда твердое тело подвергается действию сильного взрывного удара, оно ведет себя, по существу, подобно жидкости. Они сводили на нет влияние больших касательных напряжений, присутствующих в таком ударном фронте. Другое общее предположение заключалось в том, что независимо от ширины ударного фронта позади него возникает устойчивое состояние. При заданном приложенном давлении, для того чтобы получить скорость частицы, нужно предположить или продемонстрировать экспериментально, что, в отличие от отражения пластических волн от свободной поверхности, скорость частицы падающей волны на поверхности образца удваивается, как это предсказывается элементарной линейной теорией отражения удара при нормальном падении. Комбинируя измерения скорости волны и измерения максимума скорости частицы в решетке с предполагаемыми свойствами, можно расчетно получить зависимость давления от величины объема и сравнить эту зависимость с квазистатическими экспериментальными результатами Бриджмена (Bridgman [1949, 1]) в области пересечения уровней квазистатических давлений и давления низкой части ударной волны.

При таких сопоставлениях особенно важно распознать в диаграмме Гюгонио уровень давления, при котором происходит полиморфный переход. Кроме сверхупрощенной атомистической гипотезы,

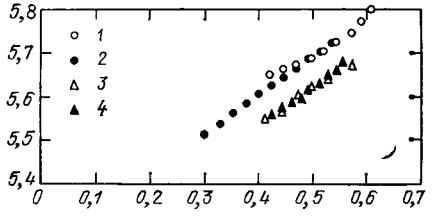



Рис. 4.50. Опыты Фаулза (1961). Зависимость скорости удара $U_S$ (мм/мкс) (экспериментальные данные) от конечной скорости свободной поверхности $U_{fs}$ (мм/мкс); *1* — опыт 5843 с упрочненным алюминием, *2* — опыт 6237 с упрочненным алюминием, *3* — опыт 6054 с отожженным алюминием, *4* — опыт 6926 с отожженным алюминием. По оси абсцисс отложена конечная скорость свободной поверхности $U_{fs}$ в мм/мкс, по оси ординат — скорость удара $U_S$ в мм/мкс.

вызывающей в наши дни первостепенный интерес, понимание поведения твердых тел при сильном взрывном ударе находится в зачаточном состоянии и, вероятно, останется в таком состоянии до тех пор, пока не будут изобретены эксперименты, не требующие грубых аппроксимаций для интерпретации результатов, а дающие непосредственно распределения напряжений и деформаций, которые будут положены в основу надежных определяющих уравнений.

В 1961 г. Фаулз (Fowles [1961, 1]) измерил скорости ударной волны, падающей под острым углом к свободной поверхности, и скорости свободной поверхности посредством высокочастотных фотографий. Фаулз выполнил эксперименты, представляющие интересную вариацию контактной иголочной техники на закаленном и отожженном алюминии 2024 при давлениях, не превышающих 50 килобар. Он пытался исследовать как упругое, так и пластическое поведение

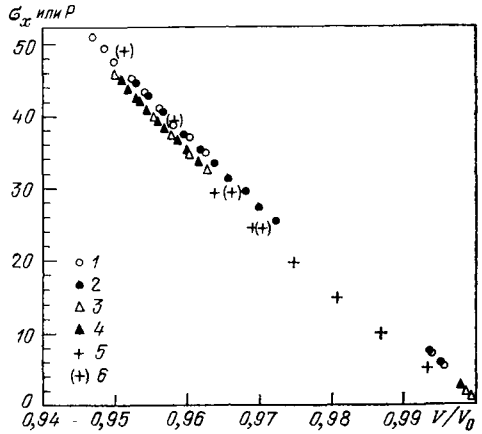



Рис. 4.51. Опыты Фаулза (1961). Динамические и квазистатические экспериментальные точки Гюгонио; *1* — опыт 5843 с упрочненным алюминием, *2* — опыт 6237 с упрочненным алюминием, *3* — опыт 6054 с отожженным алюминием, *4* — опыт 6926 с отожженным алюминием, *5* — опыты Бриджмена с алюминием при давлении 0 — $30\times10^3$ кгс/см$^2$, *6* — опыты Бриджмена с алюминием при давлении $25-100\cdot10^3$ кгс/см$^2$; значения $\sigma_x$ или $P$ — в килобарах.

твердого тела при ударных волнах. Несмотря на очень высокие скорости деформации, которые ему удалось получить, он, как и я, не нашел для чисто пластических волн (Bell [1956, 1], [1960, 2]) доказательства значительного влияния скорости деформации.

На рис. 4.50 показаны экспериментальные скорости удара $U_s$ в мм/мкс в зависимости от конечной скорости $U_{fs}$ свободной поверхности также в мм/мкс. На рис. 4.51 показаны экспериментальные точки Гюгонио, подсчитанные на основании этих данных и подвергнутые сравнению, как замечено выше, с результатами квазистатических измерений Бриджмена в опытах с алюминием.

## 4.14. Дальнейшее изучение эксперимента Геста: Лоде (1926) и Тэйлор и Квинни (1931)

Оставляя специальный случай гидростатического давления и возвращаясь к экспериментам, ставящим целью более основательно исследовать функции отклика, имеющие место при ненулевых компонентах напряжений, обратимся к докторской диссертации Лоде (Lode [1926, 1]) [1] в гёттингенском университете. Эксперименты Лоде были возвращением через 26 лет к более ограниченному варианту исследования Геста (Guest [1900, 1]). Лоде подверг осевому растяжению

[1] Предмет экспериментов был подсказан Лоде Арпадом Людвигом Надаи.

в комбинации с внутренним давлением трубки из стали, меди и никеля. Варьируя отношение значений внутреннего давления и осевой нагрузки, он мог получать различные отношения двух главных напряжений. В этих экспериментах третье главное напряжение фактически не равно нулю, как это обычно предполагается. Напряжение в радиальном направлении изменяется по толщине тонкой стенки трубки от давления внутри трубки до атмосферного давления на ее внешней поверхности. Большой градиент одного из главных напряжений накладывает логические ограничения на интерпретацию экспериментальных результатов, особенно когда выбранный путь нагружения вызывает на протяжении испытания большое изменение внутреннего давления.

Для определения деформаций Лоде в процессе эксперимента производил одновременные измерения изменений и длины, и диаметра. Он проводил эксперименты на стандартной разрывной испытательной машине с насосом высокого давления промышленного изготовления. Для завершения исследования возникновения пластического течения Лоде провел также небольшое число испытаний на растяжение и растяжение с кручением.

Ставшие известными как коэффициенты Лоде $\mu$ и $\nu$ были введены следующим образом:

$$\mu = 2\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}\right)-1, \tag{4.11}$$

где[1] $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, и

$$\nu = 2\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\right)-1, \tag{4.12}$$

где $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ и $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ — главные напряжения и главные деформации. Лоде исследовал широкий спектр разностей главных напряжений. Заимствованные у Лоде экспериментальные результаты показаны на хорошо известной диаграмме, представленной на рис. 4.52.

Вводя индексы 1, 2 и 3 для осевого, тангенциального и радиального направлений соответственно и пренебрегая градиентом радиальных напряжений, возникающим при внутреннем давлении, Лоде полагает $\sigma_3=0$, тогда $\mu=2\sigma_2/\sigma_1-1$. При отсутствии внутреннего давления $\mu=-1$, и при $\sigma_2=\sigma_1$ $\mu=1$. Как подчеркнули Тэйлор и Квинни (Taylor and Quinney [1931, 1]), большое отклонение экспериментальных точек от прямой $\mu=\nu$, наблюдаемое при простом растяжении, т. е. при $\mu=-1$, было вызвано либо экспериментальной ошибкой, либо анизотропностью трубок. Поэтому в 1931 г. Тэйлор и Квинни пытались проверить заключение Лоде о том, что скорее повсюду имеет место неравенство $|\nu|<|\mu|$, чем равенство $\nu=\mu$. Эти эксперименты Тэйлора и Квинни с алюминием, медью, свинцом, стеклом, кадмием, малоуглеродистой и безуглеродистой сталями, результаты которых по существу подобны результатам Лоде (кроме стекла и свинца), стали экспериментами, на которые широко ссы-

лались на протяжении четырех десятилетий, иногда даже ссылались как на окончательное исследование поверхности текучести. Позднее в разделе 4.22 в связи с интерпретацией некоторых экспериментов в исследовании Тэйлора и Квинни возникнут серьезные вопросы.

Тэйлор и Квинни видели, что главные недостатки в экспериментах Лоде заключались, во-первых, в неточности метода выяснения того обстоятельства, является ли материал их трубчатых образцов

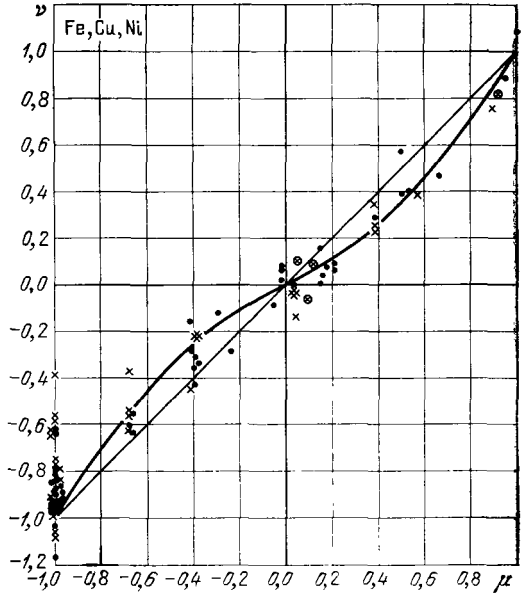



Рис. 4.52. Опыты Лоде (1926) Экспериментальные результаты испытания трубок на совместное действие растяжения и внутреннего давления. По оси абсцисс отложен коэффициент Лоде-$\mu$ для напряженного состояния, по оси ординат — коэффициент Лоде $\nu$ для деформированного состояния.

действительно изотропным, и, во-вторых, в возможных ошибках, проистекающих из использованного метода измерения диаметра деформирующихся трубок. Они поставили эксперимент, в котором надеялись преодолеть одновременно обе эти трудности, измеряя изменение внутреннего объема трубок в процессе испытаний на совместное кручение и растяжение. Их аппарат показан на рис. 4.53.

Для последующего нужно заметить, что система нагружения для создания растяжения у Тэйлора и Квинни не была свободной от связи с системой, возбуждающей кручение, вследствие чего груз $W$ поворачивался в процессе приложения крутящего момента. Медные трубки отжигались 36 ч при температуре 650 °С. Трубки из алюминия, имеющего промышленную чистоту от 99,7 до 99,8%, также помещались в условия отжига. Трубки из мягкой стали отжигались в вакууме при температуре около 920 °С.

Эксперимент состоял в нагружении образца при растяжении до некоторой полной растягивающей нагрузки $W$, в процессе которого Тэйлор и Квинни измеряли внутренний объем, наблюдая в капил-

лярной трубке уровень воды, заполнявшей внутренность трубки. Изымая трубки, показывавшие большое изменение объема, они затем понижали нагрузку до значения, составлявшего некоторую долю начальной нагрузки, и закручивали трубку до тех пор, пока не обнаруживали пластическое течение [1]). Тэйлор и Квинни сравнивали наблюдаемые изменения объема с вычисленными на основе соотношений линейной упругости и известного значения коэффициента Пуассона, пока твердое тело предполагалось деформирующимся в соответствии с абсолютной упругостью, и в предположении очень малого изменения плотности, когда твердое тело

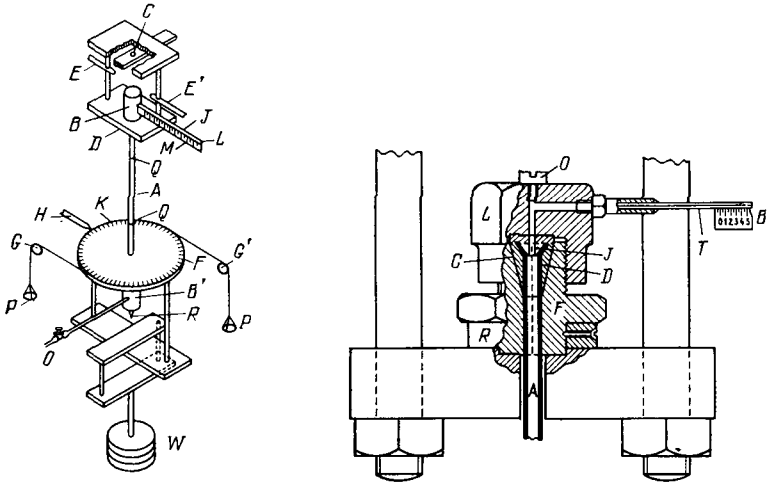



Рис. 4.53. Опыты Тэйлора и Квинни (1931). Аппарат для испытания трубки на совместное растяжение и кручение.

деформировалось пластически. Они обнаружили, что для всех твердых тел, для которых они делали такие измерения, экспериментальные значения не согласовывались с вычисленными. Обсудив различные возможные варианты объяснения наблюдаемых различий и сославшись на изучение влияния условий закрепления для интерпретации изменения объема, наблюдавшегося при чистом кручении (это с очевидностью показало, что они не были знакомы с работой Вертгейма о кручении в 1857 г.), Тэйлор и Квинни более или менее произвольно предположили, что источником несходства было отсутствие изотропии в образцах. Если согласиться с этим допущением, то значение их результатов, конечно, становится значительно меньшим, поскольку они не предприняли детального исследования анизотропии, которая, как они заключили, имела место.

---

[1]) Найденная таким образом поверхность текучести зависела от точности измерений. По этой же причине, как мы отмечали, Баушингер 50 лет назад пытался определить поверхность текучести более точно.

Как мы видели в предыдущих главах (ч. I) данного исследования, на протяжении примерно полутораста лет каждый важный эксперимент с изотропными телами, когда данные эксперимента вступали в противоречие с популярными в соответствующий момент времени теоретическими предположениями, рано или поздно подвергался критике на том основании, что образцы были анизотропными. В некоторых случаях такая критика могла быть оправдана. Меньшинство экспериментаторов таких, как Вертгейм, Фохт, Грюнайзен, Бриджмен, Тэйлор и Квинни, с помощью дополнительных измерений во время выполнения своих экспериментов пытались оградить себя от подобной критики в будущем. То, что Тэйлор и Квинни не

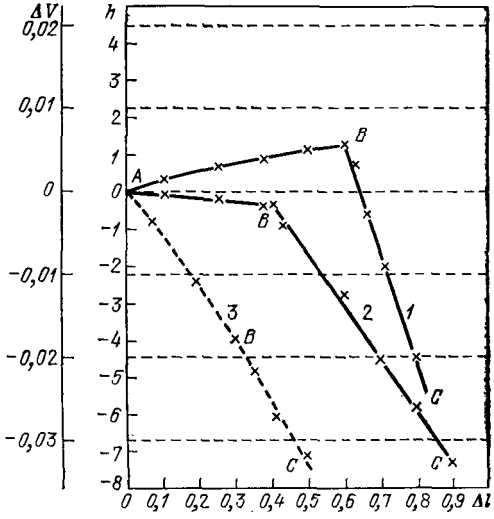



Рис. 4.54. Опыты Тэйлора и Квинни (1931). Определение внутреннего объема при исследовании изотропии медных и алюминиевых полых трубок. По оси абсцисс отложено $\Delta l$ — полное удлинение (в дюймах) трубки длиной 11,5 дюйма. По левой шкале оси ординат отложено $\Delta V$ — изменение объема в см³. По правой шкале ординат отложен $h$ — уровень мениска в капилляре в дюймах; *1* — алюминиевая трубка, $m=0{,}60$; *2* — медная трубка, $m=0{,}65$; *3* — медная трубка (крупнозернистая медь), $m=0{,}37$; $AB$ — только растяжение; $BC$ — растяжение с кручением. Вниз от нуля по оси ординат — уменьшение объема, вверх — увеличение.

полностью достигли успеха в этом вопросе, стало ясным из обсуждения их исследования в последующей литературе. Однако в их случае справедливость упреков была относительной. Насколько малая анизотропия имеет значение? На рис. 4.54 показаны изменения объемов при чистом кручении (от $A$ до $B$) алюминиевой трубки, объем которой незначительно увеличивался, и медной трубки, объем которой незначительно уменьшался по сравнению с трубкой из крупнозернистой меди, в которой наблюдалось относительно большее изменение объема. Точка $B$ в каждом отдельном случае обозначала начало совместного растяжения и кручения. В процессе наблюдений, если изменение объема в районе от $A$ до $B$ при кручении характеризовалось тем же значением, что и изменение объема в районе от $B$ до $C$ при совместном кручении и растяжении, Тэйлор и Квинни браковали трубки. Таким образом, две из всех трубок на рис. 4.54 были приняты, а третья, по-видимому, была отвергнута.

Такие измерения изменения объема напоминают эксперименты Баушингера со сталью и литым железом, проводившиеся в 1880 г. Поскольку интересно сравнить результаты Тэйлора и Квинни, полученные в 1931 г. (Taylor and Quinney [1931, 1]), с результатами их предшественника в XIX веке (Bauschinger [1979, 1]) (см. выше (ч. I) рис. 2.36), я включил рис. 4.55. На этом рисунке показано изменение объема отожженной мягкой стали и обезуглероженной мягкой стали, подвергавшихся конечной деформации. В отожженной мягкой стали наблюдались бóльшие изменения объема, что полвека ранее показалось странным Баушингеру [1]).

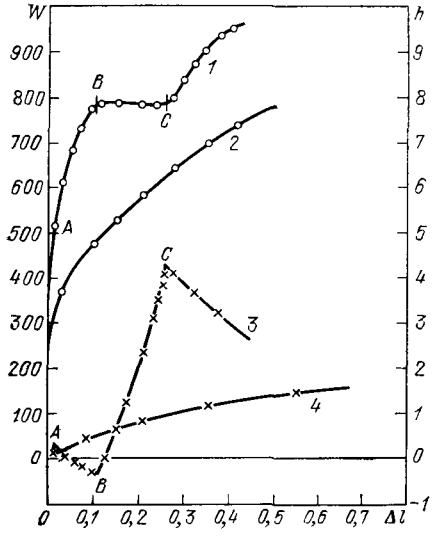



Рис. 4.55. Опыты Тэйлора и Квинни (1931). Изменение внутреннего объема трубки из мягкой стали и обезуглероженной стали, показанное в рамках зависимости нагрузка — полное удлинение. *1* — диаграмма растяжения для мягкой отожженной стали, *2* — диаграмма растяжения для мягкой обезуглероженной стали, *3* — график изменения объема в зависимости от удлинения для мягкой стали, *4* — график изменения объема в зависимости от удлинения для обезуглероженной мягкой стали. Вдоль оси абсцисс отложено значение $\Delta l$ — общее удлинение (в дюймах) трубки длиной 11,5 дюйма, вдоль оси ординат (левая шкала) отложен $W$ — груз (мертвая нагрузка) в фунтах; вдоль оси ординат (правая шкала) отложены показания по мениску в капилляре в дюймах ($h$). Вниз от нуля на оси ординат на кривой *3* — уменьшение объема, вверх — увеличение.

Рассматривая значения $m$ от 0,1 до 0,9 для алюминия, меди, свинца, кадмия, стекла, мягкой стали и малоуглеродистой мягкой стали, Тэйлор и Квинни получили диаграмму Лоде, показанную на рис. 4.56, на которой дано поведение $\mu$ в функции от $\nu$. Отклонения от прямой линии согласовывались с наблюдениями Лоде (Lode [1926, 1]), но результаты Тэйлора и Квинни были более ограниченными, так как они рассмотрели только половину области, исследованной Лоде или Гестом в оригинальном эксперименте.

---

[1]) Принято ссылаться на результаты экспериментов с гидростатическим давлением как на демонстрацию того факта, что при пластической деформации имеет место только небольшое изменение объема. Более современное исследование, которое будет обсуждаться в разделе 4.35, показывает, что в действительности имеются значительные изменения объема, которые связаны с большой деформацией, возникающей при нагружении с неравными главными напряжениями.

Однако более важным, чем упомянутые результаты, аналогичные результатам Лоде, было исследование Тэйлором и Квинни поверхности текучести, проведенное с целью сравнить гипотезу максимального сдвига (максимального касательного напряжения; — А. Ф.) Геста (названную Тэйлором и Квинни гипотезой Мора после того, как Отто Мор рассмотрел критерий разрушения) и гипотезу Максвелла — Мизеса максимума энергии изменения формы. Эти результаты показаны на рис. 4.57, 4.58 и 4.59 для трубок из меди, алюминия и различных видов мягкой стали. Тэйлор и Квинни получили конкретное доказательство справедливости гипотезы Максвелла — Мизеса для меди и алюминия, факт, теперь полностью установленный на основании последовавших экспериментов (Bell [1968, 1]). Как можно видеть на рис. 4.59, данные Тэйлора и Квинни для мягкой стали, не согласуясь с гипотезой Геста максимального сдвига, не были в полном согласии и с гипотезой Максвелла—Мизеса. Более поздние эксперименты (Bell [1968, 1]) показали, что отожженная мягкая сталь не отличается в этом отношении от меди и алюминия. В некоторых случаях эсперименты Тэйлора и Квинни опровергали гипотезу максимального сдвига Геста для этих материалов.

Эксперимент Геста (Guest [1900, 1]), обсуждавшийся Тэйлором и Квинни (Taylor and Quinney [1931, 1]), содержал фундаментальные трудности. Нагружение поликристаллического твердого тела по некоторому пути до возникновения в нем остаточной деформации, разгрузка, происходящая по тому же пути и повторное нагружение по новому пути требуют выявления начала остаточной деформации в некоторой точке на новом пути нагружения. Все проблемы, которые занимали Ходкинсона (Hodgkinson [1843, 1], [1844, 1]), Вертгейма (Wertheim [1842, 1], [1844, 1(a), (b), (c)], [1857, 1]), Талена (Thalen [1865, 1]), Тарстона (Thurston [1874, 2], [1876, 1]), Баушингера (Bauschinger [1881, 1], [1886, 1]) и многих других при установлении предела упругости при одноосном напряженном состоянии усугублялись при увеличении количества ненулевых компонентов напряжений. Чем выше точность измерений, тем труднее установить, когда происходит пересечение пути нагружения с искомой поверхностью текучести. Детальное исследование полностью отожженных материалов демонстрирует, что в лучшем случае существует область текучести, в которой компоненты деформации непредсказуемы; это напоминает проблемы, которые дали толчок определению Баушингером предела упругости при простом осевом нагружении.

Тэйлор и Квинни предложили и выполнили эксперимент, который исключил трудности, присущие эксперименту Геста. Они нагружали образцы по двум различным путям простого нагружения до очень больших деформаций. Затем, предполагая известной гипотезу пластичности, они выполняли вычисления, используя значения измеренных напряжений и деформаций при одном пути нагружения, чтобы предсказать значения для другого пути нагружения.

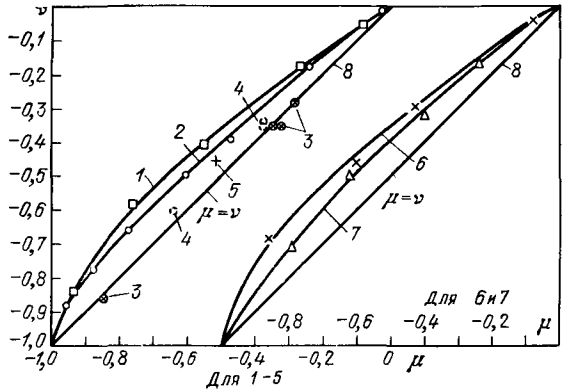



Рис. 4.56. Опыты Тэйлора и Квиннн (1931). Экспериментальные результаты в форме диаграммы Лоде, показывающне сходство отклоиення от лннейности в зависимости μ—ν с ранее наблюдавшимся Лоде; *1* — алюминий, *2* — медь, *3* — стекло, *4* — свинец, *5* — кадмий, *6* — мягкая сталь, *7* — обезуглероженная мягкая сталь, *8* — прямая μ=ν. Вдоль оси абсцисс (как левая, так и правая группы кривых) отложены значеиия коэффициента Лоде μ. Вдоль оси ординат — коэффициента Лоде ν.

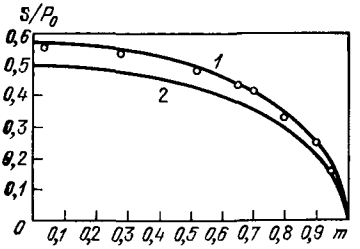
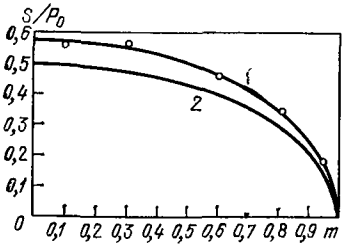



Рис. 4.57. Опыты Тэйлора и Квиннн (1931) Сравнение экспериментальных результатов по совместиому растяжению и кручеиию медиых трубок (кружки) с результатами на осиове гипотезы Максвелла — Мизеса и гипотезы максимального сдвига (максимальиого касательиого напряжения, — *А. Ф.*) Геста (изванной гипотезой Мора). *1* — эллипс Мизеса, $S/P_0=\sqrt{\frac{(1-m^2)}{3}}$; *2* — эллипс Мора, $S/P_0=\sqrt{\frac{(1-m^2)}{4}}$.



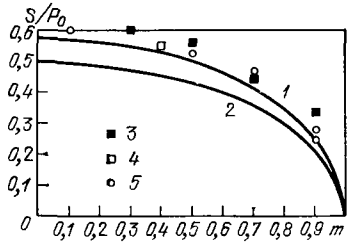




Рис. 4.58. Опыты Тэйлора и Квинии (1934). Сравнеиие экспериментальиых результатов по совместиому растяжению и кручению алюминиевых трубок (кружки) с гипотезой Максвелла — Мизеса и гипотезой максимального сдвига (максимального касательного напряжеиия; — *А. Ф.*) Геста (названиой гипотезой Мора). *1* — эллипс Мизеса, $S/P_0=\sqrt{\frac{(1-m^2)}{3}}$; *2* — эллипс Мора, $S/P_0=\sqrt{\frac{(1-m^2)}{4}}$.

Рис. 4.59. Опыты Тэйлора и Квиннн (1931); *1* — эллипс Мизеса $S/P_0=\sqrt{\frac{(1-m^2)}{3}}$; *2* — эллнпс Мора $S/P_0=\sqrt{\frac{(1-m^2)}{4}}$; *3* — трубки из обезуглерожжеиной мягкой стали, крупные зерна; *4* — трубкн из обезуглерожженной мягкой стали, мелкие зерна; *5* — трубкн из мягкой стали, мелкие зериа.

Тэйлор и Квинни выбрали для сравнения пути чистого растяжения и чистого кручения полых трубок из отожженной поликристаллической меди. Они использовали кривую напряжение — деформация, полученную в опытах на кручение, для отыскания функций отклика напряжение — деформация при растяжении, показанных на рис. 4.60, на основании гипотезы Максвелла — Мизеса и гипотезы Геста — Треска, которую Тэйлор и Квинни считали гипотезой Мора. Сравнение результатов, полученных на основании этих двух гипотез, с прямыми наблюдениями в опытах на растяжение показали, что, по-видимому, ни одна из гипотез не согласуется с экспериментальными фактами.

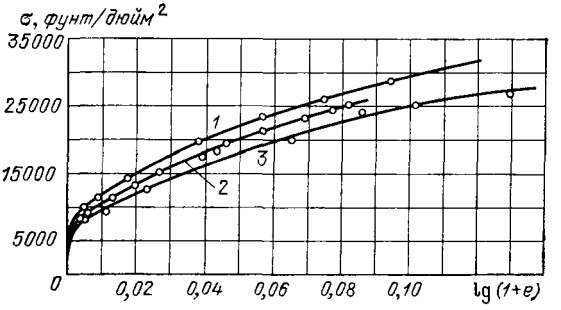



Рис. 4.60. Опыты Тэйлора и Квинни (1931). Результаты экспериментов по кручению и растяжению. *1* — гипотеза Мора, *2* — непосредственное наблюдение, *3* — гипотеза Мизеса.

Этот результат находился в прямом противоречии с результатом, который Тэйлор и Квинни получили из эксперимента Геста. На основании эксперимента последнего они заключили, что гипотеза Максвелла — Мизеса хорошо описывает поверхность текучести для отожженной меди. Следует подчеркнуть, что в эксперименте Геста уровень начального нагружения, а отсюда и рассматриваемая поверхность текучести, произвольны, т. е. начальная пластическая деформация может быть того же порядка, что и пластическая деформация во втором эксперименте с непрерывным нагружением до большей деформации. Однако разгрузка и соответственно повторное нагружение по другим путям до вновь достигаемой поверхности текучести вызывают лишь малую деформацию, поэтому результаты были даны в долях условного напряжения и условной деформации. В противоположность этому в эксперименте второго типа Тэйлор и Квинни описали наблюдения в условных напряжениях и логарифмической (истинной) деформации. Следуя анализу Мора, Тэйлор и Квинни сравнили сдвиговую деформацию $s$ при испытании на кручение с величиной $\lg(1+e)$, где $e$ подобно $s$ относится к исходным размерам образца.

Ниже на рис. 4.104 раздела 4.22 (см. также Bell [1968, 1]) я покажу, что если пересчитать данные Тэйлора и Квинни, приведенные на рис. 4.60, так, чтобы напряжения и деформации при растяжении и кручении определялись по отношению к недеформи-

рованному состоянию тела, то гипотеза Максвелла — Мизеса точно согласуется с экспериментом. Измерения Тэйлора и Квинни на отожженной меди в эксперименте Геста и в их собственном эксперименте при непрерывном нагружении до большой деформации, таким образом, согласуются, если все напряжения и деформации устанавливаются по отношению к недеформированному телу в отожженном состоянии (Bell [1971, 2]; см. ниже раздел 4.35). В инженерной литературе напряжения и деформации, определенные таким образом, обычно называются условными напряжениями и условными деформациями в противоположность терминам «истинное» напряжение и «истинная» деформация, которые относятся к текущей конфигурации деформирующихся тел.

### 4.15. О соотношении между функциями отклика в случае больших деформаций при различных путях простого нагружения: эксперименты Е. А. Дэвиса с поликристаллическими телами (1943—1945)

Сравнение функций отклика поликристаллического твердого тела при путях нагружения, соответствующих чистому растяжению и чистому кручению, осуществлялось многими исследователями, начиная с Тарстона в XIX веке. Среди тех, кто выполнял такие сравнительные опыты в XX веке, был Е. А. Дэвис (1937 г.). Результаты экспериментов Дэвиса были представлены в форме зависимости между напряжением Коши (или напряжением, отнесенным к деформированной площади) и логарифмической (истинной) деформацией. Если результаты Дэвиса пересчитать в условные напряжения и деформации, то получится поверхность нагружения Максвелла — Мизеса с параболическими зависимостями напряжения — деформации, находящимися в хорошем количественном согласии с определяющими уравнениями, выведенными позднее для описания больших деформаций отожженных кристаллических тел (Bell [1968, 1], см. раздел 4.35).

В 1943 г. Дэвис провел серию экспериментов с отожженной поликристаллической медью (Davis [1943, 1]) [1]) и двумя годами позже со среднеуглеродистой сталью. В этих опытах он прежде всего сделал одно из самых важных экспериментальных наблюдений из числа появившихся после оригинальной работы Треска. Он внимательно

[1]) Требование ускорения постройки кораблей во время второй мировой войны привело к использованию полностью сварных конструкций. Когда в некоторых из этих кораблей неожиданно возникало разрушение в обшивке, в попытке найти причину разрушения были развернуты интересные программы прикладных исследований. Среди них были работы многих исследователей в нескольких лабораториях по экспериментальному изучению разрушения тонкостенных трубок при различных путях нагружения с более чем одним ненулевым главным напряжением, т. е. образцы подвергались нагружению, которое среди инженеров того времени именовалось «комбинированным напряженным состоянием».

но изучил отклик твердого тела при большой деформации и многих путях нагружения в промежуточной области Треска пластических деформаций перед разрушением.

Дэвис помещал полые трубки из отожженного поликристаллического материала в обычную гидравлическую испытательную машину. Чтобы получить более чем одно ненулевое главное напряжение, он соединял исследуемую трубку с насосом высокого давления, имеющим измерительную систему, синхронизированную с гидравлической испытательной машиной, так, чтобы внутреннее давление в трубке и осевая растягивающая нагрузка на трубку производила простое нагружение при любых соотношениях между двумя главными напряжениями в тангенциальном и осевом направлениях. Обозначив через $\sigma_1$, $\sigma_2$ и $\sigma_3$ главные напряжения соответственно в осевом, тангенциальном и радиальном направлениях, причем, имея в виду всегда, кроме двух путей нагружения, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, Дэвис сравнивал следующие значения отношения $\sigma_2/\sigma_1$: 0, 1/4; 3/8; 1/2; 3/4 и 1.

Наблюдения за разрушением среднеуглеродистой стали показали необходимость изучения ряда путей простого нагружения в окрестности отношения $\sigma_2/\sigma_1=0{,}800$. Для этого материала, кроме опытов при значениях отношения $\sigma_2/\sigma_1=0$; 0,50; 0,750 и 1,000, Дэвис измерял большие деформации для путей нагружения, имеющих отношение $\sigma_2/\sigma_1=0{,}762$; 0,775; 0,800 и 0,875. В добавление к изучению путей нагружения, при которых максимальное главное напряжение действовало в осевом направлении, Дэвис исследовал пути нагружения, в которых максимальное главное напряжение $\sigma_1$ действовало в тангенциальном направлении. Это имело место либо при действии одного только внутреннего давления в замкнутой по торцам трубке; при этом $\sigma_2/\sigma_1=1/2$, либо при таком нагружении цилиндрического образца, когда осевая нагрузка передавалась непосредственно на трубку, внутреннее же давление возбуждалось при помощи U-образной кожаной манжеты и передавалось лишь на боковую внутреннюю поверхность трубки, вызывая в ней лишь тангенциальные напряжения $\sigma_1$, т. е. создавая $\sigma_2/\sigma_1=0$.

В своей статье в 1943 г. Дэвис предположил, что радиальное напряжение $\sigma_3$ было равно нулю, принимая во внимание, что существует большой градиент по толщине тонкостенной трубки от давления внутри трубки до почти нулевого атмосферного давления снаружи. Отношение максимального значения радиального напряжения к тангенциальному главному напряжению $\sigma_2$ изменялось с изменением толщины трубки. Для диаметров трубок, которые использовал Дэвис [1], это отношение было равно примерно $^1/_{20}$.

Ошибка, внесенная тем, что пренебрегаемое радиальное напряжение на самом деле не равно нулю и имеет градиент по толщине стенки трубки, изменяется при различных путях нагружения от нулевого значения при $\sigma_2/\sigma_1=0$ до максимального значения при $\sigma_2/\sigma_1=1$.

В статье 1945 г. Дэвис (Davis [1945, 1]) предложил ввести для главного напряжения в радиальном направлении усредненное значение, равное половине внутреннего давления $p$, т. е. $\sigma_3=p/2$, вместо использования предположения $\sigma_3=0$. Для параметров трубок Дэвиса напряжение $|\sigma_3|$ было приблизительно равно $^1/_{10}\sigma_2$. Влияние *градиента* радиального напряжения на большие пластические деформации при этом типе испытаний неизвестно. Так что это не самый большой вклад, какой можно было сделать на основании сравнения опытных данных для тех нагружений, в которых существует градиент напряжений, и для нагружений, в которых его нет, т. е. сравнения, с одной стороны, таких нагружений, как чистое растяжение и растяжение с кручением, а с другой стороны, воздействия на трубку растяжения и кручения, к которым для сохранения постоянного объема добавлено внутреннее давление, т. е. для тех воздействий, которые Дэвис исследовал в 1955 г. (Davis [1955, 1]) на образцах из среднеуглеродистой стали и влияние которых сравнивал с результатами своих опытов 1945 г.

В экспериментах 1943 и 1945 гг. Дэвис измерял изменение длины в осевом направлении и изменение диаметра трубки по мере роста напряжений в процессе нагружения. Чтобы достичь большей точности и чтобы минимизировать личную опасность, существующую в этом типе опытов, он делал измерения после разгрузки, следующей за каждым приращением напряжения возрастающего в пластической области. (Напомним, что это был тот же тип циклического нагружения, который в XIX веке для реализации испытаний на простое растяжение использовался со времени Герстнера и Ходкинсона в 1820 г. и позднее, когда Тарстон ввел испытательные машины с самопишущим устройством.)

Дэвис не измерял изменяющуюся толщину стенки трубы и, таким образом, к сожалению, не знал деформации в третьем главном направлении. Произвольно, без измерений, он предположил, что пластическая деформация изотропна и на этом основании вычислил третью главную деформацию, исходя из измерений в осевом и тангенциальном направлениях.

Чтобы убедиться, что трубчатые образцы были изотропны, Дэвис сравнил функции отклика образцов, вырезанных из трубы в продольном и в тангенциальном направлениях, с функцией отклика для всего трубчатого образца. При всех деформациях, а также и при разрушении он получал результаты, имеющие очень большую близость в деталях к функции отклика.

В развитии представления о больших деформациях кристаллических твердых тел значение экспериментов Дэвиса состояло в том, что для сравнения результатов при очень большом числе путей нагружения он выбрал две функции отклика: во-первых, зависимость «истинного» октаэдрического касательного напряжения $\bar{\tau}_0$ от «истинного» октаэдрического сдвига $\bar{\gamma}_0$, и, во-вторых, зависимость «истинного» максимального касательного напряжения $\bar{\tau}_2$ от «истин-

ного» максимального сдвига $\bar{\gamma}_2$. Все упомянутые величины выражаются следующими формулами:

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2)^2+(\bar{\sigma}_2-\bar{\sigma}_3)^2+(\bar{\sigma}_3-\bar{\sigma}_1)^2},$$

$$\bar{\gamma}_0 = \frac{2}{3}\sqrt{(\bar{\varepsilon}_1-\bar{\varepsilon}_2)^2+(\bar{\varepsilon}_2-\bar{\varepsilon}_3)^2+(\bar{\varepsilon}_3-\bar{\varepsilon}_1)^2},$$

$$\bar{\tau}_2 = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_3-\bar{\sigma}_1),\quad \bar{\gamma}_2 = \bar{\varepsilon}_3-\bar{\varepsilon}_1.$$

На рис. 4.61 и 4.62 показаны результаты, полученные на меди при восьми различных путях нагружения для «истинного» октаэдрического касательного и «истинного» максимального касательного напряжений соответственно.

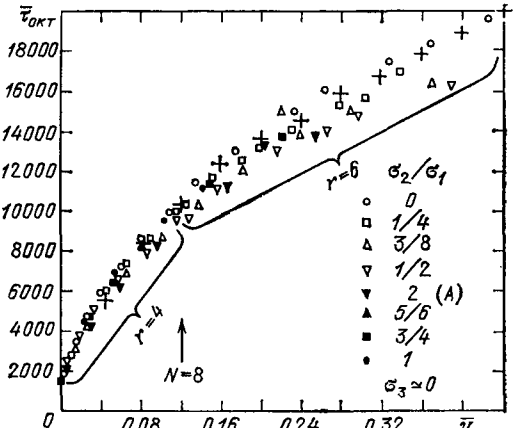



Рис. 4.61. Опыты Дэвиса (1943) с медными трубками при совместном растяжении и воздействии внутреннего гидравлического давления. По оси абсцисс отложен «истинный» октаэдрический сдвиг, а по оси ординат — «истинное» октаэдрическое касательное напряжение при восьми различных соотношениях главных напряжений, возникших в условнях простого нагружения. Крестики показывают результаты, соответствующие современной теории (см. раздел 4.35); *А* — чистое внутреннее давление.

Дэвис использовал измерения осевой и тангенциальной деформации и предположение о несжимаемости для определения октаэдрического касательного напряжения в терминах напряжения Коши, т. е. по отношению к площади поперечного сечения образца, соответствующей текущему значению нагрузки. Он получил октаэдрическую деформацию сдвига как логарифмическую, или истинную деформацию на основании измерений условных деформаций $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$. Аналогично, он представил значения максимального касательного напряжения и максимального сдвига соответственно как напряжение Коши и как логарифмическую деформацию. В 1943 г. Дэвис обнаружил, что функции отклика, представленные таким образом, не зависят ощутимо от пути нагружения. Открытие в последнем десятилетии (Bell [1972, 2]; раздел 4.35) основных определяющих уравнений для больших деформаций кристаллических тел продемонстрировало важность наблюдения Дэвиса.

Чтобы облегчить ссылки в разделе 4.35 данного исследования, наряду с данными Дэвиса я включил в рис. 4.61 и 4.62 предсказанные значения (крестики) функции отклика (Bell [1968, 1]) в соответ-

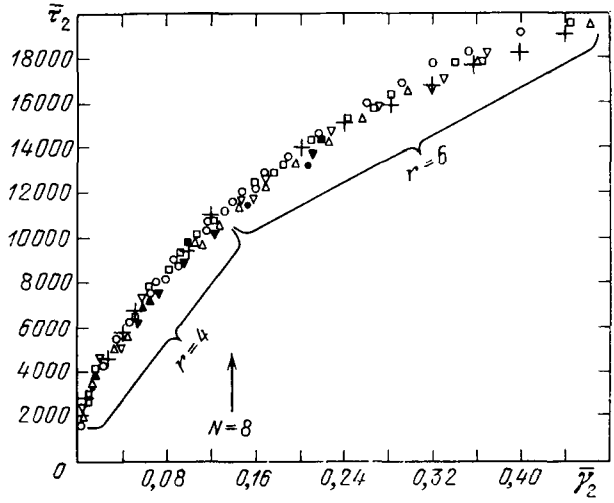



Рис. 4.62. Опыты Дэвиса (1943) с медными трубками при совместном растяжении и воздействии внутреннего гидравлического давления. По оси абсцисс отложен «истинный» максимальный сдвиг, а по оси ординат — «истинное» максимальное касательное напряжение при восьми различных соотношениях главных напряжений, возникших в условиях простого нагружения. Крестики показывают результаты, соответствующие современной теории (см. раздел 4.35).

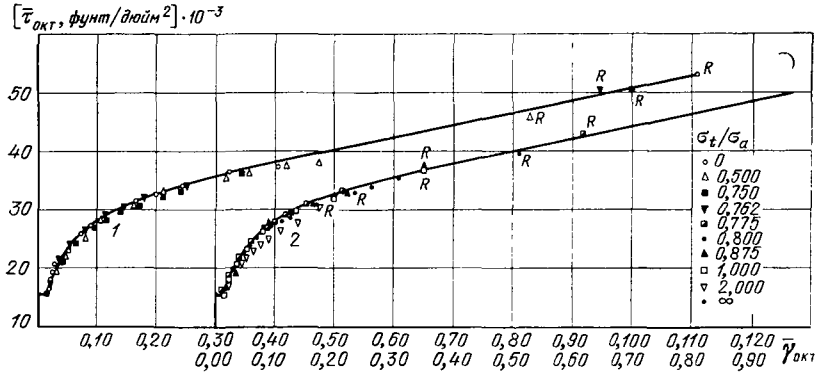



Рис. 4.63. Опыты Дэвиса (1945) со стальными трубками при совместном растяжении и воздействии внутреннего гидравлического давления. По оси абсцисс отложен «истинный» октаэдрический сдвиг, по оси ординат — «истинное» октаэдрическое касательное напряженне в фунт/дюйм$^2$ при различных соотношениях главных напряженнй, возникающих в условиях простого нагружения; *1* — разрушение по площадке, параллельной оси трубки и лежащей в диаметральной плоскости, *2* — разрушение по поперечному сечению [2].

ствующих диаграммах зависимостей $\bar{\tau}_{окт}$—$\bar{\gamma}_{окт}$ и $\bar{\tau}_2$—$\bar{\gamma}_2$, т. е. зависимостей между истинными октаэдрическими касательным напряжением и сдвигом и зависимостей между истинными максимальными касательным напряжением и сдвигом.

Данные экспериментов Дэвиса 1945 г. со среднеуглеродистой сталью, внесшие небольшие уточнения (связанные с предположением о равенстве радиального напряжения $\bar{\sigma}_3$ половине давления $p$) были представлены как зависимости напряжения Коши от логарифмической деформации в форме: $\bar{\tau}_{\text{окт}}$ от $\bar{\gamma}_{\text{окт}}$ и $\bar{\tau}_2$ от $\bar{\gamma}_2$. Эти резуль-

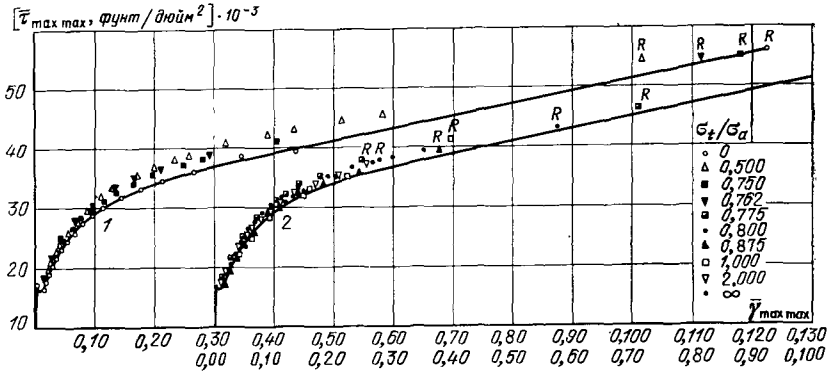



Рис. 4.64. Опыты Дэвиса (1945) со стальными трубкамн при совместном растяжении и воздействии внутреннего гидравлического давления. По оси абсцисс отложен «истинный» максимальный сдвиг, по оси ординат отложено «истинное» максимальное касательное напряжение в фунт/дюйм$^2$ при различных соотношениях главных напряжений, возникающих в условиях простого нагружения; *1* — разрушение по площадке, параллельно оси трубки и лежащей в диаметральной плоскости, *2* — разрушение по поперечному сечению[2].

таты показаны на рис. 4.63 и 4.64 соответственно, где также видна независимость от пути нагружения функций отклика при больших деформациях как для октаэдрического, так и для максимального касательного напряжения. Дэвис разделил результаты исследований на две группы по признаку типа разрушения.

Я внес на рис. 4.61 и 4.62, относящиеся к меди, целочисленный параметр $r$ с тем, чтобы можно было сделать ссылки на них в разделе 4.35, где я обсуждаю общие определяющие уравнения для больших деформаций кристаллических тел. (Аналогичная корреляция существует для данных на рис. 4.63 и 4.64.) К рис. 4.63 можно добавить данные из серии экспериментов Дэвиса, описанных в 1955 г. в статье, озаглавленной «Опыты по совместному растяжению и кручению с фиксированными главными направлениями» (Davis [1955, 1]). Результаты этих экспериментов, которые включили простое нагружение при совместном кручении и растяжении, явились дальнейшим доказательством общности открытия Дэвиса.

## 4.16. Эксперименты Бриджмена 40-х годов XX века по изучению пластической деформации стали

В 1952 г. Бриджмен опубликовал монографию (Bridgman [1952, 1]), озаглавленную «Исследование больших пластических деформаций и разрушения», в большей части которой описываются

эксперименты, относящиеся к его достижениям во время второй мировой войны, проведенные в технологических целях и дающие информацию о свойствах сталей, начиная от среднеуглеродистой стали до сложных легированных сталей и броневых плит. Особый интерес представляют приведенные в монографии значения максимальных нагрузок, логарифмических деформаций и изменений напряжений в сечении, где перед разрушением появляется шейка.

Эксперименты, описанные Бриджменом в этой монографии, были выполнены в тот же промежуток времени, что и эксперименты Дэвиса. Несмотря на то, что программа Бриджмена исследования больших деформаций поликристаллических тел при воздействии нагрузки, вызывающей более чем один ненулевой компонент напряжений, была значительно более широкой по размаху, числу и разнообразию измерений, которые он проделал, полученные им результаты оказались значительно менее существенными, чем результаты Дэвиса, полученные в те же годы. Оглядываясь вглубь времени примерно на три десятилетия, с сожалением убеждаемся, что Бриджмен сосредоточил свое внимание на исследовании химически сложных поликристаллических тел с особой предварительной термической и механической обработкой.

Работа Бриджмена состояла из трех главных разделов. Первой темой была деформация при гидростатическом давлении. В нее включалось предельное нагружение и разрушение при одноосном растяжении, при растяжении в двух направлениях, при одноосном сжатии и штамповке. Порядок создаваемого давления увеличился от 300 000 до 450 000 фунт/дюйм$^2$ (от 212 до 317 кгс/мм$^2$). Второй раздел «Другие испытания, включающие исследования больших деформаций» содержал описание экспериментов со сталью, но с некоторыми ссылками на более ранние работы, посвященные изучению мыльного камня, мрамора, меди и дюралюминия, при одноосном сжатии, сжатии в двух направлениях, смешанном сжатии, при кручении совместно с одноосным сжатием, при сдвиге, происходящем совместно с примерно гидростатическим давлением. В заключительном разделе Бриджмен описал пластическое течение и разрушение, после предварительной деформации, в качестве которой он осуществлял простое растяжение, сжатие и кручение, имевшее место в образцах, подверженных воздействию различных типов упомянутых деформаций.

В заключительной главе «Омоноличивание нитей» Бриджмен представил безрадостную картину трудностей, существующих в интерпретации конечной деформации сложных сталей, подвергнутых описанным им типам испытаний после многих предварительных механических и термических обработок. Поскольку главной целью работы было получение технологических данных для оценки сталей, испытывающих высокие динамические напряжения при ударе и внедрении снаряда, представляющих интерес в военное

время, он сравнивал большое множество различных условий отпуска и закалки сталей в процессе их создания.

Кроме исследования сложных материалов, многие из экспериментов, описанных Бриджменом, имели самостоятельную ценность. Опыты при осевой деформации в присутствии гидростатического давления, которые Карман (von Kármán [1911, 1]) выполнил впервые в 1911 г., Бриджмен распространил до таких уровней давления, которые позволили с успехом проверить фундаментальные гипотезы для простых твердых тел. Его эксперименты, в которых использовался дилатометр для определения изменения объема, сопровождающего большие деформации твердых тел при простом сжатии, его уникальные эксперименты по сжатию в двух направлениях в пластической области особенно значительны. Какое бы важное технологическое значение ни имел вклад Бриджмена в военную промышленность, с точки зрения фундаментальной науки его испытания представляют подробную иллюстрацию тех трудностей, которые необходимо преодолеть, прежде чем сложные твердые тела с весьма специальной предварительной термической и механической обработкой смогут быть убедительно описаны правдоподобной теорией.

## 4.17. Эксперименты с монокристаллами: количественная упорядоченность в функциях отклика при больших деформациях твердых тел

Ф. Энгессер (Engesser [1889, 1]) возможно наиболее известен благодаря сделанному им в 1889 г. допущению о том, что модуль в формуле Эйлера для критического значения силы, сжимающей колонну при работе материала в области больших деформаций, может быть истолкован как касательный модуль на диаграмме напряжение — деформации, полученной при одноосном напряженном состоянии. В 1898 г. Энгессер (Engesser [1898, 1]) провел исследование графических аппроксимаций функций отклика при больших деформациях, предназначенное для использования при проектировании конструкций. Однако после алгебраических преобразований, проделанных Лесли в 1823 г. (Leslie [1823, 1]), вплоть до 20-х гг. XX века не было предпринято других сколько-нибудь серьезных попыток найти аналитическое выражение для определения больших деформаций в металлах [1]). В 1921 г. Г. Карпентер и К. Элам (Carpenter and Elam [1921, 1]) добились успеха в выращивании монокристаллов металлов, имеющих размер образца, с помощью технологии деформации и отжига — рекристаллизации, а двумя годами позже Бриджмен (Bridgman [1925, 1], [1923, 1]) разрабо-

[1]) Конечно, это не касалось испытаний органических тканей и резины, как мы видели в разделе I (ч. I) данного исследования.

тал метод получения монокристаллов металлов из расплава путем медленного вытягивания, известный ныне как метод Бриджмена.

Возможность создания монокристаллических образцов, разработанная Бриджменом в то же время процедура оптической ориентации, а главное, метод Лауэ (Laue [1912, 1], Laue und Tank [1913, 1], Friedrich, Knipping und Laue [1912, 1]) определения с помощью X-лучей ориентации кристаллических плоскостей в монокристаллах позволили провести экспериментальное исследование, которое стало известно как установление «определяющей деформации сдвига» монокристаллов на основании измерения одноосного напряжения и деформации в опытах на растяжение или сжатие кристаллов с известной первоначальной ориентацией осей. Тэйлор и Элам (Taylor and Elam [1923, 1]) и несколько позднее Ф. В. Гёлер и Г. О. Захс (Göler and Sachs [1927, 1]) предположили, что пластические деформации кристаллических твердых тел возникают в результате скольжения по параллельным кристаллическим плоскостям. Плоскости и линии скольжения при данной кристаллической структуре определялись путем осмотра поверхности деформированного образца и путем анализа образца посредством X-лучей.

Если в процесс вовлекалась только одна система параллельных плоскостей, такая деформация скольжения называлась «моноскольжением». Если одновременно скольжение происходило по двум системам плоскостей, то для описания деформации использовался термин «двойное скольжение». Так, кристаллы с гранецентрированной кубической решеткой допускают скольжение в одной из четырех плоскостей, обозначаемых $\{1\ 1\ 1\}$, которые включают диагонали трех граней. Направление скольжения совпадает с одной из диагоналей грани, лежащей в плоскости скольжения. Комбинация из четырех плоскостей и трех направлений на каждой плоскости дает 12 различных вариантов «моноскольжения».

В опытах на растяжение или сжатие монокристаллов предполагалось, что реализуется та система моноскольжения, для которой угол $\lambda$ между направлением скольжения и осью образца и угол $\Phi$ между нормалью к плоскости скольжения и осью образца обеспечивают наибольшую по величине проекцию осевого напряжения на направление скольжения. В опытах на растяжение и сжатие с ростом конечной деформации изменялись величины углов $\lambda$ и $\Phi$. Напряжение в плоскости скольжения в направлении скольжения, которое известно, если известны углы $\lambda$ и $\Phi$, было названо определяющим касательным напряжением. Сдвиг плоскостей в направлении этого скольжения при макроскопическом подходе рассматривался как определяющая сдвиговая деформация $\gamma$.

Если ось образца лежит в плоскости симметрии по отношению к двум системам моноскольжения, одинаково предрасположенным к реализации по ним скольжения, или если она попадает в эту плоскость вследствие поворотов указанных систем в процессе деформации образца, то обе системы моноскольжения реализуются

одновременно. Такое условие было названо условием двойного скольжения.

По вопросу кинематики скольжения кристаллов см., например, статью Зеегера в *Handbuch der Physik*, Vol. VII/2 (Seeger [1958, 1]).

Кинематические исследования Тэйлора и Элам в 1923 г. и Гёлера и Захса в 1927 г., в результате которых были найдены определяющие касательные напряжения и сдвиг на основании опытов при осевой деформации, а также родственные исследования, определяющие кристаллографические плоскости и направления, в которых появилась такая деформация, стимулировали в ветви механики, изучающей пластичность кристаллов, наиболее феноменальную скорость роста активности в истории экспериментальной механики твердого тела. В 1935 г. в своем роскошном томе «Пластичность кристаллов» Шмид и Боаз (Schmid and Boas [1935, 1]) [1]) указали, что за промежуток времени, немногим превышающий десятилетие, этот аспект пластичности металлов по техническим средствам и размаху деятельности намного превзошел экспериментальные возможности любой отдельной лаборатории [2]).

Если обозначить через $\sigma_s$ осевое напряжение, отнесенное к площади поперечного сечения недеформированного образца, через $\varepsilon_s$ — осевое удлинение, отнесенное к первоначальной длине образца, через $\tau$ — определяющее касательное напряжение в плоскости скольжения, $\gamma$ — определяющую деформацию сдвига при скольжении, $\lambda$ — угол между осью образца и направлением скольжения, $\Phi$ — угол между осью образца и нормалью к плоскости скольжения, то кинематическое исследование моноскольжения приводит к следующим уравнениям:

$$\cos\Phi = \frac{\cos\Phi_0}{1+\varepsilon_s}, \qquad \sin\lambda = \frac{\sin\lambda_0}{1+\varepsilon_s}; \tag{4.13}$$

$$\gamma = \frac{\cos\lambda}{\cos\Phi} - \frac{\cos\lambda_0}{\cos\Phi_0}; \tag{4.14}$$

$$\tau = \sigma_s \cos\Phi_0 \cos\lambda, \tag{4.15}$$

где $\Phi_0$ и $\lambda_0$ относятся к первоначальной ориентации кристалла перед деформацией; $\cos\Phi_0$ в выражении (4.15) соответствует предположению о том, что площадь сечения образца в поворачивающейся плоскости скольжения постоянна, т. е. уменьшение площади поперечного сечения происходит столь незначительно, что в качестве осевого напряжения может быть принято условное [3]).

---

[1]) Я использовал английский перевод [1950, 1].

[2]) В монографии 1935 г. имеется список литературы из 703 названий, из которых менее сорока содержат ссылки на исследование по упругим константам, выполненное Фохтом в XIX веке и обеспечившее успех в выращивании больших монокристаллов, достигнутый в 1921 г.

[3]) Как будет видно в разделе 4.32, важным моментом является тот факт, что при помощи коэффициента поликристалличности осевое напряжение в поликристаллическом образце оказывается сопоставимым с определяющим касательным

Если в процессе конечной деформации кубических монокристаллов плоскость симметрии приближается к оси образца, то, как отмечалось выше, оказываются одинаково предрасположенными к возникновению в них скольжения две системы плоскостей скольжения, для которых значения определяющих касательных напряжений равны между собой [1]. Тэйлор и Элам в 1925 г. (Taylor and Elam [1925, 1]) и Гёлер и Захс (Göler und Sachs [1927, 1]) в 1927 г. проделали вычисления в предположении, что, когда ось образца достигает плоскости симметрии, происходит двойное скольжение. Они предположили, что, после того как ось образца гранецентрированного кубического кристалла совпадает с осью симметрии согласно ориентации ⟨121⟩ дальнейшего вращения не происходит. Только в 9 из 49 опытов по растяжению алюминия, серебра, золота, меди и $\alpha$-латуни, проделанных до 1932 г. одной из двух групп исследователей, которые выдвинули гипотезу о двойном скольжении, X-лучи свидетельствовали о поведении, согласующемся с этим предположением.

Между 1925 и 1930 гг. только в одном из 17 опытов с $\alpha$-латунью Тэйлора и Элам (Taylor and Elam [1925, 1]), Карнопа и Захса (Karnop und Sachs [1927, 1]), Масима и Захса (Masima und Sachs [1928, 1]), Гёлера и Захса (Göler und Sachs [1927, 1]), Захса и Веертса (Sachs und Weerts [1930, 1]) использование техники X-лучей подтвердило предположение о существовании двойного скольжения. Аналогично, к 1930 г. только 4 из 8 опытов с алюминием и 4 из 17 с золотом, медью и серебром дали при использовании X-лучевой техники какое-то подтверждение того, что перед достижением двойного скольжения ось образца поворачивалась в соответствии с предположением.

В 1967 г. Белл и Грин (Bell and Green [1967, 3]) проанализировали 168 опытов с монокристаллами, проведенных, начиная с 1925 г. для всех твердых тел с кубической решеткой, для которых определение с помощью X-лучей осей кристаллов сопровождалось вычислением определяющих сдвигов после того, как ось образца достигала плоскости симметрии. *Ни в одном* из опытов начиная с 1929 г. не было фактов, подтверждающих предположение о появлении двойного скольжения после достижения осью образца плоскости симметрии.

Тем не менее с 1930 г. до настоящего времени, за исключением $\alpha$-латуни, которая оказалась объектом специального исследования, стало обычным автоматически переходить от расчета моноскольжения к расчету двойного скольжения, как только поворот оси образца, определенный в условиях моноскольжения, указывает на достижение осью плоскости симметрии. В свете экспериментальных фактов кажется невероятным, что расчеты на основе двой-

напряжением в монокристалле. Оба напряжения должны быть даны в условной форме (т. е. по отношению к недеформированному состоянию материала), чтобы коэффициент поликристалличности не зависел от деформации.

ного скольжения продолжали использоваться в течение 40 лет без проверки процесса деформации с помощью X-лучевой техники. Такова власть привлекательных гипотез. К несчастью, когда приводятся только вычисленные при двойном скольжении значения определяющих напряжения и сдвига невозможно восстановить для проверки действительные данные измерений, устанавливающих зависимость между осевым напряжением и деформацией, и, следовательно, сотни опубликованных с 1930 г. экспериментальных результатов для монокристаллов подвергаются основательному сомнению [1]).

В 1964 г. при исследовании функций отклика, полученных путем сравнения определяющего касательного напряжения и определяющего сдвига в опытах с монокристаллами в литературе по физике металлов, я обнаружил, что когда результаты расчетов, выполненных на основе экспериментальных данных согласно гипотезе двойного скольжения, были пересчитаны в предположении моноскольжения (Bell [1968, 1]) (если только была дана достаточная информация, чтобы сделать это), полученные функции отклика практически не отличались от функций, найденных в тех испытаниях, в которых ось образца не поворачивалась до плоскости симметрии и предполагалось только наличие моноскольжения. Это наблюдение дало толчок интенсивному изучению предмета Беллом и Грином (Bell and Green [1967, 3]), которое включало не только полное исследование литературы, появившейся начиная с 1925 г., по опытам, в которых применялась X-лучевая техника, но и серию тщательно поставленных экспериментов с двадцатью тремя монокристаллами алюминия с чистотой 99,47% и с двумя монокристаллическими образцами из алюминия с чистотой 99,99%.

На рис. 4.65 видно, что измеренные с помощью X-лучевой техники повороты оси в 14 из 23 монокристаллов алюминия с чистотой 99,47% таковы, что при расположении оси образца в плоскости симметрии продолжается со всей очевидностью моноскольжение, на что указывает анализ найденных значений коэффициентов экспериментально полученных парабол. Данные, относящиеся к зависимости

---

[1]) Единственным выходом является обращение к лабораторным протоколам каждого исследования. В некоторых из наиболее близких по времени источников даже это неосуществимо, поскольку вычисление с помощью компьютеров определяющих величин при скольжении сделано непосредственно с электрических выводов испытательных машин и, как я обнаружил, каждый исследователь сам не может привести численные значения осевых напряжения и деформации.

Для общего изучения функций отклика, такого, как в данном исследовании, проблема не так сложна, поскольку для сравнений можно пересчитать на моноскольжение все те результаты испытаний, для которых были зарегистрированы измерения осевых напряжения и деформации параллельно с вычислением определяющего сдвига и можно отбросить все, кроме тех, которые относятся к точке, где ось достигла плоскости симметрии. Однако при анализе на уровне атомов, который был превалирующим мотивом в случае выполнения таких измерений на протяжении 45 лет, заключения, приведенные в оригинальных статьях и в статьях, которые позднее на них основывались, могут быть проверены.

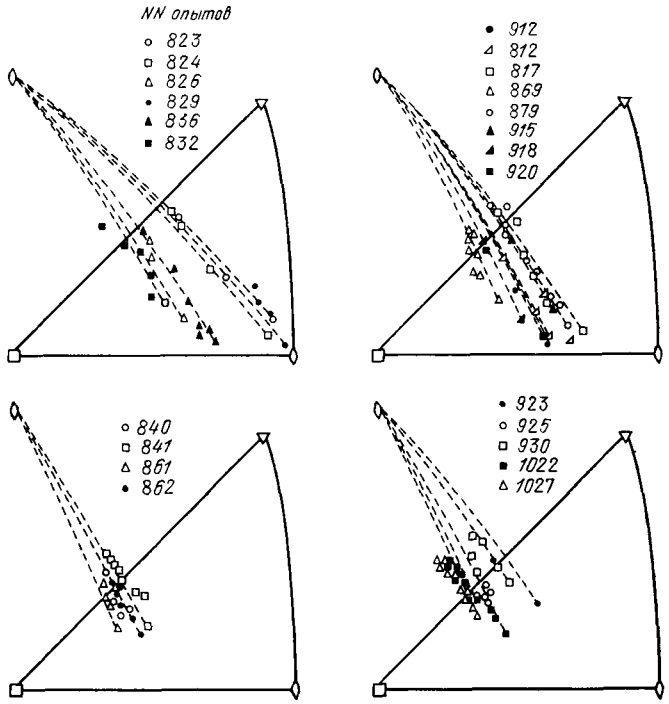



Рис. 4.65. Опыты Белла и Грина (1967). Х-лучевые дифракционные измерения в процессе деформации монокристаллов, оси которых поворачиваются, располагаясь в плоскости симметрии.

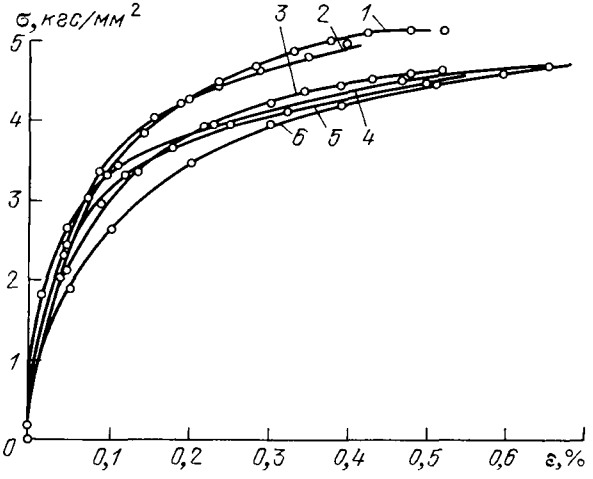



Рис. 4.66. Опыты Белла и Грина (1967). Зависимости между условными осевыми растягивающими напряжениями и деформациями. Кружками обозначены результаты использования дифракционной Х-лучевой техники; *1* — опыт 1027, *2* — опыт 841, *3* — опыт 1022, *4* — опыт 836, *5* — опыт 832, *6* — опыт 879.

осевое напряжение — деформация в шести из этих экспериментов показаны на рис. 4.66; на основании этих данных произведены расчеты для моноскольжения и в предположении двойного скольжения и на их основании построены соответственно жирная и тонкая линии, приведенные на рис. 4.67. Измеренные значения углов λ и

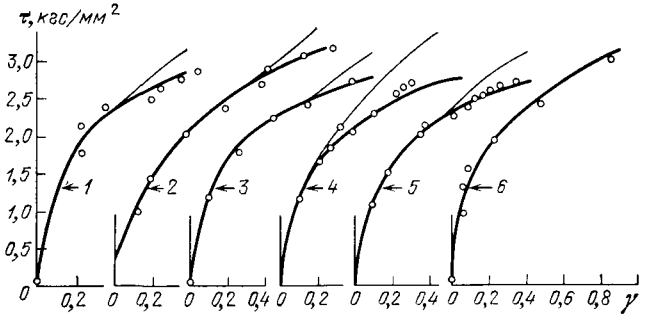



Рис. 4.67. Опыты Белла и Гриша (1967). Результаты расчетного отыскания значений разрешающего сдвига на основе гипотезы моноскольжения и на основе гипотезы двойного скольжения в сравнении с зависимостью τ—γ, полученной путем непосредственного измерения углов Φ и λ в процессе деформации, показывающие согласование с гипотезой моноскольжения после совмещения оси образца с плоскостью симметрии. Жирная линия — результаты вычислений на основе гипотезы моноскольжения; тонкая линия — результаты вычислений на основе гипотезы двойного скольжения; кружки — результаты вычислений на основе экспериментальных данных, полученных путем использования X-лучевой техники; *1* — опыт 841, *2* — опыт 879, *3* — опыт 832, *4* — опыт 1027, *5* — опыт 1022, *6* — опыт 836.

Φ были подставлены в приведенные выше соотношения моноскольжения (4.13), (4.14) и (4.15). Таким образом, можно было с уверенностью заключить, что повороты были не только такими, что происходило попадание оси образца в плоскость симметрии, но и значения углов находились в полном соответствии с первоначальным моноскольжением.

Результаты, которые получили мы (Bell and Green [1967, 3]), обследуя литературу по испытаниям совершенно определенного типа, были, может быть, даже более показательными, что можно видеть из рассмотрения табл. 128. Только 9 из 168 таких экспериментов со многими перечисленными типами монокристаллов продемонстрировали характеристики поворота, сопровождающегося двойным скольжением, все 9 были взяты из результатов, полученных до 1930 г., т. е. в период, когда была выдвинута гипотеза двойного скольжения. Это совершенно сокрушительный пример того способа XX века, в котором массовое одобрение правдоподобной гипотезы смогло привести к четырем десятилетиям публикования потенциально ошибочных, невоспроизводимых результатов [1]).

[1]) В некоторых лабораториях данные по осевой деформации поступали непосредственно в компьютер, который автоматически переключался от расчетов моноскольжения к расчетам двойного скольжения при соответствующих значениях

Таблица 128

**Белл и Грии (1967)**

| Год | Исследователь | Материал | Геометрическое предсказание двойного скольжения | Поворот, продолжающийся линейно через плоскость симметрии |
|---|---|---|---|---|
| 1925 | Тэйлор и Элам | Al | 1 | 3 |
| 1926 | Элам | Ag, Au, Cu | 3 | 2 |
| 1927 | Элам | α-латунь | 0 | 3 |
| 1927 | Элам | Cu—5%, Al | 0 | 1 |
| 1927 | Карноп и Захс | Al | 3 | 0 |
| 1928 | Масима и Захс | α-латунь | 0 | 7 |
| 1929 | Гёлер и Захс | Cu | 1 | 0 |
| | | α-латунь | 1 | 6 |
| 1930 | Захс и Веертс | Ag, Au, Cu | 0 | 8 |
| | | Ag—Au | 0 | 7 |
| 1931 | Захс и Веертс | $Cu_3Au$ | 0 | 3 |
| | | Cu, Ni | 0 | 2 |
| 1933 | Освальд<br>Мэддин<br>Мэтьюсон | Cu—Ni | 0 | 2 |
| 1949 | Хиббард | α-латунь | 0 | 4 |
| 1951 | Чэн и Мэтьюсон<br>Пэрси<br>Кан | Al | 0 | 3 |
| 1955 | Коттрелл | α-латунь | 0 | 2 |
| 1959 | Таннер и Мэддин | Al | 0 | 6 |
| 1960 | Бернер | Au | 0 | 1 |
| 1962 | Пфафф | Ni—Co | 0 | 7 |
| 1963 | Филлипс | 70%Ag—30%Zn | 0 | 6 |
| 1963 | Прайс и Келли | Cu—1,8%Be | 0 | 13 |
| 1964 | Прайс и Келли | Сплавы алюминия | 0 | 57 |
| 1966 | Белл и Грин (данная работа) | Al | 0 | 16 |
| | | Всего | 9 | 159 |

Результатом проведенного выше анализа, а также моего более раннего исследования, начатого в 1960 г. для которого совместное с Грином исследование явилось определенным продолжением, было то, что предельные значения сдвига при скольжении в монокристаллах в последнем упомянутом исследовании даны на базе теории моноскольжения. По причине, поясненной ниже в разде-

углов так, что, как было замечено выше, оказались недоступными для проверки выводов даже неопубликованные данные, относящиеся к зависимости $\sigma$—$\varepsilon$.

ле 4.32, где связываются между собой данные, относящиеся к монокристаллам и к поликристаллическим телам, это поведение предпочтительно называть «макроскопическим моноскольжением» [1]).

В первоначальный период развития предмета доминировали две серии опытов, десять лет спустя они практически без изменения были включены в обзорные статьи. Это эксперименты с монокристаллами алюминия, золота, меди и железа Тэйлора и Элам (Taylor and Elam [1925, 1]; Elam [1926, 1]; Taylor and Elam [1926, 1]), выполненные в 1925—1926 гг. и эксперименты с алюминием Боаза и Шмида (Boas and Schmid [1931, 1]) — в 1931 г., проводившиеся при различных температурах, от 185 до 600°С. (Точка плавления алюминия 659°С.)

Заслуживает внимания следующий пример экономичности в эксперименте: Тэйлор на базе трех опытов с монокристаллами алюминия, четырех с железом, по одному с медью и золотом и трех или четырех испытаний с поликристаллами меди и алюминия разработал кинематику предельной деформации сдвига в условиях моно- и двойного скольжения, предложил физическую теорию дислокаций, согласующуюся с построенными им теоретически параболическими функциями отклика для определяющего сдвига, и сконструировал первую правдоподобную, правда существенно ограниченную, теорию пластической деформации среды, основанную на наблюдениях монокристаллов. То, что сорок лет последующих исследований выдвинули серьезные вопросы, касающиеся статистического происхождения моноскольжения и применимости кинематики двойного скольжения в области параболического упрочнения, рассматриваемой Тэйлором; то, что его теория дислокаций оказалась слишком примитивной, чтобы продолжать существовать в предложенной форме, и то, что ограниченность допущений его теории поликристаллического тела и неуспех с включением в ее формулировку условия равновесия напряжений мешали полной корреляции с наблюдением, не могут заслонить тот факт, что работа Тэйлора примерно на протяжении десятилетия давала толчки для большого числа последующих экспериментальных и теоретических исследований в области пластичности кристаллов.

Три эксперимента (Taylor and Elam [1925, 1]) с монокристаллами алюминия относительно низкой чистоты, опыт 72 на растяже-

---

[1]) Начиная с 1950 г. стало ясно, что тогда как деформация I стадии (относящаяся к области, названной областью «легкого скольжения») заключается в моноскольжении, III стадия представляет собой область сложного, множественного скольжения. Однако удивительно, почему после этих данных продолжаются вычисления, сделанные на основе предположения, что за моноскольжением следует двойное скольжение.

Термин «макроскопическое моноскольжение» относится к статистическим свойствам, предопределяющим сдвиг, для которых эмпирические коэффициенты поликристалличности относятся к зависимости, связывающей сдвиг в монокристалле и в поликристаллическом теле.

ние и опыты 61.17 и 59.9 на сжатие при разных начальных ориентациях продемонстрировали, что функция отклика для определяющего сдвига, найденная в предположении моноскольжения [1]), оказалась не зависящей от начальной ориентации плоскостей кристалла и направления скольжения по отношению к оси образца и не зависящей от того, при растяжении или при сжатии производилось одноосное испытание. Для этих трех опытов определяющая деформация, полученная при подстановке измеренных значений $\sigma_s$, $\varepsilon_s$, $\Phi_0$ и $\lambda_0$ в зависимости (4.13) — (4.15), показана на рис. 4.68. (На рис. 4.68 и 4.69 Тэйлор использовал $S$ для обозначения определяющего касательного напряжения $\tau$ и $s$ для определяющего сдвига $\gamma$.)

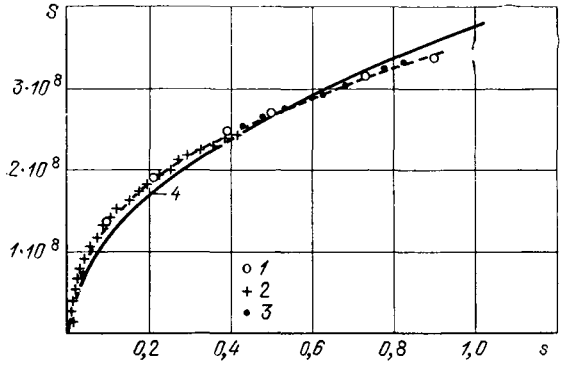



Рис. 4.68. Опыты Тэйлора и Элам (1925). Сравнение определяющей деформации сдвига в моиокристалле алюминия, полученной из опыта на растяжение (72) и опытов на сжатие (61.17 и 59.9); *1* — образец № 72, *2* — образец № 61.17, *3* — образец № 59.9; *4* — парабола $S = 3{,}8 \cdot 10^8 \sqrt{s}$ дин/см².

Тэйлор включил эти опыты как часть в свой обзор, посвященный ряду различных исследований, выполненных между 1925 и 1938 гг. (Taylor and Elam [1925, 1, 3], Taylor and Farren [1926, 2], Taylor [1927, 1, 2, 3], [1934, 1, 3], [1938, 1]). В 1934 г. в части I статьи, озаглавленной «Механизм пластической деформации кристаллов» (Taylor [1934, 1, 3, 5]), он предложил теорию упрочнения деформации, включающую дислокации, которая согласовывалась с наблюдавшейся им параболической функцией отклика для определяющего сдвига. С целью получения численных значений для определения характеристической длины он приспособил эти данные и также результаты четырех испытаний железа, одного опыта с медью и одного опыта с золотом к соответствующим параболам и получил значения коэффициентов парабол: $3{,}8 \cdot 10^8$ дин/см² для

[1]) Область параболического упрочнения в монокристаллах относится к деформации III стадии. В отличие от более ранних стадий деформации это — область, в которой появляются множественные системы скольжения. Это явление в последние годы получило название «макроскопическое моноскольжение» и, как было сказано выше, будет обсуждаться в разделе 4.32. См. Bell [1964, 1], [1965, 2], Bell and Green [1967, 3], Bell [1968, 1].

трех опытов с алюминием; $2 \cdot 10^9$ дин/см$^2$ для опыта с железом [1]; $8{,}8 \cdot 10^8$ дин/см$^2$ для меди и $4{,}52 \cdot 10^8$ дин/см$^2$ для золота.

Приведя эти числовые значения коэффициентов, Тэйлор, не подозревая тогда этого, ввел первую численную оценку в изучение конечной деформации кристаллических тел. Можно провести параллель с первым получением Кулоном численного значения для

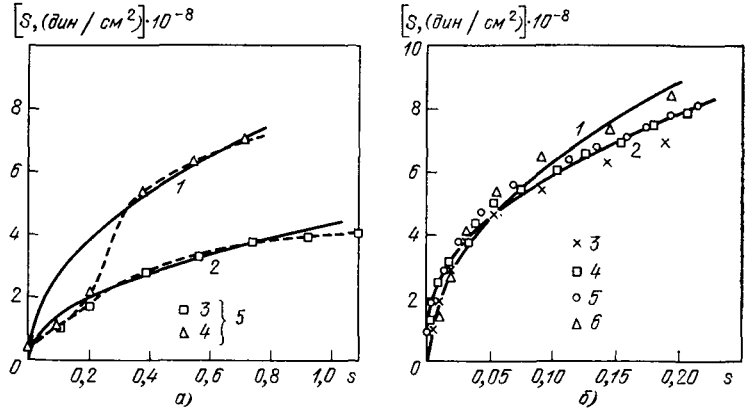



Рис. 4.69. Опыты Тэйлора и Элам (1925). Значения определяющего сдвига, полученные из опытов на растяжение монокристаллов золота, меди и четырех экспериментов с железом. *а*) *1* — парабола, $S = 8{,}8 \cdot 10^8 \sqrt{s}$, *2* — парабола $S = 4{,}52 \cdot 10^8 \sqrt{s}$, *3* — золото, опыты Элам, *4* — медь, *5* — опыты Элам; *б*) *1* — парабола $S = 2 \cdot 10^9 \sqrt{s}$, *2* — парабола $S = 1{,}2 \cdot 10 - 1{,}5 \cdot 10^9 \sqrt{s}$, *3* — Fe 3c, *4* — Fe 6c, *5* — Fe 7c, *6* — Fe 4.

модуля сдвига $\mu$ 150 лет назад. Прошло тридцать лет и было проделано несколько сот опытов после того, как Тэйлор и Элам опубликовали свои результаты. Я показал посредством исчерпывающего анализа литературы по экспериментам и обширных опытов в моей собственной лаборатории, что первоначальные коэффициенты параболы Тэйлора представляют собой параметры материала, находящиеся в согласии с последующим экспериментом, включая обнаруженную мною линейную температурную зависимость, согласующуюся с испытаниями, проведенными со всеми упомянутыми твердыми телами при многих значениях температуры. Эти корреляции (Bell [1968, 1]), которые подчеркивают большое значение опытов Тэйлора и Элам в истории развития предмета, будут в деталях описаны в разделе 4.18.

Эксперименты Тэйлора и Элам с монокристаллами золота, меди и железа (Taylor and Elam [1926, 1]), повторно обсуждавшиеся также между 1926 и 1934 гг. и для которых в 1934 г. были даны численные значения коэффициентов параболы, показаны на рис. 4.69.

Пионерные аспекты этого исследования возможно могут быть лучше оценены на основании выдержки из статьи Тэйлора и Элам

[1]) Тэйлор дал также другую эмпирическую формулу, соответствующую испытанию железа, показанную в подписи под рис. 4.69.

1923 г., за два года до того, как они получили сравнение (Taylor and Elam [1925, 1]) функций отклика для определяющего сдвига при нагружении монокристаллов алюминия в условиях растяжения и сжатия (рис. 4.68).

«Однако до настоящего времени наблюдение скольжения имеет чисто качественный характер. Не показано, что изменение формы кристалла металла, когда материал деформируется, таково, каким оно могло быть в результате скольжения, не определено относительное расположение оси кристалла и плоскостей скольжения» (Taylor and Elam [1923, 1], стр. 64).

В 1931 г. Боаз и Шмид (Boas and Schmid [1931, 1]) описали серию экспериментов по растяжению монокристаллов алюминия при восьми значениях окружающей температуры от —185 °С до 600 °С, результаты которых показаны на рис. 4.70, *а*. Определяющие сдвиги, вычисленные по наблюдавшимся начальным ориентациям в тех же самых опытах, показаны на рис. 4.70, *б*.

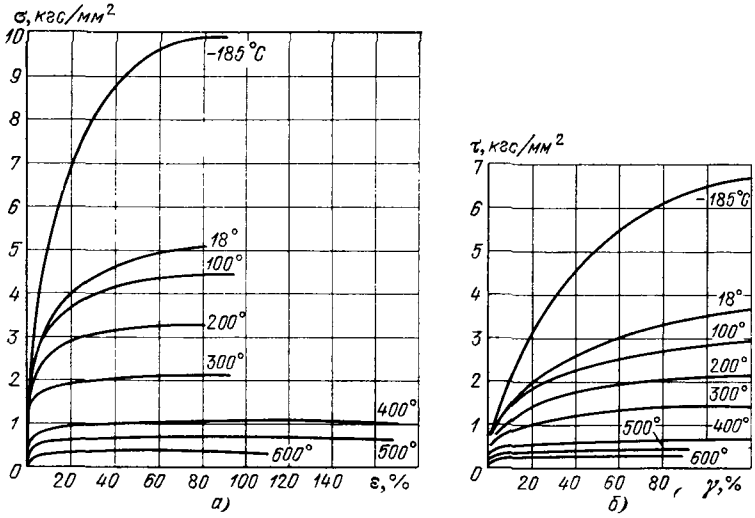



Рис. 4.70. Опыты Боаза и Шмида (1931). *а*) Зависимости условное напряжение — деформация в случае растяжения при температуре окружающей среды от —185°С до температуры, близкой к точке плавления; *б*) зависимости между значениями определяющих касательного напряжения и сдвига, полученные на основании данных фигуры *а*) и предположения о моноскольжении.

Тэйлор определил коэффициенты парабол из этих опытов с монокристаллами алюминия при различных температурах, а также из пяти экспериментов В. Тиле (Thiele [1932, 1]) с кристаллами каменной соли при значениях окружающей температуры, заключенных между 20 и 600 °С. В каждом из этих экспериментов Тэйлора и Элам и Боаза и Шмида угол между кристаллической плоскостью и осью образца определялся при помощи лауэграмм, построенных путем использования фотографий, полученных в Х-лучах. Затем образцы растягивались или сжимались вдоль оси. На основании

измеренных осевых нагрузок и деформаций, при использовании начальных углов ориентации, вычислялись для сравнения определяющие касательное напряжение в плоскости скольжения и сдвиг; данные Тиле для каменной соли были представлены только в терминах осевой нагрузки и осевой деформации. Эксперименты Боаза и Шмида были проведены в печи, чтобы получить результаты при определенной окружающей температуре.

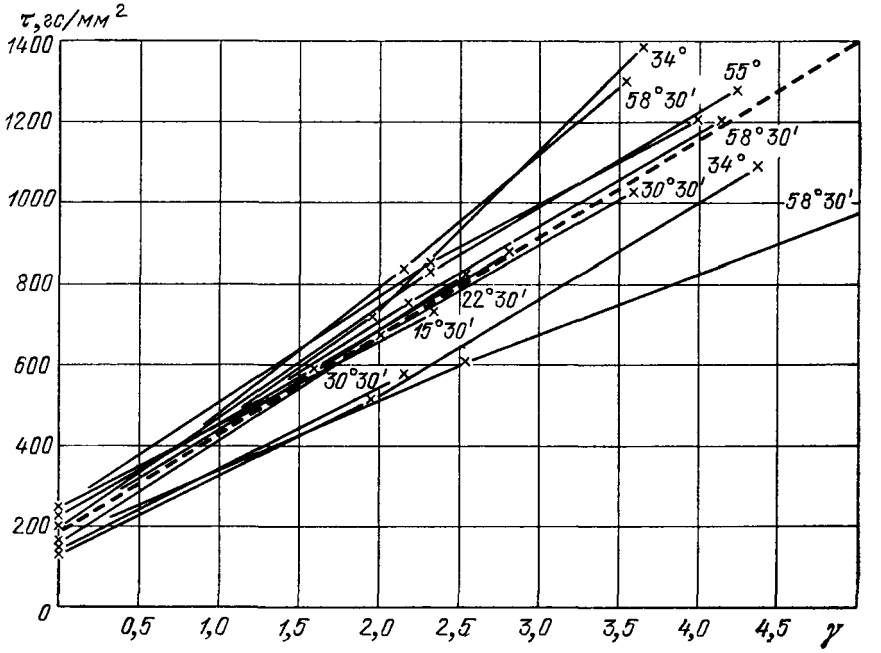



Рис. 4.71. Опыты Шмида (1926). Результаты для значений определяющих касательного напряжения и деформации сдвига в монокристаллах цинка.

Уже в 1926 г. было установлено, что функции отклика для определяющего сдвига в монокристаллах с гексагональной решеткой не являются параболическими и поэтому не могут быть описаны в терминах теории работы упрочнения, предложенной Тэйлором (Taylor [1934, 1]). В этом же году эксперименты Шмида (Schmid [1927, 1]) с кристаллами цинка, результаты которых для определяющих касательного напряжения и сдвига показаны на рис. 4.71, продемонстрировали впервые, что функция отклика в этом твердом теле с гексагональной решеткой была, по существу, линейной вплоть до предельного значения определяющего сдвига, равного пяти. На рис. 4.71 показаны углы между базовой плоскостью и осью образца, измеренные до деформации образца. Можно видеть, что наклон этой линейной функции отклика не изменяется заметно с изменением начальной ориентации.

На всем протяжении данного исследования, являлись ли предметом обсуждения деформационные свойства тканей человека, металлов или сложная термоупругость резины, основное внимание уделялось тем аспектам поведения, которые важны для рациональной (прикладной) механики. Макроскопическая механика сплошной среды имеет свои собственные фундаментальные законы. Чтобы сделать акцент на определяющих соотношениях, важных для механики континуума, я уделил лишь минимальное внимание особой, но родственной микроскопической механике, изобретающей атомистические модели для интерпретации наблюдавшихся явлений одним из других возможных способов. В конце XIX века стало ясно, а во второй половине XX века даже более отчетливо очевидно, что конструирование определяющих соотношений на атомистических началах представляет собой бесконечную работу, покоящуюся на основе нуждающейся в принятии быстро умножающихся предположений и большом количестве гипотетических механизмов. Атомистические исследования, как теоретические, так и экспериментальные, имеют особую закономерность и прелесть. Прогресс в технологии металлов тесно связан с атомистическим анализом, в то время как технология проектирования конструкций развивалась благодаря развитию прикладной механики. Начиная с классического труда Боаза и Шмида 1935 г., появилось большое число публикаций, в которых прослеживается развитие экспериментальных исследований монокристаллов и модели дислокаций, интерпретирующие их. Отсылаем читателя к таким обзорам для обсуждения и знакомства с литературой, поскольку в данной работе основное внимание уделяется макроскопическому поведению, наблюдаемому в экспериментах, каковы бы ни были цели отдельных экспериментаторов.

В начале 50-х гг. XX века возник вопрос, являются ли действительно функции отклика кубических кристаллов параболическими. Гипотезы Тэйлора в его теории дислокации (Taylor [1934, 1]) также были подвергнуты сомнению. Более всего это касалось того факта, что Тэйлор предполагал распределение положительных и отрицательных дислокаций однородным и не учитывал возникновения дислокаций в процессе деформации. Третья трудность, которая еще не всплыла к тому времени, состоит в том, что ни в теории, ни в эксперименте не было основы для принятия решений, требующихся в процессе подведения итогов в анализе Тэйлора. Мотт (Mott [1952, 1]) в 1952 г. выдвинул теорию, которая еще при условии использования параболической функции отклика полностью исключала эти вопросы, подразумевавшиеся в гипотезах Тэйлора. Теория Мотта основывалась на предположении о заклинивании дислокаций, порождаемых источником Франка — Рида, при некотором уровне их плотности или при наличии барьера из дефектов.

К 50-м гг. XX века техника выращивания кристаллов усовершенствовалась настолько, что стало возможным получать монокристаллы высокой чистоты. Аналитическое отыскание функции

отклика для определяющего сдвига в этих монокристаллах высокой чистоты обнаружило, что большая деформация твердых тел с кубической решеткой не представляется исключительно с помощью параболической связи напряжения и деформации.

Андраде и Гендерсон (Andrade and Henderson [1951, 1]) в 1951 г. для кристаллов золота, серебра и никеля высокой частоты и Люке и Ланге (Lücke and Lange [1952, 1]) в 1952 г. при сравнении монокристаллов алюминия с чистотой 99,5% и с чистотой 99,99% показали в стандартных испытаниях на растяжение, сопровождающихся измерением начальной ориентации кристаллических осей при помощи X-лучей, что области, в которой функция отклика была параболической, могла предшествовать большая область, в которой функция отклика не является параболической [1]).

Опыты Андраде и Гендерсона с золотом и серебром высокой чистоты (рис. 4.72 и 4.73) показывают эту начальную область непараболической деформации. На рис. 4.72, *а* и 4.73, *а* в увеличенном масштабе показана начальная область деформации и на рис. 4.72, *б* и 4.73, *б*—деформация до 0,8 от максимального значения определяющего сдвига.

Экспериментальное изучение этих тел высокой чистоты привело к открытию того, что существуют три стадии конечной деформации (обозначенные I, II, III), которые следуют за начальным упругим поведением. Начальный переход обнаружился при впоследствии хорошо изученном пределе упругости монокристалла или предельном значении определяющего касательного напряжения. Стадии I и II зависят, в отношении самого факта их существования и про-

[1]) Кстати сказать, статья Люка и Ланге оказалась особенно значительной по содержащемуся в ней, может быть, последнему по времени крупномасштабному экспериментальному исследованию, которое включало как результаты осевых измерений, так и расчетное отыскание определяющего сдвига. Неудача продолжения практики таких экспериментов явилась причиной того, что в значительной части последующей литературы отсутствовали экспериментальные результаты до тех пор, пока более позднее экспериментальное исследование и исторический анализ Белла (Bell [1964, 1]) и Белла и Грина (Bell and Green [1967, 3]) показали с очевидностью, насколько серьезные сомнения вызывает предположение о двойном скольжении при расположении оси образца в плоскости кристаллической симметрии. Продолжение практики, обогащенной Люком и Ланге и многими их предшественниками, приводить как измеренные, так и вычисленные данные позволяет надеяться, что на основе опубликованных экспериментальных результатов для больших деформаций монокристаллов и расчетов, опирающихся на концепцию двойного скольжения, теперь может быть выполнен пересчет для получения результатов, соответствующих моноскольжению. Также хотелось бы заметить, что данные Андраде и Гендерсона 1951 г. были подсчитаны применительно к моноскольжению во всем диапазоне деформации, что впоследствии подвергалось некоторой критике. В 1962 г., когда я обнаружил, что коэффициенты параболы, соответствующие их данным, в которых игнорировалось двойное скольжение, согласовывались количественно с обобщением, найденным мною на основании известных опытов при моноскольжении, манера, которую избрали Андраде и Гендерсон для представления данных, предстала в интересном и новом свете, так как она послужила дополнительным аргументом в усилении моего возрастающего подозрения по поводу сомнительности вывода о двойном скольжении.

тяженности, не только от чистоты материала образца, но, как показали Люке и Ланге (Lücke and Lange [1952, 1]) в своем экспериментальном исследовании в 1952 г., и от начальной ориентации. Даже для монокристаллов высокой чистоты такое поведение

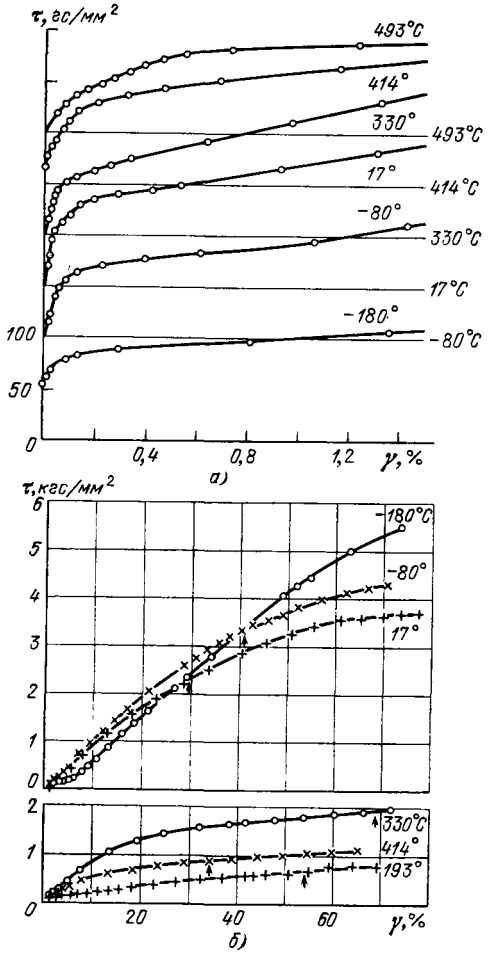



Рис. 4.72. Опыты Андраде и Гендерсона (1951). Определяющее касательное напряжение в зависимости от деформации сдвига в опытах Андраде и Гендерсона 1951 г. для монокристаллов золота при определенных значениях окружающей температуры: *а*) в начальной области малых деформаций; *б*) в области больших деформаций. По оси абсцисс отложен сдвиг, а по оси ординат — определяющее касательное напряжение.

не было обнаружено при начальной ориентации, соответствующей окрестности углов стереографического треугольника. Схематическая диаграмма функции отклика определяющего сдвига для центральных ориентаций показана на рис. 4.74.

Многочисленные экспериментаторы [1]) показали, что протяжен-

[1]) См., например, работу Торнтона, Митчелла и Хирша (Thornton, Mitchell and Hirsch [1962, 1]), выполнивших опыты по растяжению монокристаллов латуни.

ность I стадии деформации зависит от скорости определяющего сдвига $\gamma$, т. е. от $\dot{\gamma}$. Сузуки, Икеда и Такеучи (Suzuki, Ikeda and Takeuchi [1956, 1]) в серии тщательно проведенных испытаний на растяжение, используя оптическую технику определения осевой деформации, показали экспериментально на монокристаллах меди высокой

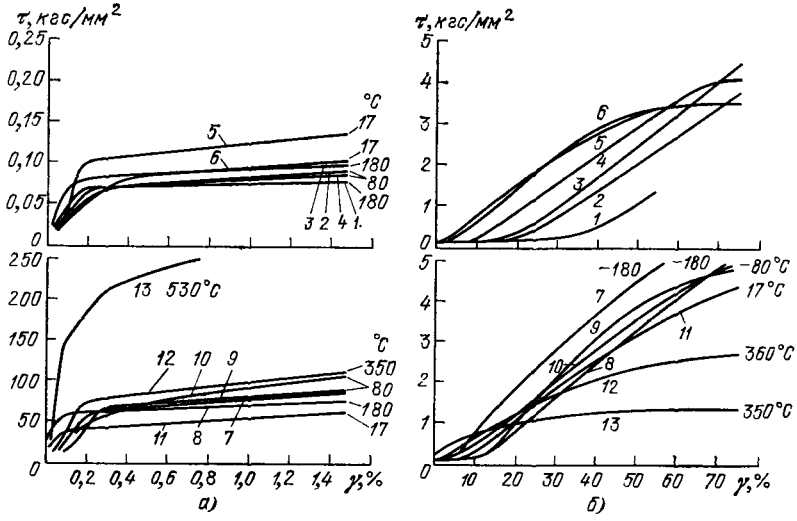



Рис. 4.73. Опыты Андраде и Геидерсона (1951). Определяющее касательное напряжение в зависимости от деформации сдвига для мнокристаллов серебра при определеиных зиаченнях окружающей температуры: *а*) в начальной области малых деформацнй; *б*) в области больших деформаций. По оси абсцисс отложеи сдвиг, а по оси ординат — определяющее касательное напряжение [3].

чистоты, что $\theta_{II}$ — наклон касательной к кривой деформации II стадии зависит от ориентации, увеличиваясь в опытах на растяжение по мере приближения оси образца к плоскости симметрии. I стадия

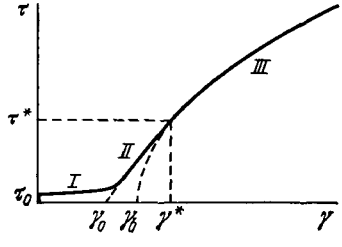



Рис. 4.74. Схематическая диаграмма определяющей деформацни для монокристалла высокой чистоты, показывающая три стадии деформацни.

деформации была определена как область моноскольжения. Было предложено большое число конкурирующих моделей дислокации, которые считались ответственными за наклон касательной к кривой деформации II стадии. Конечно, экспериментальное наблюдение

линейности сильно упрощало анализ [1]) такой модели. Стадия III представлялась как область, имеющая параболическую функцию отклика определяющего сдвига. При наличии деформации I и II стадий, начало этой параболы не располагалось более в точке, соответствующей нулевой точке. Атомистические исследования идентифицируют III стадию деформации с поведением сложного скольжения. Только в последнее время были сделаны попытки рассмотреть III стадию деформации на атомном уровне.

В процессе проверки 430 функций отклика определяющее напряжение — определяющая деформация для кубических монокристаллов высокой и низкой чистоты, полученных в экспериментах более чем 50 экспериментаторов на 12 твердых телах с кубической решеткой, обнаруженных в литературе по физике металлов и в металлургической литературе за более чем сорокалетний период, я заметил в 1964 г. (Bell [1964, 1], [1965, 2], [1968, 1]), что эффект увеличения чистоты твердого тела заключался в переносе начала параболического участка функции отклика из точки, где деформация примерно равна нулю, в точку с конечной деформацией $\gamma_b$. В то время я обнаружил далее, что участки линейной стадии II и параболической стадии III функции отклика были связаны предсказуемо. В начале 60-х гг. нашего века напряжение $\tau^*$ перехода от стадии II к стадии III и его температурная зависимость при низких температурах предполагались имеющими большое значение в дислокационных моделях атомистических исследований [2]). Я обнаружил, что напряжение перехода $\tau^*$ и наклон $\theta_{II}$ касательной к графику функции отклика линейной стадии деформации были функциями коэффициентов параболы III стадии функции отклика. Эта зависимость II стадии от III стадии функций отклика не изменялась при вариации чистоты, скорости нагружения или начальной кристаллографической ориентации. Она также сохранялась при разной протяженности I стадии деформации и при разных значениях $\gamma_b$, определяющих положения начала параболы на оси деформации (оси абсцисс).

Наиболее значительным в этих наблюдениях было открытие того факта, что числовое значение коэффициента параболы функции отклика в III стадии деформации не зависело от любого из этих факторов, включая полное отсутствие I и II стадий деформации. То, что коэффициенты параболы III стадии деформации не зависят от наличия или отсутствия I и II стадий деформации в монокристалле, является наиболее важным для исследования поликристаллического твердого тела поскольку для него I и II стадии деформации никогда не наблюдались. Итак, с точки зрения механики континуума

---

[1]) Я опустил несколько аналогичных попыток предположить для упрощения линейность закона деформации в стадии III, что не согласуется с экспериментальными фактами.

[2]) См., например, анализ Зеегера (Seeger [1958, 1], стр. 156).

открытие наличия линейных областей в функциях отклика металлов высокой чистоты с гранецентрированной кубической решеткой было только дополнением к более раннему открытию Тэйлором параболического отклика, так как констатация наличия области параболического отклика сама по себе никоим образом не перестала быть справедливой в условиях существования первых линейных стадий деформации.

Для II линейной стадии деформации мы имеем

$$\tau = \theta_{II}(\gamma - \gamma_0), \tag{4.16}$$

в то время как для параболической III стадии

$$\tau = \beta(\gamma - \gamma_b)^{1/2}, \tag{4.17}$$

где $\gamma_0$ — отрезок, отсекаемый на оси абсцисс прямой, соответствующей II стадии;

$\theta_{II}$ — наклон касательной к прямой II стадии; $\gamma_b$ — отрезок на оси абсцисс, отсекаемый параболой, соответствующей III стадии, и $\beta$ — коэффициент параболы III стадии.

Приравнивая напряжения и первые производные от них при напряжении $\tau^*$ перехода от II стадии к III и заметив из эксперимента, что II стадия переходит гладко в III стадию, в 1964 г. я дал следующие уравнения:

$$\theta(\gamma^* - \gamma_0) = \beta(\gamma^* - \gamma_b)^{1/2}, \tag{4.18}$$

$$\theta_{II} = \frac{1}{2}\beta(\gamma^* - \gamma_b)^{1/2}, \tag{4.19}$$

из которых следует

$$\beta = \sqrt{2\tau^*\theta_{II}}, \tag{4.20}$$

$$\gamma_b = \frac{\gamma^* + \gamma_0}{2}. \tag{4.21}$$

Как показатель экспериментальной обоснованности этой предсказанной тесной взаимной зависимости II и III стадий, на рис. 4.75 дано сравнение результатов 49 экспериментальных исследований конечной деформации, выполненных при комнатной температуре на монокристаллах меди Блевитом, Колтманом и Редманом в 1955 г. (Blewitt, Coltman and Redman [1955, 1]), Дилом в 1956 г. (Diehl [1956, 1]), Сузуки, Икеда и Такеучи в 1956 г. (Suzuki, Ikeda and Takeuchi [1956, 1]), Бернером в 1957 г. (Berner [1957, 1]), и Зеегером, Дилом, Мадером и Ребштоком в 1957 г. (Seeger, Diehl, Mader and Rebstock [1957, 1]) (сплошные линии) с данными, предсказанными (Bell [1964, 1]) (кружки) на основании моих зависимостей (4.20) и (4.21).

В следующем, 1965 г., я обнаружил (Bell [1965, 2]), что эта корреляция для меди распространяется на 318 экспериментов 40 экспериментаторов с монокристаллами алюминия, никеля, золота, серебра и свинца. Параболическая функция отклика для III стадии де-

формации была очень просто представлена как график зависимости $\tau^2$ от $\gamma$, который, конечно, должен был иметь вид прямой линии. На рис. 4.76 показаны такие графики, полученные мною в экспериментальном исследовании 1964 г., проводившемся с монокристаллами меди, информация о котором приведена на рис. 4.75.

Несколько дополнительных иллюстраций из большого их множества, относящихся к кристаллам высокой и низкой чистоты, взя-

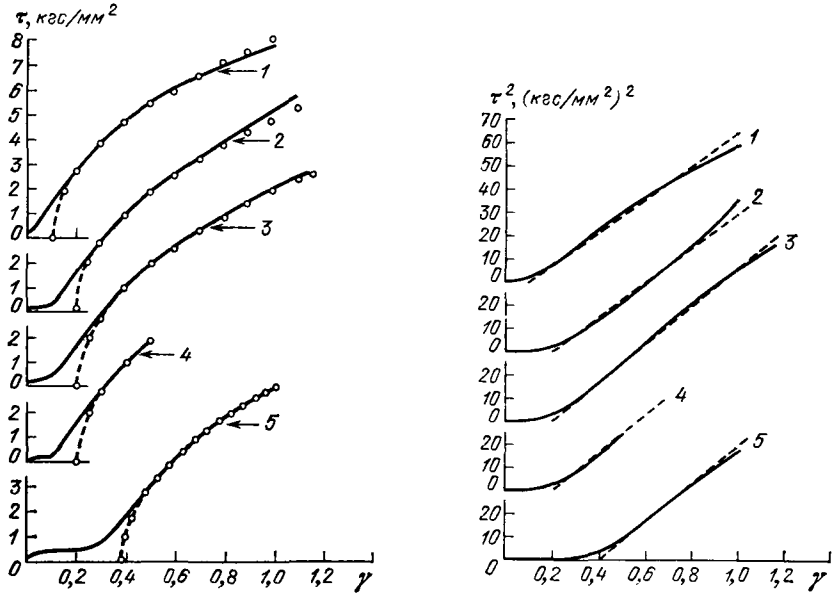



Рис. 4.75. Выполненные Беллом (1964) некоторые сравнения экспериментальных значений определяющих сдвигов в меди высокой чистоты, полученных при 300 К различными экспериментаторами (сплошные линии) с вычисленным (кружки) на основании формул (4.20) и (4.21) (штриховая линия—парабола) поведением в III стадии деформации. Коэффициент параболы был определен из экспериментов с поликристаллами с использованием коэффициента поликристалличности $\overline{m}$; *1* — Блевит и др. (304 D), *2* — Дил (С 14/11), *3* — Бернер (295 К), *4* — Зеегер и др. (опыт А), *5* — Сузуки и др. (128 f).

Рис. 4.76. Выполненные Беллом (1964) некоторые сравнения. Графики $\tau^2$—$\gamma$, построенные по результатам опытов, информация о которых дана на рис. 4.75 (сплошные линии). Штриховые линии суть прямые, наилучшим образом приближающиеся к опытным данным. Материал — медь, температура комнатная; *1* — Блевит и др. (304 D), *2* — Дил (С 14/11), *3* — Бернер (295 К), 4 — Зеегер и др. (опыт А), *5* — Сузуки и др. (128 f). По оси абсцисс отложен сдвиг, по оси ординат — квадрат касательного напряжения $\tau^2$.

тых из числа экспериментов, которые, подобно отраженным на рис. 4.75, давали для наблюдавшихся откликов в III стадии тесную корреляцию с моим предсказанием, выполненным на основании $\theta_{II}$ и $\tau^*$ II стадии, представляли (рис. 4.77) эксперименты Ноггле и Кёлера 1957 г. (Noggle and Koehler [1957, 1]) с алюминием высокой чистоты при низкой температуре и аналогичные данные Келли 1956 г. (Kelly [1956, 1]) и Бернера (Berner [1960, 1]) 1960 г. Графики $\tau^2$—$\gamma$ для алюминия высокой чистоты, испытывавшегося

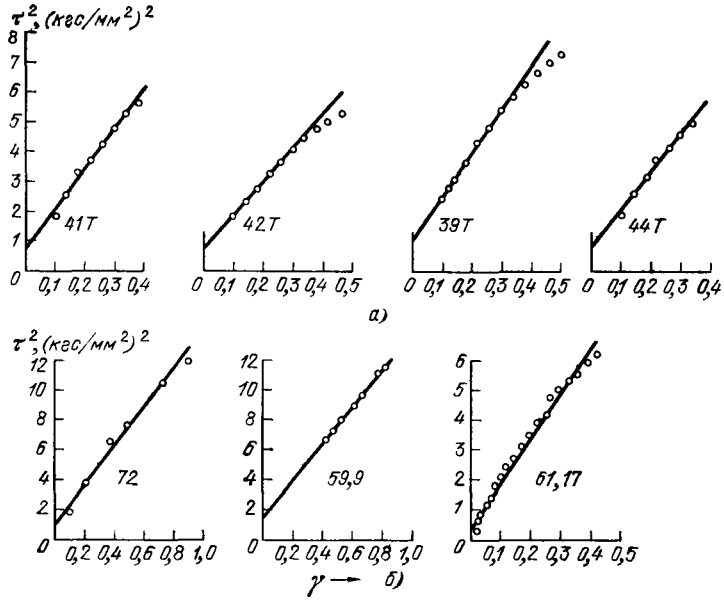



Рис. 4.77. Графики $\tau^2-\gamma$ для алюминия высокой чистоты при центральной ориентации и низкой температуре (кружки) в сравнении с предсказанной Беллом на основании формул (4.20) и (4.21) III фазой деформации (сплошные линии). *а*) данные опытов Люке и Ланге; *б*) данные опытов Тэйлора и Элам. По оси абсцисс отложен сдвиг, по оси ординат — $\tau^2$ — квадрат касательного напряжения.

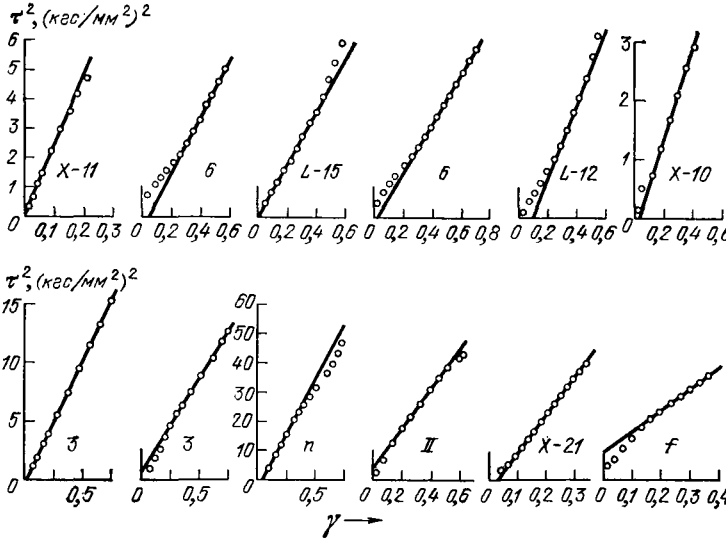



Рис. 4.78. Графики $\tau^2-\gamma$ для алюминия высокой чистоты при угловой ориентации (кружки) (опыты Кингман, Грина и Понда) в сравнении с вычисленными Беллом данными параболического обобщения — формулы (4.20) и (4.21) (сплошные линии). Эти эксперименты были проведены при сжатии. По оси абсцисс отложен сдвиг, по оси ординат — квадрат касательного напряжения $\tau^2$.

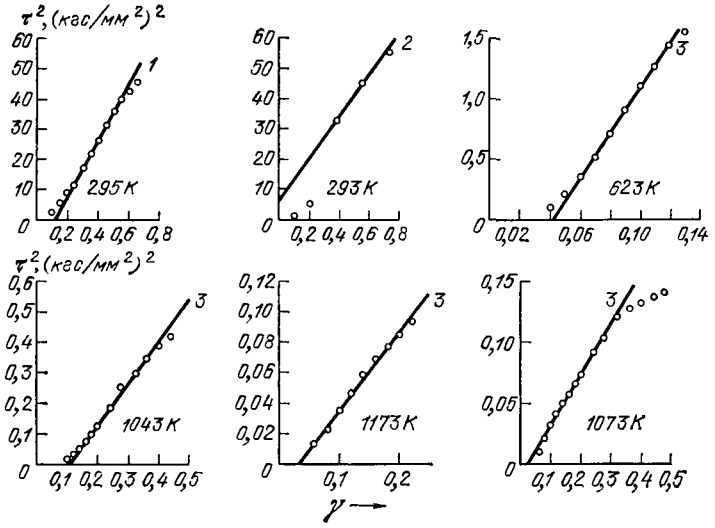



Рис. 4.79. Графики $\tau^2$—$\gamma$ для меди низкой и высокой чистоты при различных значениях температуры (кружки) в сравнении с данными, вычислениями Беллом, на основе параболического обобщения — формулы (4.20) и (4.21) (сплошные линии); *1* — опыты Захса и Веертса, *2* — опыты Тэйлора и Элам, *3* — опыты Андраде и Абова. По оси абсцисс отложен сдвиг, по оси ординат — квадрат касательного напряжения $\tau^2$.

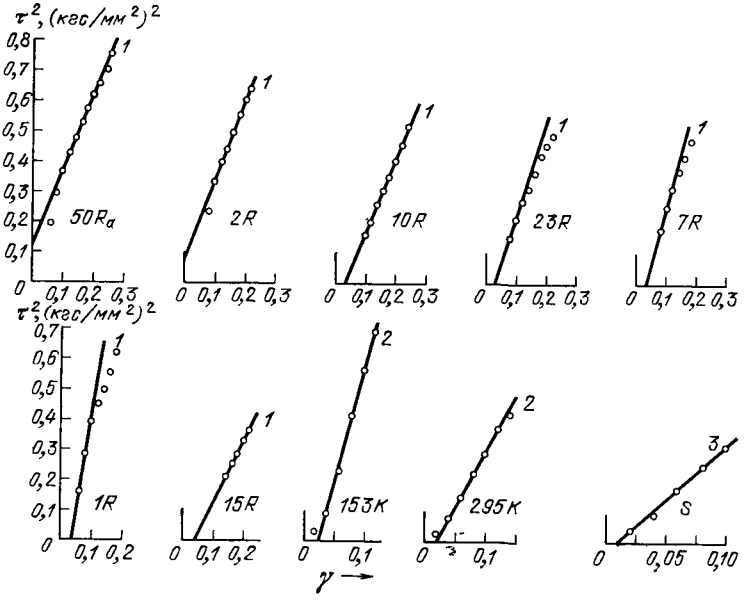



Рис. 4.80. Графики $\tau^2$—$\gamma$, построенные на основе экспериментов при комнатной температуре с алюминием высокой чистоты при центральной ориентации (кружки) в сравнении с вычисленными Беллом данными на основе его параболического обобщения — формулы (4.20) и (4.21) (сплошные линии); *1* — опыты Люке и Ланге, *2* — опыты Бернера; один эксперимент Бернера был проведен при 153 К, *3* — опыты Ноггле и Кёлера. По оси абсцисс отложен сдвиг, по оси ординат — квадрат касательного напряжения $\tau^2$.

при комнатной температуре в условиях угловой ориентации, были даны в соответствии с экспериментами Присцилл Кингман, Грина и Понда (Kingman, Green and Pond [1963, 1]) (рис. 4.78). На рис. 4.79 показаны графики $\tau^2$—$\gamma$ для монокристаллов меди высокой и низкой чистоты, построенные мною на основе экспериментальных данных, принадлежащих другим исследователям (Захс и Веертс, Тэйлор и Элам, Андраде и Абов); аналогично рис. 4.80 содержит такие же графики, построенные мною по данным Люке и Ланге (Lücke and Lange [1952, 1]), взятым из их исследования 1952 г. и по данным опытов Бернера, Ноггле и Кёлера с алюминием высокой чистоты при 153 К и при комнатной температуре в условиях центральной ориентации. Все эти данные были вычислены для моноскольжения с учетом зависимостей (4.13), (4.14) и (4.15).

Несколько этих примеров, описанных мною в 1965 г., были выбраны из общего числа 455 отдельных экспериментов с кубическими монокристаллами, посвященных определяющей деформации и проведенных с 1923 г. с алюминием, серебром, золотом, никелем, свинцом, медью, железом, танталом, молибденом, хлористым натрием и с различными в процентном отношении сплавами серебро — золото и никель — кобальт, которые я подытожил в 1968 г. (Bell [1968, 1]) для всех экспериментов как в виде графиков $\tau^2$—$\gamma$, так и в табличной форме.

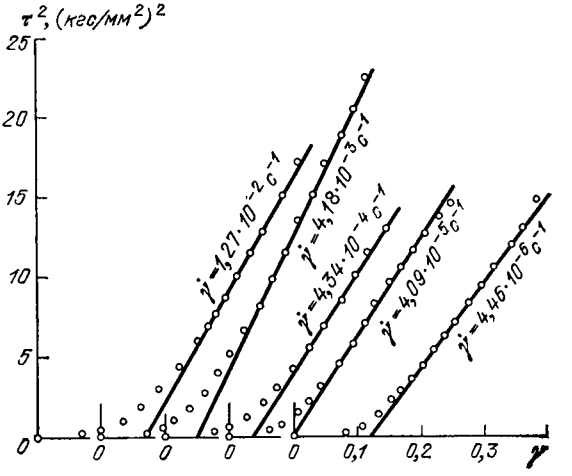



Рис. 4.81. Графикн $\tau^2$—$\gamma$ для III стадни деформации монокристаллов меди высокой чистоты при снльно различающихся скоростях деформацни и температуре 295 К. Это сравиение данных Бернера 1960 г. (кружки) и предсказанных на основе формул (4.20) и (4.21) было дано Беллом в 1965 г. Отметим отсутствие зависимости меры согласованности экспернментальных данных с теоретическнми от скорости деформации в области нзменения этой скорости в $10^4$ раз. По оси абсцисс отложен сдвиг, по оси ординат — $\tau^2$ — квадрат касательного напряженя.

Одну из интересных экспериментальных серий представляют собой пять опытов Бернера с образцами из меди высокой чистоты, проведенных в 1960 г. (Berner [1960, 1]) и посвященных определяющей деформации при значениях скорости деформации сдвига, заключенных между $\dot{\gamma}=4{,}46\cdot10^{-6}\ с^{-1}$ и $\dot{\gamma}=1{,}27\cdot10^{-2}\ с^{-1}$, т. е. отличающихся одна от другой в 10 000 раз. Графики $\tau^2$—$\gamma$ параболического отклика в III стадии деформации, приведенные на рис. 4.81

и взятые из моей статьи 1965 г. (Bell [1965, 2]), показывают, что, хотя появилось небольшое уменьшение углов наклона касательной к кривой с уменьшением скорости деформации, что можно было ожидать, учитывая вязкопластическую природу деформации, вариация в коэффициентах параболы между отдельными экспериментами оказывается существеннее, чем различие между наиболее высокой и наиболее низкой скоростями деформации. Диапазон изменения значений скорости деформации при этом тот же, который рассматривался Дойтлером (Deutler [1932, 1], см. ниже раздел 4.24) в экспериментах с поликристаллами на 28 лет раньше.

### 4.18. Квантование числовых значений коэффициентов параболы отклика и переходы второго порядка для определяющих касательных напряжений при конечных деформациях монокристаллов: Белл (1960—1968)

В 1960 г. после пяти лет измерений профилей волн конечной амплитуды в поликристаллах (см. ниже раздел 4.28) я обнаружил, что функция отклика одномерной динамической пластичности отожженных поликристаллических металлов была параболической с коэффициентами, зависящими линейно от окружающей температуры. Результаты этих первых успешных измерений параметров пластических волн, ставших возможными благодаря открытому мной новому техническому применению тонкой дифракционной решетки, естественно привели к сравнительному изучению квазистатического отклика для тех же твердых тел. Одномерная функция отклика при квазистатической деформации отожженных поликристаллов и при III стадии определяющей сдвиговой деформации кубических монокристаллов, также рассматривавшейся в этом систематическом исследовании, имела такую же форму, как и наблюдаемая в динамических опытах. Сходство функций отклика на протяжении нагружения для конечной деформации отожженных кристаллических тел в этих трех различных ситуациях привело к тому, что я предпринял большое исследование для сравнения коэффициентов парабол при определенных значениях $T/T_m$ сходственной (гомологической) температуры.

Завершив в 1968 г. это исследование, я описал (Bell [1968, 1]) свыше 2000 экспериментов по одноосному растяжению или сжатию с 27 кристаллическими телами. Наибольшая часть опытов, включая все эксперименты по распространению волн, была выполнена в моей лаборатории. Информацию об остальных, около 700, квазистатических опытах с поликристаллами и монокристаллами я получил из результатов, опубликованных в литературе по металлофизике за 45-летний период; моей целью было убедиться, что квантованный порядок, который я обнаружил, был обобщением, применимым ко всему множеству экспериментально найденных откликов

при конечных деформациях полностью отожженных кристаллических твердых тел. Это был, несомненно, наиболее полный количественный анализ функций отклика в пластической области работы материала когда-либо ранее предпринимавшийся. Исследование привело к открытию единства в поведении материала и к выяснению квантованной упорядоченности для параболических функций отклика полностью отожженных кристаллических тел. В этом разделе данного исследования приведены результаты только для определяющей сдвиговой деформации монокристаллов с кубической решеткой; соответствующее же обсуждение, относящееся к поликристаллическим телам, перенесено в разделы 4.20 и 4.21.

Каждый эксперимент по исследованию монокристаллов состоял в определении условного осевого напряжения при растяжении или при сжатии, условной осевой деформации, и двух начальных углов $\lambda_0$ и $\Phi_0$. Почти все из многочисленных экспериментаторов, как правило, использовали машины с жестким нагружением и стандартные тензометры, выпускаемые промышленностью; лишь немногие проводили опыты с использованием мертвого груза в машинах, сконструированных в лаборатории и измеряли деформации оптическим методом. Для ознакомления с деталями опытов этого большого исследования я отсылаю читателя к главе IV и приложению I тома 14 серии «Натуральная философия издательства «Шпрингер» (Bell [1968, 1]).

Первым наблюденным фактом была линейная зависимость от температуры коэффициентов параболы

$$\beta = \beta(0)(1 - T/T_m).$$

Эта форма температурной зависимости была предсказана для монокристаллов на основании исследований волны конечной амплитуды в поликристаллах при многих значениях температуры, отличающихся от температуры плавления на небольшое число градусов [1]) (см. ниже раздел 4.28). С установлением температурной зависимости стало возможным определять значения $\beta$ в нулевой точке по результатам исследования при любой температуре: таким образом, стало возможным сравнение результатов всех опытов, отнесенных к одному общему нулевому значению сходственной (гомологической) температуры. Это — та же самая процедура, которую я использовал при исследовании значений модуля сдвига изотропных тел в нулевой точке, описанная в разделе 3.44. Из экспериментов, проведенных в моей лаборатории, и из их сравнения со многими исследованиями, опубликованными в литературе, я установил, что $\beta(0)$ для

[1]) Исторически последовательность открытий была такова: в результате экспериментов по волнам конечной амплитуды я нашел численные значения коэффициентов параболы и феномен перехода второго порядка. Открытие корреляционной зависимости результатов квазистатических испытаний монокристаллов и поликристаллов происходило более или менее в этой последовательности.

определяющей деформации выражается формулой

$$\beta(0) = \left(\frac{2}{3}\right)^{r/2} \mu(0)\, B_0/\overline{m}^{3/2}, \qquad (4.22)$$

где $r=1, 2, 3, 4$ — целочисленные значения, которым соответствует множество квантованных дискретных значений коэффициентов параболы, ставящее в соответствие функциям отклика при больших деформациях квантованное распределение значений модуля сдвига при малых деформациях (см. раздел 3.44), $\mu(0)$ — линейный модуль сдвига для изотропного твердого тела в нулевой точке. В формуле (4.22) $B_0=0{,}0280$ — безразмерная универсальная константа; $\overline{m}=3{,}06$ — безразмерная константа, зависящая от отношения определяющего касательного напряжения в монокристалле к осевому напряжению при растяжении или сжатии в поликристаллическом агрегате. Первоначально уравнение было записано для поликристаллов и поэтому, как будет видно ниже, в уравнении (4.22) появляется постоянная $\overline{m}$. Это вытекает из последовавшего открытия, поскольку я вначале нашел коэффициент параболы на основе анализа результатов опытов по распространению волн в поликристаллах.

Дискретное распределение числовых значений коэффициента параболы определяется целочисленными значениями индекса формы $r$. Этому соответствует и дискретное множество самих парабол, являющихся графиками функций отклика. Начальное значение $r$ в данном опыте для данного тела зависит от окружающей температуры опыта, от чистоты образца и от предшествующей температурной и механической истории образца. Было обнаружено, что начальная форма деформации определяет отклик до разрушения для кристаллов высокой чистоты при многих значениях температуры, для большинства кристаллов при очень низких значениях окружающей температуры и в условиях очень высоких значений скорости деформации для кристаллов при всех температурах и любой степени чистоты.

Можно сослаться на несколько сот экспериментов для иллюстрации того факта, что имеется квантованная упорядоченность в откликах при конечной деформации для кубических монокристаллов в III стадии деформации. Наличие этого порядка было обнаружено во всех экспериментальных результатах от наиболее ранних опытов до опытов наших дней.

Двух примеров, включающих самые первые измерения деформаций III стадии, достаточно, чтобы продемонстрировать суть дела. В 1925 и 1926 гг. Тэйлор и Элам (Taylor and Elam [1925, 1], [1926, 1]) провели опыты с монокристаллами золота и алюминия. В 1934 г., развивая свою теорию дислокаций, Тэйлор (Taylor [1934, 1]) дал числовые значения коэффициентов парабол для этих опытов. Проверяя эти результаты в свете обобщений, развитых мною 35 лет спустя после этих опытов, я заметил, что модуль сдвига

в нулевой точке равен 3070 кгс/мм² для золота и 3110 кгс/мм² — для алюминия (см. раздел 3.44). Температура плавления золота $T_m$=1334 К, и алюминия $T_m$=932 К. Я обнаружил из экспериментов с обоими материалами, что индекс формы был $r$=5.

Коэффициенты параболы, определенные Тэйлором в опытах при комнатной температуре, были равны $4{,}52 \cdot 10^8$ дин/см² для золота и $3{,}8 \cdot 10^8$ дин/см² для алюминия. Линейная зависимость коэффициентов параболы от температуры $\beta = \beta(0)(1 - T/T_m)$ и уравнение (4.22) дают достаточную информацию при указанных значениях постоянных $T_m$ и $\mu(0)$, чтобы предсказать коэффициент параболы для алюминия на основании известного коэффициента параболы для золота.

Введя измеренные значения для золота, подсчитываем для алюминия коэффициент параболы $3{,}94 \cdot 10^8$ дин/см², который можно сравнить с экспериментальным значением Тэйлора для алюминия $= 3{,}8 \cdot 10^8$ дин/см². Поразительное соответствие между значением коэффициента параболы, полученным на основе произведенного в 1960 г. обобщения, и коэффициентами, установленными Тэйлором и Элам для этих элементов при комнатной температуре, в опытах, проведенных в середине 20-х гг. нашего века, было впервые описано в 1963 г. в статье о линейной зависимости от температуры функции отклика при конечной деформации (Bell [1963, 1]).

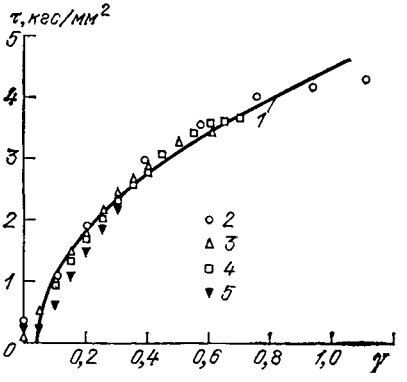



Рис. 4.82. Сравнение данных по скольжению в монокристаллах золота при комнатной температуре, полученных на протяжении последних сорока лет. Сплошная линия получена на основании уравнения (4.22) при значении целочисленного индекса формы $r$=5; *1* — теоретическая парабола, $r$=5, $\gamma_b$=0,04; *2*— Тэйлор и Элам (1926), *3* — Захс и Веертс (1930), *4* — Андраде и Гендерсон (1951), *5* — Бернер (1960). По оси абсцисс отложен сдвиг, по оси ординат — касательное напряжение.

Второй пример представляют собой четыре опыта с золотом, произведенные различными экспериментаторами, в том числе опыт Тэйлора и Элам 1926 г. Информация, относящаяся ко второму примеру, показана на рис. 4.82. Эксперименты были проделаны между 1926 и 1960 гг. Это — испытания на растяжение, на основании которых экспериментаторы подсчитали определяющую деформацию, были выполнены при комнатной температуре. Индекс формы кривой деформации для всех этих опытов был равен значению $r$=5, которое, как я обнаружил, является преобладающим для формы кривой отклика в III стадии для золота при комнатной температуре. График функции отклика для золота при комнатной температуре, найден-

ной из линейной зависимости от температуры и уравнения (4.22), показан сплошной линией на рис. 4.82.

Обозначив в уравнении (4.20) через $\beta_{r0}$ (II) коэффициенты параболы, найденные выше путем измерения $\theta_{II}$ и $\tau^*$ для II стадии и через $\beta_{r0}$ (III) коэффициенты, найденные непосредственно из наклона касательной к графикам III стадии зависимости $\tau^2$ от $\gamma$ — определяющей деформации, представим в табл. 129 результаты обследования начальной параболы, наблюдаемой в 375 опытах нескольких экспериментаторов, проводившихся начиная с 1925 г., и в табл. 130 — параболы, наблюдаемой в условиях новой формы деформации после имевшего места перехода второго порядка. Подобно Бриджмену, я определил переход второго порядка как разрыв в производной функции отклика.

Экспериментальные средние значения в этих таблицах сравнивались с полученными из уравнения (4.22). За исключением исследований Бриджмена (Bridgman [1923...1964]), которые ограничивались гидростатическим сжатием, единственной в прошлом попыткой произвести количественное сравнение существующих экспериментальных результатов для функций отклика при конечной деформации была попытка, предпринятая Понселе (Ponselet [1841, 1]). Интересно отметить, как сильно увеличилась степень важности задачи за век с четвертью.

Данные, собранные в табл. 129 и 130, охватывающие большое множество литературных источников по III стадии деформации кубических кристаллов, не включают 55 одноосных экспериментов с монокристаллами алюминия, проведенных в моей лаборатории, которые были детально описаны в 1968 г. (Bell [1968, 1]). Тщательно проведенные опыты с использованием мертвой нагрузки, обеспечивающим надежное определение точных числовых значений

Таблица 129

**Белл (1968). (Только начальная парабола)**

| Индекс формы | Количество опытов | Теоретическое $\beta_{r0}/\mu(0)$ | Среднее экспериментальное $\beta_{r0}(II)/\mu(0)$ | Среднее экспериментальное $\beta_{r0}(III)/\mu(0)$ | Среднее по всем экспериментам $\beta_{r0}/\mu(0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 0,00427 | 0,00426 | 0,00411 | 0,00424 |
| 2 | 25 | 0,00349 | 0,00353 | 0,00337 | 0,00346 |
| 3 | 43 | 0,00285 | 0,00287 | 0,00278 | 0,00283 |
| 4 | 112 | 0,00232 | 0,00228 | 0,00226 | 0,00227 |
| 5 | 152 | 0,00190 | 0,00193 | 0,00190 | 0,00191 |
| 6 | 72 | 0,00155 | 0,00158 | 0,00155 | 0,00156 |
| 7 | 41 | 0,00127 | 0,00129 | 0,00130 | 0,00130 |
| 8 | 17 | 0,00103 | 0,00108 | 0,00106 | 0,00107 |
| 9 | 8 | 0,00084 | 0,00082 | 0,00087 | 0,00085 |
| 10 | 3 | 0,00069 | 0,00074 | 0,00074 | 0,00074 |
| 11 | 2 | 0,00056 | — | 0,00057 | 0,00057 |

Таблица 130

**Белл (1968). (Начальная парабола и парабола перехода)**

| Индекс формы | Количество опытов | Теоретическое $\beta_{r0}/\mu(0)$ | Среднее экспериментальное $\beta_{r0}(II)/\mu(0)$ | Среднее экспериментальное $\beta_{r0}(III)/\mu(0)$ | Среднее по всем экспериментам $\beta_{r0}/\mu(0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 0,00427 | 0,00426 | 0,00411 | 0,00424 |
| 2 | 25 | 0,00349 | 0,00353 | 0,00337 | 0,00346 |
| 3 | 44 | 0,00285 | 0,00287 | 0,00278 | 0,00283 |
| 4 | 120 | 0,00232 | 0,00228 | 0,00227 | 0,00228 |
| 5 | 155 | 0,00190 | 0,00193 | 0,00190 | 0,00191 |
| 6 | 101 | 0,00155 | 0,00158 | 0,00155 | 0,00155 |
| 7 | 77 | 0,00127 | 0,00129 | 0,00129 | 0,00129 |
| 8 | 51 | 0,00103 | 0,00108 | 0,00103 | 0,00104 |
| 9 | 33 | 0,00084 | 0,00082 | 0,00086 | 0,00086 |
| 10 | 30 | 0,00069 | 0,00074 | 0,00071 | 0,00071 |
| 11 | 12 | 0,00056 | — | 0,00057 | 0,00057 |
| 12 | 2 | 0,00046 | — | 0,00045 | 0,00045 |

квантовано распределенных коэффициентов параболы, были поставлены и для изучения другого эмпирического аспекта функции отклика при конечной деформации, а именно, для выяснения вопроса — имеют ли место переходы второго порядка от одной дискретной формы деформации к другой при фиксированной последовательности значений конечной определяющей деформации сдвига.

Информация, относящаяся ко многим из одноосных испытаний этой серии, показана на рис. 4.83. Опыты были осуществлены на машине с нагружением мертвым весом, в которой увеличение нагрузки осуществлялось водой, наполнявшей резервуар постоянной струей, что позволяло обеспечить скорость изменения напряжений, равную 0,007 (кгс/мм²)/мин. Образцы из алюминия с чистотой 99,16% имели диаметр, равный 3/8 дюйма, и длину 4 дюйма. Пластическая деформация определялась с помощью калиброванного датчика — скобы длиной 2 дюйма, расположенного в средней части образца. Монокристалл был выращен деформационно-отжиговым методом. Начальные кристаллографические углы, дающие ориентацию относительно оси образца, показаны на рис. 4.84 [1]). Определяющее касательное напряжение и определяющая деформация сдвига были найдены по формулам (4.13), (4.14) и (4.15). Экспериментальные дискретные значения зависимости $\tau^2$—$\gamma$ (кружки) сравнивались с предсказанными наклонами (сплошные линии) для указанных на графиках рис. 4.83 индексов формы. Десять лет назад, когда я впервые исследовал такой график зависимости

[1]) См. Барре (Barret [1952, 1]) по поводу использования стереографического треугольника для определения расположения осей кристаллов, т. е. углов $\lambda_0$ и $\Phi_0$.

$\tau^2$—$\gamma$, я обнаружил не только то, что экспериментальные точки располагались на прямых линиях в соответствии с параболической функцией отклика, но также и то, что могли появляться переходы второго порядка от одного фиксированного наклона к другому,

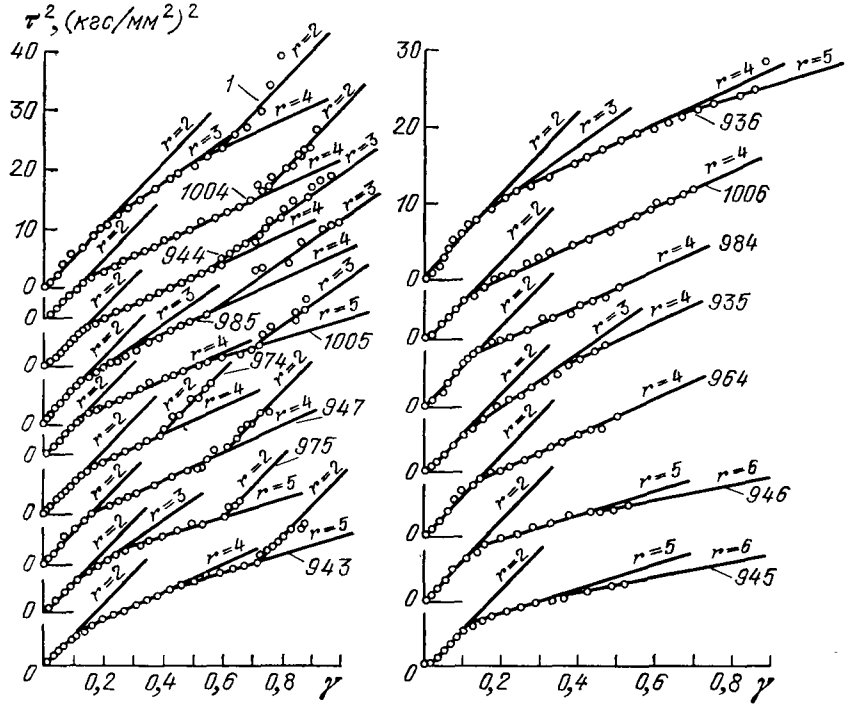



Рис. 4.83. Белл и Шарп. Графики $\tau^2$—$\gamma$ для монокристаллов алюминия низкой чистоты при макроскопическом моноскольжении. Коэффициенты параболы (сплошные линии) даны на основании формулы (4.22) при указанных значениях индекса формы $r$, $T/T_m=0{,}32$, $s=11$, $p=0$; *1* — опыт 948 (номера опытов даны и для остальных графиков). Видны переходы второго порядка при $\gamma_N=0{,}127$, где $N=13$.

зависящие от чистоты образца, от окружающей температуры и предварительной тепловой и механической истории образца [1]).

Среднее значение деформации при переходах второго порядка по данным шестнадцати опытов, которым соответствует рис. 4.83, было равно $\gamma_N=0{,}129$. Нагружение было возрастающим. Моно-

[1]) С 16 сентября 1958 г. все опыты, проведенные в моей лаборатории, включая опыты всех моих докторантов, нумеровались последовательно. (В соответствии с практикой, обычной в прошлом, но, к сожалению, менее распространенной сегодня, статьи моих докторантов, в которых они описывают свои докторские исследования, носят только их имена.) Итак, по номерам можно определить последовательность экспериментов. К настоящему моменту число экспериментов превысило 1800.

кристаллы, начальная ориентация осей которых показана на рис. 4.84, были также выращены с помощью деформационно-отжиговой техники. Они имели чистоту 99,47%, диаметр образцов 1,24 мм, а длины в пределах от 30 до 110 мм, среднее отношение длины к диаметру было 62 : 1. Деформация измерялась с помощью подвижного оптического микроскопа. Дополнительный пример показан на рис. 4.85, где изображены результаты семи опытов на растяжение, проведенных на машине, создающей малую мертвую нагрузку. Средняя деформация, соответствующая переходу, для семи опытов, результаты которых даны на рис. 4.85, была $\gamma_N=0{,}505$.

Другой пример перехода второго порядка снабжен графиками $\tau^2$—$\gamma$, которые я построил на основании результатов четырех экспериментов Тэйлора и Элам 30-х годов (Taylor and Elam [1926, 1]; Taylor [1934, 1]) по растяжению монокристаллов железа; в этих экспериментах среднее значение $\gamma$, при котором происходил переход второго порядка от начальной формы кривой деформации, соответствующей $r=2$ в уравнении (4.22), равно $\gamma_N=0{,}046$ (рис. 4.86).

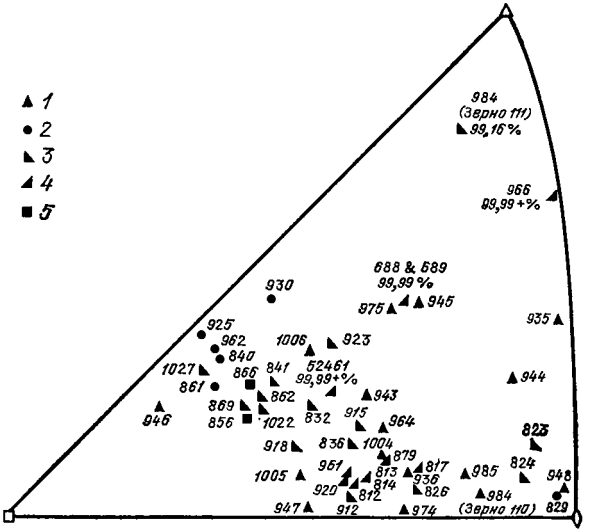



Рис. 4.84. Начальные кристаллические ориентации монокристаллов алюминия. Номера относятся к опытам, информация для которых показана на рис. 4.65, 4.66, 4.67, 4.83 и 4.85. Все измерения сделаны в лаборатории Белла; *1* — $r=2$, чистота 99,16%; *2* — $r=4$, чистота 99,47%; *3* — $r=5$, чистота 99,47%; *4* — $r=6$, чистота 99,47%; *5* — $r=8$, чистота 99,99%; во всех случаях $s=11$, $p=0$, $T/T_m=0{,}32$ (температура 300 К).

Эти несколько опытов иллюстрируют не только воспроизводимость результатов, полученную для одинаково изготовленных образцов, но также результаты, найденные путем исследования графиков $\tau^2$—$\gamma$ приблизительно 500 индивидуальных тестов, относящихся к 12 различным веществам с кубической кристаллической решеткой. Суммируя результаты этого сравнительного исследова-

ния значений определяющего сдвига на основании опытов с монокристаллами (Bell [1965, 2], [1968, 1], [1971, 1]), я обнаружил восемь фиксированных значений деформаций, при которых происходил переход; эти значения таковы: $\gamma_N$=0,046; 0,127; 0,232; 0,350; 0,520; 0,780; 1,176 и 1,765. Числовые значения этих деформаций перехода *не зависели* от окружающей температуры, от кристаллической структуры, чистоты материала и скорости деформации (Bell [1971, 1]).

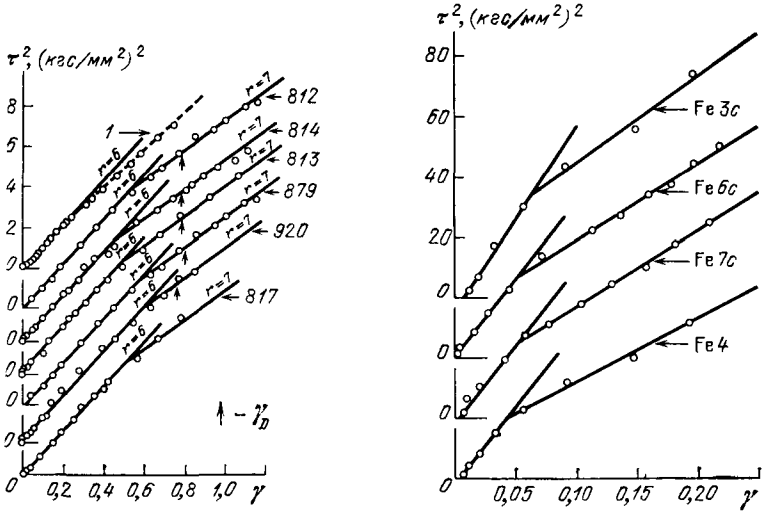



Рис. 4.85. Белл (1968). Графики $\tau^2$—$\gamma$ для определяющего сдвига в монокристалле алюминия средней чистоты. Коэффициенты параболы (сплошные линии) получены по формуле (4.22) при указанных значениях индекса формы. Видны переходы второго порядка при $\gamma_N$=0,52, где $N$=6, *1* — опыт 961 (номера опытов даны и при остальных графиках); $T/T_m$=0,32; $s$=11, $p$=0. Ось образца при повороте достигает плоскости симметрии при $\gamma=\gamma_D$.

Рис. 4.86. Графики $\tau^2$—$\gamma$ (по данным опытов Тэйлора и Элам) для монокристаллов железа низкой чистоты. Заметен переход второго порядка в первом монокристалле при деформации перехода, равной 4,6%. Температура 300 К.

Как будет показано ниже, подобное исследование результатов опытов на растяжение и сжатие поликристаллов позволило обнаружить соответственно сходную систему восьми значений деформаций перехода. Для монокристалла значения деформаций переходов были найдены эмпирически, они определяются по следующей формуле:

$$\gamma_N = \bar{n}(2/3)^{N/2}, \qquad (4.23)$$

где $\bar{n}$=1,765 — коэффициент поликристалличности, представляющий собой отношение касательного напряжения в поликристалле к определяющему касательному напряжению в монокристалле, а целое число $N$, как было установлено, приобретает значения

$$N = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 13 \text{ и } 18.$$

Функция отклика для определяющего сдвига, описывающая конечную деформацию в области III стадии деформации кубического кристалла, основывается на кинематике моноскольжения. Проверка, осуществляемая даже при помощи микроскопа, показывает, что в области III стадии деформации имеет место сложное скольжение. Статистический анализ, который дается ниже уравнениями (4.22) и (4.24) в форме «макроскопического моноскольжения», остается в области интенсивного исследования, в особенности принимая во внимание наблюдаемую локальную неоднородность деформации.

Значительный свет был пролит на один из аспектов этой проблемы Нельсоном Най-Хсинг Хсу (Nai-Hsing Hsu [1969, 1]), который в своей докторской диссертации в 1969 г. описал серию экспериментов с квадратными образцами из алюминия высокой чистоты. К одной паре противоположных сторон он прикладывал начальные напряжения посредством сжимающего устройства из мягкой резины. Имея начальную деформацию в одном направлении скольжения, Хсу после устранения начальной нагрузки приступил к измерению растяжения от осевой нагрузки, для которой максимальное касательное напряжение лежит в другом направлении скольжения. Он пытался определить с помощью X-лучевой техники в процессе деформации, а также путем осмотра поверхности образца и путем наблюдения за коэффициентом параболы функции отклика определяющего сдвига, что изменяется в скольжении, если появляется какое-нибудь изменение.

Заслуживает внимания следующее принципиальное заключение Хсу, относящееся как к поведению поликристаллического агрегата, так и к феномену определяющего сдвига в монокристалле:

«Деформация сдвига имеет тенденцию продолжаться в первоначально активной системе, даже если определяющее касательное напряжение в первоначальной системе плоскостей скольжения перестало быть таковым в процессе деформации, поскольку их уровень достиг более низкого значения, чем в одной из других систем плоскостей» (Hsu [1969, 1], стр. 91).

В окончательном заключении на основе результатов своих экспериментов на растяжение с образцами из монокристаллов алюминия, с предварительным поперечным сжатием и без него, Хсу делает вывод, что параболический закон Белла (уравнение (4.24), см. ниже) может быть принят

«...при надлежащем выборе $r$ для описания соотношения между определяющим касательным напряжением и определяющей деформацией сдвига, вычисленных на основании данных по растяжению в предположении моноскольжения. Фактически измерения, произведенные в поперечных сечениях некоторых из образцов не всегда могут быть описаны как моноскольжение, однако параболический закон все же может быть применен к определяющим величинам. Это означает, таким образом, что независимо от действительной кинематики деформаций, параболический закон описывает соотношение между деформацией в осевом направлении и растягивающим напряжением».

Начальные ориентации образцов, которые анализировал Хсу, практически охватывали весь стереографический треугольник. Интересующемуся читателю настоятельно рекомендуется прочитать оригинальную работу, которая содержит очень тщательное исследование этого явления. Наблюдавшиеся изменения вида деформации можно увидеть на одном маленьком примере данных Хсу, показанном на рис. 4.87. Прописные буквы относятся к начальным ориентациям.

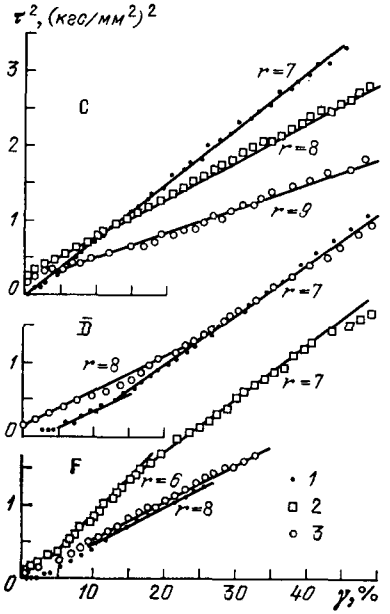



Рис. 4.87. Графики $\tau^2-\gamma$ по данным опытов Хсу для монокристалла, показывающие параболическое распределение при простом растяжении и предварительном поперечном сжатии. Коэффициенты параболы (сплошные линии) даны на основании формулы (4.22) при указанных значениях индекса формы; *1* — простое растяжение, *2* — предварительное напряжение *S* 1, *3* — предварительное напряжение *S* 2.

Когда число экспериментаторов превысило 40, а число тестов для столь простого опыта, как растяжение монокристаллических цилиндров, приблизилось к 500, перечисление деталей стало утомительным. В опубликованных статьях часто было трудно установить способ изготовления кристаллов, точность используемой Х-лучевой техники для определения положения кристаллографических осей и степень точности в измерении осевых напряжений и деформации. Большинство этих экспериментов было выполнено как вспомогательное средство для выдвижения моделей механизма дислокаций, возникавших многие годы одна из другой. Поэтому экспериментаторы, которые сами по себе не интересовались механикой сплошной среды, часто находили только качественную информацию.

Нагрузка и большая деформация могут быть измерены с достаточной точностью при минимальной затрате сил; ошибки даже в два-три градуса в измерениях кристаллографических углов не вносят больших ошибок в вычисление определяющих касательного напряжения и деформации, в особенности когда усреднено большое количество данных. Невольная малая ошибка, стремящаяся к минимуму при усреднении большого числа испытаний, вводилась, когда при вычислениях использовались данные из графиков, опубликованных в литературе. Кроме этих факторов был дополнительный факт: чтобы получить коэффициент параболы на основании данных из статей в журналах, я должен был возводить в квадрат измеренные касательные напряжения для пред-

ставления результатов в виде графика $\tau^2$—$\gamma$ и измерять его наклон.

Таким образом, существенным является то, что данные большей части отдельных тестов на основе информации, взятой из литературы, согласуются количественно с результатом, полученным на основе средних данных. Такое согласование показывает, что эксперименты XX века, несомненно, можно использовать для определения функций отклика в прикладной механике.

Итак, результаты исследования данных по монокристаллам, взятые из моей собственной лаборатории и из основной литературы, ясно показывают, что деформация III стадии имеет параболический отклик, количественно согласованный с линейной деформацией II стадии, и, более того, что деформация III стадии для образцов высокой чистоты не зависит от факта наличия или от протяженности линейной области I стадии «легкого скольжения». Коэффициенты параболы линейно зависят от температуры и всегда являются значениями дискретного квантованного набора. Переходы второго порядка от одной дискретной формы деформации к другой могут быть, а могут и не иметь места; такие переходы зависят от чистоты образца, от окружающей температуры и предыстории образца. Когда существуют переходы второго порядка, они встречаются при одном из восьми фиксированных значений деформации, которые не зависят ни от температуры, ни от чистоты, ни от кристаллической структуры.

Обозначая через $\gamma_b$ абсциссу точки пересечения параболы деформации III стадии с осью сдвигов, эти экспериментальные открытия (Bell [1964, 1], [1965, 2], [1968, 1]) для монокристаллов с кубической решеткой можно описать следующим соотношением:

$$\tau = \left(\frac{2}{3}\right)^{r/2} \mu(0)\, B_0\, (\overline{m})^{-3/2} (1 - T/T_m)\, (\gamma - \gamma_b)^{1/2}. \qquad (4.24)$$

Это обобщение будет обсуждаться далее в разделе 4.32 ввиду того, что отклик в поликристаллах может быть получен на основе данных опыта с монокристаллом.

Все тела с кубической решеткой, так глубоко изученные, имеют функцию отклика определяющего сдвига, даваемую формулой (4.24) применительно к их монокристаллам. Список таких твердых тел включает: Al, Ag, Au, Ni, Pb, Cu, Fe, Ta, Mo, NaCl, Ag — Au, Ni — Co.

### 4.19. Определение напряжений и измерение деформаций в обсуждаемых экспериментальных результатах по большим деформациям

В 1925 г. Людвик и Шой (Ludwik and Scheu [1925, 1]) сравнили экспериментально полученные функции отклика для больших деформаций при растяжении, сжатии, кручении и при холодной прокатке поликристаллической меди. Они провели эксперименты

Таблица 131

**Людвик и Шой (1925)**

| Деформация $\lambda=\lambda'$ (%) | Напряжение | | Изменение поперечного сечения $f_0/f=f'/f_0'$ | Действительные напряжения | |
|---|---|---|---|---|---|
| | растяжение $P/f_0$ (кгс/см²) | сжатие $P'/f_0'$ (кгс/см²) | | при растяжении $\sigma=P/f$ (кгс/см²) | при сжатии $\sigma'=P'/f'$ (кгс/см²) |
| 1 | 441 | 448 | 1,01 | 445 | 442 |
| 2 | 613 | 639 | 1,02 | 625 | 622 |
| 3 | 760 | 818 | 1,03 | 783 | 782 |
| 4 | 880 | 988 | 1,04 | 923 | 926 |
| 5 | 1005 | 1149 | 1,05 | 1055 | 1057 |
| 6 | 1111 | 1305 | 1,06 | 1177 | 1183 |
| 7 | 1204 | 1460 | 1,07 | 1288 | 1298 |
| 8 | 1287 | 1607 | 1,08 | 1390 | 1407 |
| 9 | 1363 | 1752 | 1,09 | 1486 | 1508 |
| 10 | 1434 | 1880 | 1,10 | 1578 | 1603 |
| 15 | 1715 | 2520 | 1,15 | 1975 | 2010 |
| 20 | 1885 | 3091 | 1,20 | 2262 | 2260 |
| 25 | 1995 | 3621 | 1,25 | 2492 | 2475 |
| 30 | 2050 | 4155 | 1,30 | 2667 | 2630 |
| 35 | 2075 | 4700 | 1,35 | 2800 | 2760 |
| 40 | 2085 | 5362 | 1,40 | 2915 | 2860 |
| 45 | 2085 | 6125 | 1,45 | 3030 | 2940 |
| 50 | 2045 | 7000 | 1,50 | 3130 | 3015 |
| 55 | | 8100 | 1,55 | 3230 | 3080 |
| 60 | | 9390 | 1,60 | 3310 | 3150 |

по кручению на образцах твердого тела, которые требовались им, чтобы ввести дальнейшие предположения для интерпретации полученных результатов. Так, при анализе экспериментов по прокатке отыскание распределения упруго-пластических деформаций требовало значительно бóльших знаний по теории пластичности упрочняющего тела, чем те, которыми они обладали.

Людвик и Шой интересовались не только изменением площади поперечного сечения при продольном сжатии или растяжении в области больших деформаций, но также вопросом о том, что является более важным перемещение или поворот в условиях одноосного воздействия при сравнении результатов для растяжения и сжатия. Людвик и Шой заключили, что в опытах на растяжение, сжатие и кручение отожженной меди повороты имели наибольшее влияние. Для таких же сплавов как латунь влияние перемещений оказалось доминирующим. Чтобы описать свои результаты, они ввели «истинные» напряжения Коши, которые требовали знания фактической площади поперечного сечения для каждого уровня нагрузки [1]).

[1]) Надаи (Nadai [1950, 1]) на стр. 253 указал на фундаментальную ошибку в выборе Людвиком и Шоем «истинных деформаций», на которых базировалось их дальнейшее исследование истинной деформации при растяжении и кручении.

Ограничиваясь обсуждением результатов испытаний отожженной меди на растяжение и сжатие, мы приводим в табл. 131 найденные Людвиком и Шоем условные напряжения в зависимости от условных деформаций и подсчитанные ими значения напряжения Коши в зависимости от *условных* деформаций.

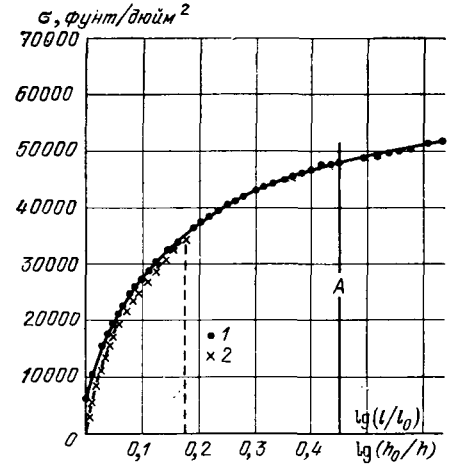



Рис. 4.88. Сравнение растяжения и сжатия меди, выполненное Тэйлором и Квинни в терминах условного напряжения и логарифмической (истинной) деформации (1934); *1* — сжатие, *2* — растяжение; по оси абсцисс отложены $\lg(l/l_0)$ (деформация растяжения); $\lg(h/h_0)$ (деформация сжатия).

Людвик и Шой сделали заключение, что использование зависимости между напряжением Коши («истинным» напряжением) и условной деформацией (отнесенной к первоначальной площади) обеспечивало одинаковый отклик при растяжении и сжатии [1]).

Тэйлор (Taylor [1934, 3], Taylor and Quinney [1934, 2]) также из опытов на простое растяжение и сжатие с поликристаллической медью пришел к заключению, прямо противоположному заключению Людвика и Шоя. Тэйлор обнаружил, что результаты для сжатия и растяжения совпадают, когда условное, или Пиола — Кирхгофа напряжение (отнесенное к первоначальной площади) ставится в зависимость от логарифмической или «истинной» деформации. Он не привел размеров растягиваемых образцов; максимальная условная деформация была 20%. Образцы, подвергавшиеся сжатию, имели длину 0,4770 дюйма и диаметр 0,4390 дюйма, т. е. отношение $L/D=1{,}087$, в то время как у Людвика и Шоя $L/D=3$. Тэйлор смазывал поверхности жиром. Его сравнение сжатия с растяжением, показанное на рис. 4.88, описывало результаты (показаны крестиками) для условных растягивающих напряжений $T$ в зависимости от $\lg(l/l_0)$, где $l$ — текущая длина образца в процессе испытания, а $l_0$ — начальная длина и результаты сжатия (жирные точки) для условного сжимающего напряжения $P$ в зависимости от $\lg(h_0/h)$, где $h$ — текущая длина образца в процессе эксперимента и $h_0$ — первоначальная длина.

---

[1]) Людвик и Шой заметили также, что когда они изменяли отношение $L\,D$ и не смазывали торцевые поверхности, отклик конечной деформации заметно изменялся, и поэтому было невозможным какое-либо сравнение функций отклика при растяжении и сжатии. (Если бы все образцы были смазаны, эффект изменения отношения $L/D$ можно было бы значительно уменьшить или свести на нет.)

Корреляция, которую установили Людвик и Шой, касалась истинного напряжения и условной деформации, а корреляция, установленная Тэйлором, была проведена для условного напряжения и логарифмической деформации. В подавляющей части литературы, посвященной экспериментам, с самого начала выполнения исследований в основном было принято описывать результаты в терминах редуцированного напряжения в зависимости от натуральной или логарифмической деформации, которые технологи называли «истинным» напряжением и «истинной» деформацией.

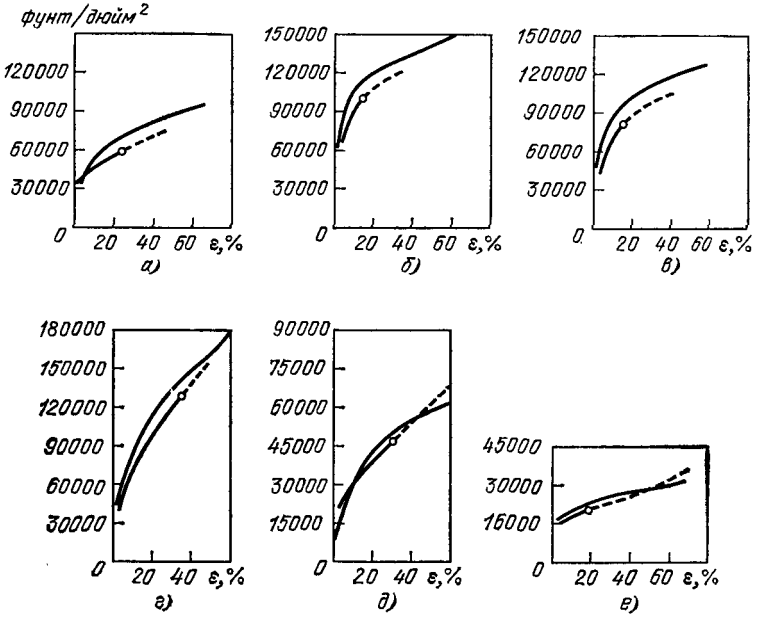



Рис. 4.89. Сравнение (выполнено Надаи (1950)) экспериментов Зибеля и Помпа (1928) по растяжению и сжатию для: *а*) сварочного железа, *б*) и *в*) углеродистой стали, *г*) никелевой стали, *д*) меди и *е*) алюминия. Сравнение проводится для «истинных» напряжения и деформации; во всех случаях верхняя кривая — сжатие, нижняя — растяжение; вдоль оси ординат отложено напряжение в фунт/дюйм², вдоль оси абсцисс отложена деформация ε в процентах.

Несколько примеров недавно выполненных сравнений, которые также указывают на близкую согласованность результатов, полученных при растяжении и сжатии, можно видеть на рис. 4.89; это — примеры из данных Зибеля и Помпа (Siebel and Pomp [1927, 1]), приведенные в том виде, в котором их представил Надаи (Nadai [1950, 1]).

В 1968 г. я привел (Bell [1968, 1]) компиляцию опытов по квазистатическому одноосному растяжению и сжатию на различных полностью отожженных поликристаллах, которая включала числовые примеры коррелированных функций откликов, когда напряжение Пиола — Кирхгофа, или условное напряжение, было нанесено на

диаграмму в зависимости от условной деформации. Один пример показан на рис. 4.90, в котором Рамеш Миттал (Mittal [1969, 1]) (часть его докторского исследования) сравнивал мой опыт по одноосному сжатию (опыт 1269) с опытом на растяжение (опыт 1320) и с опытом на совместное растяжение и кручение (опыт 1461), все

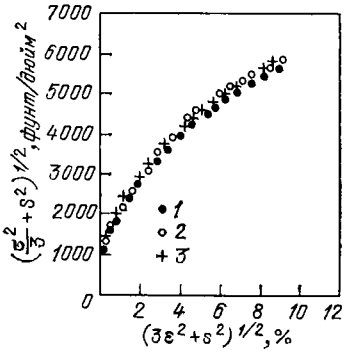



Рис. 4.90. Сравнение эксперимента Белла (№ 1269) на простое сжатие, эксперимента (№ 1320) на простое растяжение и эксперимента Миттала (№ 1461; 1969 г.) на растяжение с кручением при сложном нагружении, показывающее независимость от пути нагружения экспериментальных функций отклика поликристаллического алюминия, записаных в системе координат условное напряжение — условная деформация, для поверхности нагружения Максвелла — Мизеса (см. раздел 4.32); *1* — опыт 1269, сжатие (Белл); *2* — опыт 1320, растяжение; *3* — опыт 1461, растяжение с кручением. По оси абсцисс отложена величина $(3\varepsilon^2+s^2)^{1/2}$ по оси ординат отложена величина $(\sigma^2/3+s^2)^{1/2}$.

данные представлены в условных напряжениях и условных деформациях. В опыте на сжатие торцы образца были смазаны и отношение $L/D$ было равно трем. Опыты по растяжению и растяжению — кручению были проведены на тонкостенных трубках. Все образцы были из алюминия чистоты 99,16%; они были отожжены в течение двух часов при 1100 °F, охлаждены в печи и проверены на мелкозернистость.

Конечно, выбор способа представления экспериментально найденных напряжений и деформаций произволен. Более того, каким бы ни был способ представления для сравнения конечной деформации при одноосном напряжении в условиях деформации противоположного знака, например для сравнения результатов растяжения и сжатия, нет оснований для того, чтобы экспериментально найденный отклик представлял собой нечетную функцию. Если для данного тела результаты эксперимента, интерпретированные в терминах одной системы определения напряжений и деформаций, обеспечивают нечетную функцию отклика, нельзя надеяться получить нечетную же функцию, когда напряжения и деформации представлены иначе. Все же компетентные экспериментаторы для одного и того же твердого тела обнаруживали то, что представляется неадекватным результатом, когда они получали функцию отклика нечетной при одноосном растяжении и сжатии независимо от того, определялись ли напряжения и деформации как «истинные» напряжения в виде функции условных деформаций, или условные напряжения в виде функций «истинных» деформаций, или «истинные» напряжения в виде функции «истинных» же деформаций, или, наконец, условные напряжения в виде функции условных же деформаций. Поэтому стало необходимым выполнение

исследования функции отклика при растяжении и сжатии в условиях конечных деформаций, подобного тому, которое было произведено Хартигом при малой деформации (описано выше в разделе 2.23). (Усилия в этом направлении были обсуждены выше в разделе 4.17 и будут рассматриваться ниже в разделе 4.21.) Несовместные данные не должны быть отброшены произвольно на основании лишь выводов, которые представляются просто логичными, если исходить из единственного взгляда на вопрос. Среди современных технологов вообще существует мнение, что единственно правильным является сравнение «действительного» напряжения и «действительной» деформации. Это предположение не имеет логической основы, и, более того, для обоснования его требуется, чтобы экспериментально была получена нечетная функция отклика при растяжении и сжатии, что не оказывается очевидным при ознакомлении с огромной массой опубликованных результатов.

Все результаты, полученные в экспериментах с поликристаллами и заимствованные из литературы (230 отдельных опытов с 19 элементами и 5 двойными соединениями), которые я предполагаю описать, были преобразованы к условному напряжению и условной деформации, чтобы была возможность сравнить их с результатами 1600 опытов моей лаборатории с поликристаллами тех же веществ, представленными в условной форме.

Выбор формы представления результатов экспериментов с поликристаллами, разумеется, является произвольным, но удобство представления данных в терминах условного напряжения и условной деформации состоит в том, что при этом функция отклика оказывается так же параболической, как и для монокристаллов. Уменьшение площади уже учтено при отыскании определяющего касательного напряжения для монокристалла; благодаря этому оказывается возможным определение отклика для поликристаллов в терминах коэффициентов поликристалличности.

### 4.20. Квазистатические эксперименты с поликристаллическими телами при больших деформациях: опыты при одноосном напряженном состоянии

С 1841 г., когда Понселе (Poncelet [1841, 1]) [1] впервые изобразил диаграммы результатов квазистатических экспериментов на поликристаллах Ардана, Сэгюэна и Борне, и до настоящего времени каждое десятилетие обнаруживало новые сложности в конечных пластических деформациях. Исследование в 80-х гг. Баушингером (Bauschinger [1877, 1], [1881, 1], [1886, 1]) одномерного предела упругости превратилось в XX веке в проблему адекватного описания и понимания феномена поверхности текучести при шести не-

[1]) Читатель может вспомнить, что Понселе включил в свою статью эксперименты, выполненные Сэгюэном в 1826 г., Борне в 1834 г. и Арданом в 1835 г.

нулевых компонентах напряжения. Вязкопластичность, которую Тарстон (Thurston [1873, 1], [1874, 1, 2], [1875, 1], [1876, 1], [1877, 1], [1878, 1]) случайно наблюдал в 70-х гг., к 1960 г. стала ветвью науки, заключающей в себе обширный объем иногда противоречивых фактов. Раннее исследование в XIX веке ползучести Кориолисом (Coriolis [1830, 1]) и Вика (Vicat [1833, 1], [1834, 1]) привело веком позднее к множеству экспериментальных специализаций, охватывающих сотни лиц. Предлагались различные эмпирические формулы, описывающие полуобобщенное и аномальное поведение. Эффект Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье) ((Savart [1837, 1]), (Masson [1841, 1]), (Portevin et Le Chatelier [1923, 1])), который вызывал досаду Дюло (Duleau [1813, 1], [1820, 1]) при проведении им экспериментов в 1811 г. и заинтересовал Савара и Массона в конце 30-х гг. XIX века, к 1960 г. стал рассматриваться как фундаментальное свойство конечной деформации кристаллических тел. Это дало толчок к исследованию новых и трудных проблем о форме медленных волн и необычных соотношениях между параметрами шагов приращений.

Экспериментальные исследования после 1945 г. касались влияния термомеханической истории нагружения на последующую конечную деформацию. Возник серьезный вопрос, могут ли быть записаны определяющие уравнения для пластичности поликристаллов в терминах одновременно измеренных значений напряжения, конечной деформации, температуры и скорости деформации. Экспериментальные данные наводили на мысль о том, что даже применительно к кристаллическим телам для любой формулировки определяющих уравнений может быть необходима полная история изменений этих величин ко времени измерения их значений.

Еще не разработаны теории пластичности, которые правдоподобно отражают термодинамическую сложность единства функций нагружения и разгрузки для кристаллических тел при конечной деформации. Требования технологии разработать способ исследования тел, в которых области малых упругих деформаций и области пластических деформаций существуют одновременно, привели к аналитическому решению, которое стало известно как теория «идеальной пластичности». Вызывающие интерес проблемы были ограничены областями малой деформации. Развитие в этом направлении, которое было «идеальным» скорее для математического упрощения (пластичность при постоянном напряжении), чем для экспериментатора, пытающегося исследовать явление, уделяло особое внимание упругопластическому переходу на поддающейся построению поверхности текучести, на которой деформации предполагались малыми. С появлением понятия «идеальной пластичности» вместо осмысливания определяющих уравнений для конечной деформации стало мыслиться как ключ к проблеме чрезвычайно трудное в экспериментальном отношении исследование поверхности текучести. Эта и без того чрезвычайно трудная проблема ста-

новится почти неразрешимой, когда те исследователи, которые прибегали к эксперименту, выбирали в качестве объекта исследования предмет из области нужд технологии; в основном возникавшие у них трудности были связаны со сложностью переходной области для предварительно деформированных сплавов железа и не содержащих железа, которые имели специальные свойства, включая высокое значение предела текучести. С другой целью среди металлургов важным считалось определение критического значения определяющего касательного напряжения и получение последующей за его возникновением текучести (первой стадии пластических деформаций) для конструирования атомных моделей дислокации; это также направляло большую часть экспериментов с монокристаллами на исследование тех же самых малых деформаций области перехода упругих деформаций в пластические.

Эксперимент Тэйлора и Квинни (Taylor and Quinney [1934, 2]) с поликристаллической медью при сжатии, проведенный в 1934 г., иллюстрировал отличие этой области малой деформации от области конечных пластических деформаций. Они сжимали образец из отожженной поликристаллической меди диаметром 0,4390 дюйма и длиной 0,4770 дюйма, доводя его через 31 шаг нагружения до условной деформации, равной 0,37, что в пересчете на истинную деформацию дает $\lg(h_0/h)=0{,}46$. Соответствующий этому эксперименту график дан на рис. 4.91.

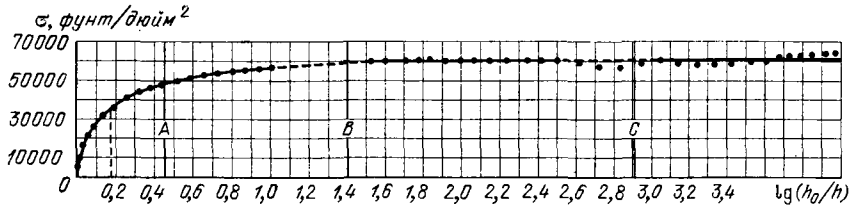



Рис. 4.91. Опыты Тэйлора и Квинни (1934). Кривая напряжение — деформация для меди при сжатии. При максимальной деформации ($\lg(h_0/h)=3{,}98$) высота образца была равна 1/53 от его первоначальной высоты. По оси абсцисс отложена истинная деформация сжатия ($\lg(h_0/h)$), по оси ординат — напряжение $\sigma$.

Тэйлор и Квинни покрывали торцы образца жировой смазкой. При значении деформации, обозначенном символом $A$, они разгружали образец. Длина образца, образовавшаяся после разгрузки и равная 0,3007 дюйма, была оставлена неизменной, но диаметр, возникший после разгрузки, равный 0,55 дюйма, был уменьшен посредством механической обработки до 0,2795 дюйма. После последующего сжатия обработанного образца до длины, равной 0,1178 дюйма, т. е. до условной (отнесенной к первоначальной длине) деформации 0,75, или соответствующей ей истинной деформации $\lg(h_0/h)=1{,}40$, образец был разгружен в точке $B$. При втором сжатии они удалили смазку торца образца. Затем они обточили

образец до диаметра 0,1973 дюйма и продолжали сжатие образца, который вновь имел несмазанные торцы, до условной деформации равной 0,95 или до соответствующей ей истинной деформации $\lg(h_0/h)=2{,}91$. В конце этой третьей ступени, обозначенной через $C$, длина образца стала равной 0,0260 дюйма, в отличие от первоначальной длины 0,4770 дюйма.

Тэйлор и Квинни продолжали экспериментальное исследование после ступени $C$, смазав торцы образца и продолжая его сжимать до 1/53 его начальной длины или до условной деформации 0,98 и соответствующей истинной, равной $\lg(h_0/h)=3{,}98$. Начальные значения $L/D$ для каждого этапа сжатия в соответствующей последовательности были: 1,087; 1,095; 0,60. Они заметили, что максимальное наблюдавшееся напряжение для первоначально отожженной меди при сжатии, равное 60 000 фунт/дюйм$^2$, было примерно таким же, как и предельное растягивающее напряжение сильно тянутой меди.

Заметим, что при логарифмической деформации, превышающей 1,5, напряжение оставалось примерно постоянным; это напоминает явление, которое заинтересовало Треска в XIX веке. При пределе упругости, составляющем примерно 10% максимального напряжения, деформация была равна $\varepsilon_Y \approx 0{,}000300$, т. е. составляла малую долю от конечных деформаций в стадиях $A$, $B$ или $C$. Поверхность текучести при малой деформации достигалась между деформацией 0,0003 и примерно 0,0030. Более общее определяющее уравнение для нагружения при конечной деформации должно охватывать в этом опыте значительно большую область деформаций: от 0,000300 до 0,98.

Экспериментатор, который пытается исследовать поверхность текучести, соответствующую первоначальному нагружению, до некоторой конечной деформации, должен столкнуться с проблемами, возникающими при разгрузке и повторном нагружении образца. Эти проблемы в добавление ко всем многочисленным сложностям, которые обнаружил Баушингер в таком опыте, включавшем среди других идентификацию точки на поверхности текучести и изменение в значении модуля как результат первоначального нагружения и разгрузки, возбуждают вопросы, выходящие далеко за пределы рассматриваемых в теории идеальной пластичности.

Экспериментатор, который исследует реакцию нагружения при конечной деформации, должен выбирать достаточно простые тела и первоначальные температурные истории, как это было в описанном эксперименте Тэйлора и Квинни, проиллюстрированном рис. 4.91, чтобы избежать эффектов какого-либо влияния предшествовавшей истории нагружения.

В настоящей книге два типа исследований — построение функции отклика и поверхности текучести — рассматриваются отдельно; отклик при нагружении полностью отожженных кристаллов будет обсуждаться первым.

### 4.21. Квантованные значения коэффициентов параболы и переходы второго порядка при конечных деформациях полностью отожженных поликристаллических тел

Лишь небольшое количество опытов на растяжение поликристаллических металлов, которые обсуждает Понселе в своем обзоре экспериментов по пластичности, было проведено до 1841 г. для образцов металлических элементов с плохо изученными свойствами и предварительной историей. На протяжении последующих лет практики-металлурги достигли успеха в создании точных технологий для большого ассортимента продукции — химических соединений металлов, которые позволяли получить не только стабильный модуль при малых деформациях в условиях различных предписанных, технологически важных нагружений, а не только при осевой деформации, но и необычно высокие значения предела упругости по сравнению с металлическими элементами. Вопрос о том, какое возможное влияние имели предварительные термическая и механическая истории, которые были частью этих технологий, а также какое влияние оказывал химический состав на вид функции отклика при конечной деформации в пластической области за пределом текучести, не был предметом практического интереса, когда разрабатывались эти технологии.

Большое число лиц, желавших сочетать потребности технологии с вкладом в науку — механику твердого тела, бесплодно выполняли как квазистатические, так и динамические эксперименты при большой деформации с этими сложными, полными тайн телами, пытаясь решить элементарные вопросы. Результаты таких усилий заполняли литературу в течение века. Эти лица молчаливо исходили из того, что эффекты памяти, будь то механическая, термическая или химическая, не являются важными для определяющих уравнений, когда рассматривалась пластичность и конечная деформация. В действительности же, однако, вытягивание, прессование, прокатка, термическая и механическая обработка, изменение тем или иным образом химического состава, предшествовавшие испытанию, создают скрытые различия.

Отделение науки от технологии в фундаментальных экспериментальных исследованиях, в особенности такой мало изученной области, как пластичность кристаллов, оказалось особенно плодотворным и для технологии и, что несомненно, является существенным средством прогресса науки. Научные эксперименты должны проводиться на относительно простых кристаллических телах, которые находятся в состоянии, достаточно близком к начальному, когда предыстория тела имеет малое значение.

На протяжении нескольких разделов этой и предыдущих глав данного исследования, я описал много отдельных квазистатических испытаний на простое растяжение, сжатие, кручение и более сложные эксперименты с более чем одним ненулевым компонентом на-

пряжения с целью подчеркнуть то, что определенно известно о большой деформации. В данном разделе моей целью является представить результаты более ранних обширных квазистатических экспериментальных исследований в основном простых отожженных поликристаллических металлов. Как и при изучении деформации монокристаллов, описанном в разделах 4.17 и 4.18, я также сравнивал очень большое число испытаний полностью отожженных твердых тел с исчерпывающим полным множеством отдельных испытаний, выполненных в других лабораториях, описанных в статьях, которые были опубликованы на протяжении нескольких последних десятилетий.

Почти все эксперименты моей лаборатории были выполнены на одной из различных специально сконструированных машин с нагружением мертвой нагрузкой и спроектированных для осуществления либо постоянства скорости нагружения, либо определенных историй возрастания нагрузки. Скорости деформации изменялись в пределах от $10^{-9}$ до $10^{-2}\,c^{-1}$. Результаты, взятые из других источников — 177 испытаний 19 металлических элементов и 5 двойных сплавов,— даны в терминах «истинное» напряжение и «истинная» деформация. Чтобы выполнить желаемое сравнение, я пересчитал все данные, полученные в опытах с отожженными поликристаллами, описание которых было найдено мною в литературе, представив их в условных напряжениях и условных деформациях; при этом не было исключено ни одно из тех описаний, где были приведены детали первоначальных расчетов, позволявшие любые результаты вновь полностью находить при построении определяющих уравнений рациональной механики.

В период между 1954 и 1968 гг., когда эксперименты с дифракционной решеткой (описанные ниже в разделе 4.28) показали, что функции отклика при простом нагружении в условиях конечной деформации для всех рассмотренных один за другим полностью отожженных поликристаллических металлов оказались параболическими, я выполнил квазистатические испытания при нагружении мертвой нагрузкой, для того чтобы определить, каков, если существует вообще, эффект от увеличения скорости деформации в $10^5$—$10^8$ раз. Это не был вновь возникший вопрос. Это был один из вопросов в механике твердого тела, который интересовал экспериментаторов на протяжении века.

Экспериментальные результаты, имеющиеся в моем обзоре работ за сорокалетний период, между тем свидетельствовали о корреляции функций отклика, полученных из опытов по распространению волн, с функциями, описанными выше для монокристаллов. Самый простой способ проиллюстрировать этот экспериментальный факт — это подвести итог наблюдениям, дать иллюстрации из опубликованных источников и отослать читателя к многочисленным деталям каждого отдельного опыта, которые были описаны в гл. III более ранней моей монографии (Bell [1968, 1]).

В 1956 г. после семи лет проведения экспериментов по большим деформациям различных металлов мне стало ясно, что первоначальная термическая и механическая история исследованных образцов имела первостепенную важность. Согласованность между собой результатов исследований поликристаллических тел, которые либо оказывались идентичными при переходе от одного эксперимента к другому, либо действительно не имели памяти по отношению к предварительной истории, привела к открытию, что горячекатаный алюминий коммерческой чистоты (99,16%), отжигавшийся в течение двух часов при температуре, составляющей примерно 90% от температуры его плавления, т. е. при 1100° F, и затем охлаждавшийся в печи в течение 24 ч, обладал требуемыми свойствами (Bell [1956, 1,3], [1960, 1, 2]). Было необходимо контролировать каждую группу образцов, чтобы увериться в малости зерен. Для этого полностью отожженного твердого тела и для нескольких других, для которых были соблюдены аналогичные условия, стало возможно произвести согласующиеся между собой воспроизводимые эксперименты для систематического исследования конечной пластической деформации при всех скоростях деформации [1]).

Сравнение экспериментов по распространению волн в поликристаллах и определяющей деформации сдвига в монокристалле показало, что функции отклика при осевом нагружении в условиях квазистатической деформации поликристаллов, в системе переменных, — условное напряжение $\sigma$ — условная деформация $\varepsilon$, — могут быть представлены таким образом:

$$\sigma = \left(\frac{2}{3}\right)^{r/2} \mu(0)\, B_0 (1 - T/T_m)(\varepsilon - \varepsilon_b)^{1/2}, \qquad (4.25)$$

где $r=1, 2, 3, 4, \ldots$ — целочисленный индекс формы; $\mu(0)$ — модуль сдвига изотропных тел в нулевой точке; $B_0=0{,}0280$ — безразмерная универсальная константа; $T$ — температура окружающей

[1]) Интересно отметить, что в последние несколько лет таким образом обработанный коммерческий чистый алюминий стал наиболее часто исследуемым стандартным твердым телом, используемым для контроля предложенных новых экспериментальных методик и вариаций старых методик в области динамической пластичности. Я предупреждаю читателя, что холоднотянутая алюминиевая проволока, изготавливаемая теперь промышленностью вместо горячекатаного алюминия, выпускавшегося ранее, вообще не обеспечивает стандартного эталонного твердого тела, когда отжигается в соответствии с предписанным рецептом. Здесь нет противоречий. Недавно я сам потратил шесть месяцев, прежде чем обнаружил, что необъявленное изготовителем изменение в технологии, при моем установившемся порядке подготовки образцов, существовавшем почти 20 лет, было источником ничем иначе необъяснимых изменений в стандартном лабораторном контрольном испытании. Холодная вытяжка одного прута достаточно заметно отличается от вытяжки другого, так что пока влияние предварительной деформации не будет устранено, будет получаться большой разброс в экспериментальных результатах.

среды и $T_m$ — температура плавления изучаемого твердого тела в градусах Кельвина.

В более чем тысяче опытов по распространению волн в различных отожженных поликристаллических твердых телах экспериментально определенная абсцисса (имеющая смысл деформации) $\varepsilon_b$ вершины параболы была равна нулю. Однако в квазистатических опытах с поликристаллическими твердыми телами всегда неизменно имелась хотя бы малая, начальная линейная область деформации и $\varepsilon_b \neq 0$. Самый простой метод иллюстрации согласованности экспериментальных результатов — это изображать данные графиком зависимости $\sigma^2$ от $\varepsilon$, так что параболические функции отклика представляются прямыми линиями [1]).

В данном исследовании мы рассматриваем в терминах механики континуума развитие результатов многих экспериментаторов на протяжении многих десятилетий. Для одноосных испытаний отожженных поликристаллов, как и для конечных деформаций сдвига монокристаллов в III стадии деформации, обзор за период свыше пяти десятилетий уже был сделан (Bell [1964, 1], [1965, 2], [1968, 1]). Для сокращения размеров этого тома я выбрал из указанного обзора иллюстративные примеры, несущие общие характерные черты, которые нашлись среди результатов испытаний. Как и выше, когда я описывал результаты Вертгейма, Треска, Баушингера и Штраубеля, я снова должен отослать читателя к оригинальным источникам для более детального ознакомления с экспериментами. В этом случае будет обеспечено ознакомление с полным описанием каждого опыта по одноосным испытаниям образцов, выполненного в моей лаборатории или опубликованного в статьях других исследователей (Bell [1968, 1], Chap III).

Мы начнем с графиков зависимости $\sigma^2$ от $\varepsilon$ в 48 опытах на одноосное растяжение и сжатие, которые я получил на машине с нагружением мертвой нагрузкой в период между 1957 и 1967 гг. Эти опыты заслуживают внимания как составляющие часть большого числа опытов, сделанных с отожженным алюминием между 1954 и 1968 гг., которые обеспечивали эмпирическое доказательство того, что уравнение (4.25) описывает отклик при конечной деформации. Эти результаты показали мне, что было важно как производить дальнейшие испытания других твердых тел, так и интенсивно знакомиться с экспериментами, опубликованными в литературе [2]).

---

[1]) Поскольку значения напряжения возведены во вторую степень, корреляция эксперимента и вычисленных данных в этой форме обеспечивает даже более жесткий контроль, чем нанесение точек на плоскость $\sigma$—$\varepsilon$, ввиду того, что любые отклонения при переходе к системе $\sigma^2$—$\varepsilon$ усиливаются.

[2]) В противоположность малой деформации, при большой деформации одноосное испытание является простым по идее и может быть выполнено тщательно, без требования обеспечения особо высокой точности. По изучении результатов таких опытов любое обобщение, имеющее целью унифицировать наблюдение, экспериментально обосновано.

На рис. 4.92, 4.93 и 4.94 показаны данные этих 48 опытов на одноосную деформацию под действием мертвой нагрузки, из которых 41 опыт был проведен при комнатной температуре с полностью отожженным поликристаллическим алюминием различной чистоты. В каждом отдельном случае координатами центра кружка являются измеренные условное напряжение и условная деформация.

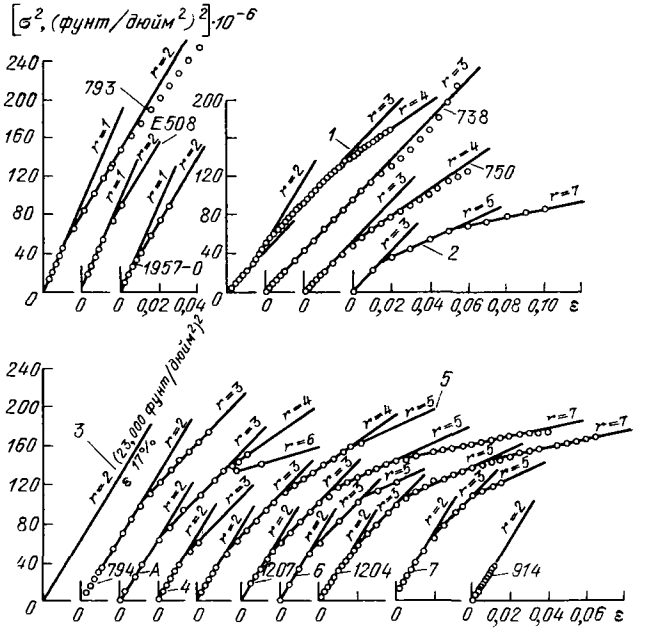



Рис. 4.92. Опыты Белла (1957—1967). Эксперименты на осевую деформацию с поликристаллическим алюминием низкой чистоты (кружки; графики представлены в осях $\sigma^2$—$\varepsilon$; $\sigma$ — напряжение, $\varepsilon$ — деформация), показывающие изменение формы параболической (в системе $\sigma$—$\varepsilon$) кривой отклика и переходы второго порядка. (Чистота алюминия 99,16%, $T$=300 К.) Эксперименты 786, 787, 788, 914, 971, 1204 и 1207 проводились при растяжении, остальные при сжатии. Сплошные линии — теоретический результат, полученный по формуле (4.25) (рядом с графиками указаны номера экспериментов и целочисленные значения $r$ — индекса формы кривой отклика); *1* — по усредненным результатам опытов 633, 634, 635, 737, 791, 792; *2* — опыт на растяжение № 971, чистота алюминия 99,71%; *3* — по усредненным результатам 485 динамических опытов с алюминием; *4* — по усредненным результатам опытов BRL—4 и BRL—5; *5* — по усредненным результатам опытов 1, 2, 3 (1957); *6* — по усредненным результатам опытов 786, 787, 788; *7* — по данным опыта Джонсона, Вуда и Кларка. Номера или иные обозначения других, не упомянутых выше опытов, приведены на рисунке у соответствующих графиков.

Для всех указанных уровней чистоты материала и для опытов как на растяжение, так и на сжатие данные, изображенные точками в плоскости $\sigma^2$—$\varepsilon$, могут быть представлены прямыми линиями, соответствующими уравнению (4.25). Так как $\mu(0)$=3110 кгс/мм², $T_m$=932 К для алюминия и универсальная постоянная $B_0$=0,0280 известны, наклоны прямых при окружающей температуре $T$ (сплошные линии), предсказанные уравнением (4.25) для различных ин-

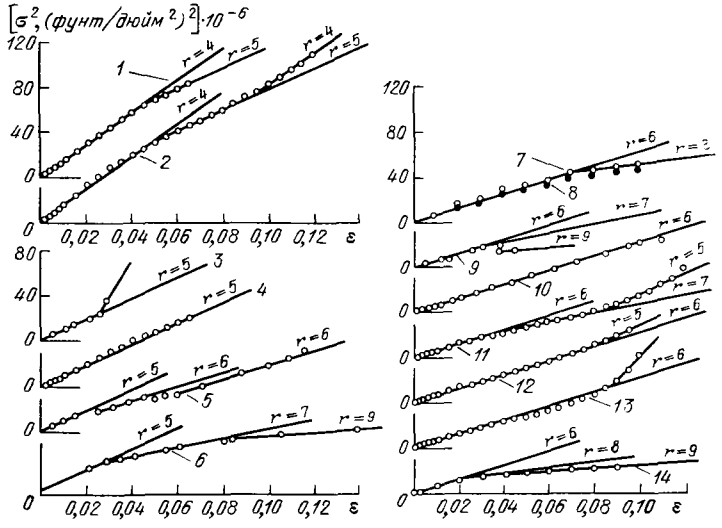



Рис. 4.93. Опыты Белла (1957—1967). Эксперименты по растяжению и сжатию с поликристаллическим алюминием средней и высокой чистоты (кружки) в сравнении с результатом, полученным по формуле (4.25) (сплошные линии) при указанных $r$ — индексах формы ($T$=300 К); *1* — опыт 796, чистота 99,45%, сжатие; *2* — опыт 795, чистота 99,45%, сжатие; *3* — опыт С, чистота 99,99%, сжатие; *4* — опыт 797, чистота 99,45%, сжатие; *5* — опыт В, чистота 99,99%, сжатие; *6* — опыты Каррекера и Хиббарда, чистота 99,98%, растяжение; *7* — опыт 970, чистота 99,99%, растяжение; *8* — опыт 968, чистота 99,47%, растяжение; *9* — опыт К, чистота 99,99%; *10* — по усредненным данным опытов 1, 2, 3, 4 (1965), чистота 99,99%, сжатие; *11* — опыт 730, чистота 99,99%, сжатие; *12* — опыт 726, чистота 99,99%, сжатие; *13* — опыт 727, чистота 99,99%, сжатие; *14* — опыт 733, чистота 99,99%, растяжение; ε — деформация, σ — напряжение.

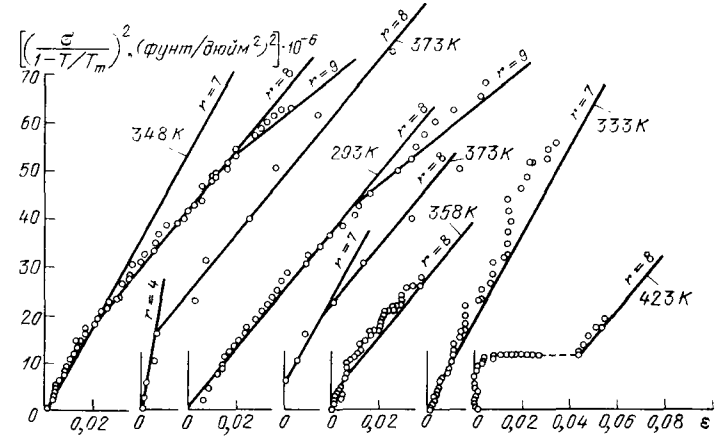



Рис. 4.94. Опыты Белла (1968). Сжатие поликристаллического алюминия высокой чистоты (99,99%) (кружки) в сравнении с результатами, полученными по формуле (4.25) (сплошные линии) при указанной окружающей температуре и целочисленных значениях $r$ — индекса формы. Всюду по оси абсцисс отложена деформация ε; по оси ординат отложено $\left[\left(\frac{\sigma}{1-T/T_m}\right)^2 (фунт/дюйм^2)^2\right]\cdot 10^{-6}$.

дексов формы $r$, могли быть определены и сравнены с полученными экспериментально.

Как было обнаружено в процессе исследования деформаций монокристаллов в III стадии, описанного выше в разделе 4.18, конечная деформация представлялась при помощи серии парабол с квантованным распределением форм деформации, включающим переход

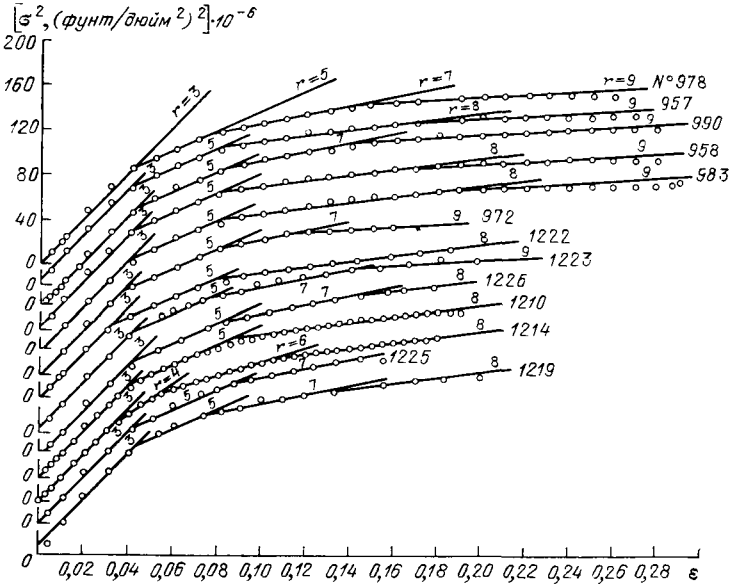



Рис. 4.95. Тринадцать опытов на одноосное растяжение при постоянной скорости напряжения с поликристаллическим алюминием низкой чистоты (99,16%) (кружки), показывающие воспроизводимость переходов в форме кривой откликов при второй и третьей критических деформациях, т. е. $N=13$, $N=10$. Сплошные линии — теоретические результаты, полученные по формуле (4.25) ($T=300$ K). Рядом с графиками указаны номера опытов и целочисленные значения $r$ — индекса формы. Всюду по оси абсцисс отложена деформация $\varepsilon$, по оси ординат $[\sigma^2$ (фунт/дюйм$^2)^2]\cdot 10^{-6}$.

второго порядка от одной формы к другой. Рис. 4.95 содержит информацию о 13 опытах на растяжение с полностью отожженным алюминием 99,16% чистоты [1]).

Во всех этих опытах обнаруживается переход второго порядка от $r=3$ к $r=5$ при примерно 4% деформации и еще один переход от $r=5$ к $r=7$ или $r=8$ при среднем значении деформации 7,5%. Ссылаясь снова на последующие разделы, посвященные распро-

[1]) Это был промышленный алюминий 1100F—H18. Обсужденные опыты были проведены лишь с указанным твердым телом. Сотни всех остальных опытов в моей лаборатории, проведенных с 1954 г., выполнялись с поликристаллическим алюминием сравнимой с указанной в тексте и на рис. 4.92 чистоты, но материал был значительно меньше предварительно упрочнен при изготовлении; этот материал был обозначен символом 1100F—H2.

Начальный индекс формы $r$ для 1100F — H2 равен двум, а для 1100F — H18 равен трем.

странению пластических волн (раздел 4.28), мы видим, что сотни экспериментов с полностью отожженными 99,16% чистоты поликристаллами алюминия (1100F — H2, отожженными в течение двух часов при 1100° F и охлажденными в печи) давали при комнатной температуре коэффициент параболы, равный 39,4 кгс/мм² (5,60·$10^4$ фунт/дюйм²), который представляет собой точно значение согласно (4.22) при $r=2$ и указанной температуре (Bell [1965, 2], [1967, 2], [1968, 1], [1961, 1], [1963, 1]).

Изучая корреляцию конечной деформации, найденной, с одной стороны, путем изучения распространения волны и путем квазистатического испытания монокристалла и, с другой стороны, на

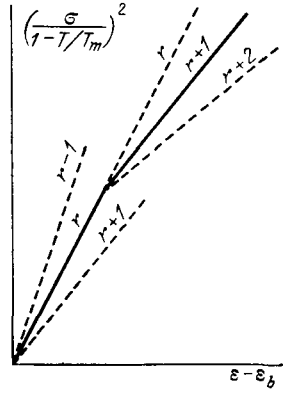



Рис. 4.96. Схематическая диаграмма зависимости (напряжение)² — деформация, даваемой формулой (4.25), показывающая меру различия наклонов для соседних значений индекса формы $r$. По оси абсцисс отложена разность $(\varepsilon-\varepsilon_b)$, а по оси ординат — выражение $\left(\frac{\sigma}{1-T/T_m}\right)^2$, входящие в зависимость

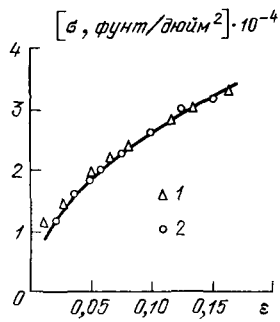
$$\left(\frac{\sigma}{1-T/T_m}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^r \mu^2(0)\, B_0^2(\varepsilon-\varepsilon_b).$$

основе квазистатических одноосных опытов с отожженными поликристаллами, я получил схематическую диаграмму, показанную на рис. 4.96. Этот рисунок имеет некоторое значение как иллюстрация того факта, что на графиках $\sigma^2$—$\varepsilon$ обнаружение ошибок, допущенных при определении напряжения, упрощается по сравнению со случаем, когда используется график $\sigma$—$\varepsilon$. Различие наклонов касательных к кривой $\sigma^2$—$\varepsilon$ на границе отдельных ее участков достаточно четкое — тангенсы соответствующих углов отличаются не менее, чем в 1,5 раза.

Из уравнения (4.25) мы видим, что если два поликристаллических тела имеют одинаковые значения как $\mu(0)$, так и индекса формы $r$, то их функции отклика при простом растяжении или простом сжатии при $T=0$ K совпадают. В нулевой точке модули сдвига алюминия и серебра почти идентичны. Для алюминия $\mu(0)=3110$ кгс/мм², и для серебра $\mu(0)=3170$ кгс/мм². При наличии высокой чистоты оба твердых тела имеют одинаковый индекс формы $r=2$ в условиях низких температур. Чтобы проиллюстрировать наличие совпадения функций отклика при 0 K, я нанес на один рисунок (рис. 4.97) как результаты опыта на растяжение образца из алюминия чистоты 99,99 % малого диаметра, который был проведен при окружающей

температуре 20 К Каррекером и Хиббардом (Carreker and Hibbard [1957, 2]) в 1957 г., так и результаты опыта на растяжение с образом из серебра чистоты 99,97 +%, диаметром 0,5 мм, который Каррекер (Carreker [1957, 1]) провел в 1957 г. при той же температуре окружающей среды 20 К. Функции отклика для алюминия (кружки) и для серебра (треугольники) не только совпадают, но находятся в полном согласии с количественным предсказанием на основании формулы (4.25) (сплошная линия) при значении $B_0 = 0{,}0280$, полученном в исследовании распространения волн.

Эти два опыта были частью серии экспериментов, проделанных при многих значениях окружающей температуры. Для дальнейшего показа применимости функции отклика, описываемой формулой (4.25), полученной из исследований распространения волны



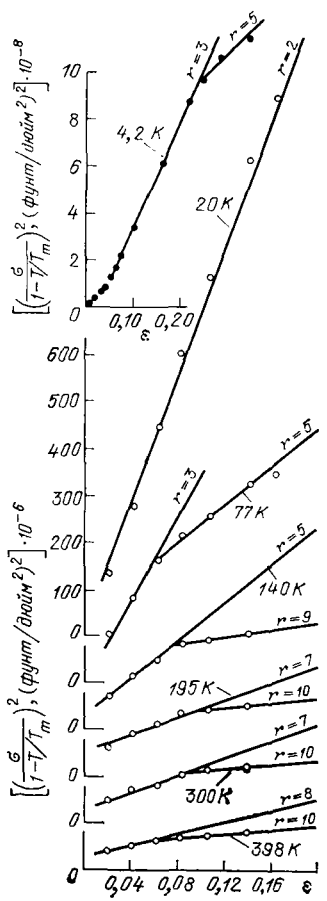




Рис. 4.97. Экспериментальные данные, найденные в опытах с серебром и алюминием при 20 К в сравнении с результатами, полученными по формуле (4.25) для этих двух металлов при данной температуре (сплошная линия); *1* — экспериментальные данные Каррекера; серебро, отожженное при 250°С, $T=20$ К; *2* — экспериментальные данные Каррекера и Хиббарда; алюминий, отожженный при 450 °С; $T=20$ К, $\beta=8{,}24\cdot10^6$; сплошная линия — парабола; $T=0$ К; $\varepsilon$ — деформация, $\sigma$ — напряжение.

Рис. 4.98. Опыты Каррекера и Хиббарда (1957) и Хосфорда и др. (1960) по растяжению поликристаллического алюминия высокой чистоты при указанных значениях температуры, приведенные для создания возможности соотнесения к абсолютному нулю. Данные графиков зависимости (напряжение)$^2$ — деформация — сравниваются с результатами, полученными по формуле (4.25) ($r$ — индекс формы). *1* — Каррекер и Хиббард, чистота 99,87%, *2* — Хосфорд и др., чистота 99,99%. $\sigma$ и $\varepsilon$ — условные напряжения и деформации; данные пересчитаны Беллом с результатов опытов Каррекера и Хиббарда и Хосфорда и др., представленных в истинных напряжении и деформации.

при сжатии, я включил прочие эксперименты Каррекера и Хиббарда по растяжению, показанные на рис. 4.98 для алюминия и на рис. 4.99 для серебра. Все эти данные в оригинале были представ-

лены в терминах «истинное» напряжение и «истинная» деформация. Поскольку авторы привели свои вычисления, я смог пересчитать их результаты в условное напряжение и условную деформацию, чтобы сравнить их с функцией отклика (прямые линии), соответствующей формуле (4.25).

Число отдельных испытаний поликристаллов 19 элементов и 5 двойных сплавов, как проведенных в моей лаборатории, так и взятых из литературы, было свыше 250. Согласованность этих данных с формулой (4.25) и со структурой формы конечной деформации была достаточно доказана (Bell [1968, 1], главы III и VIII). Здесь достаточно привести несколько примеров, чтобы показать, что отклик в основном не зависит от кристаллической структуры и скорости деформации; было обнаружено, что последняя несколько

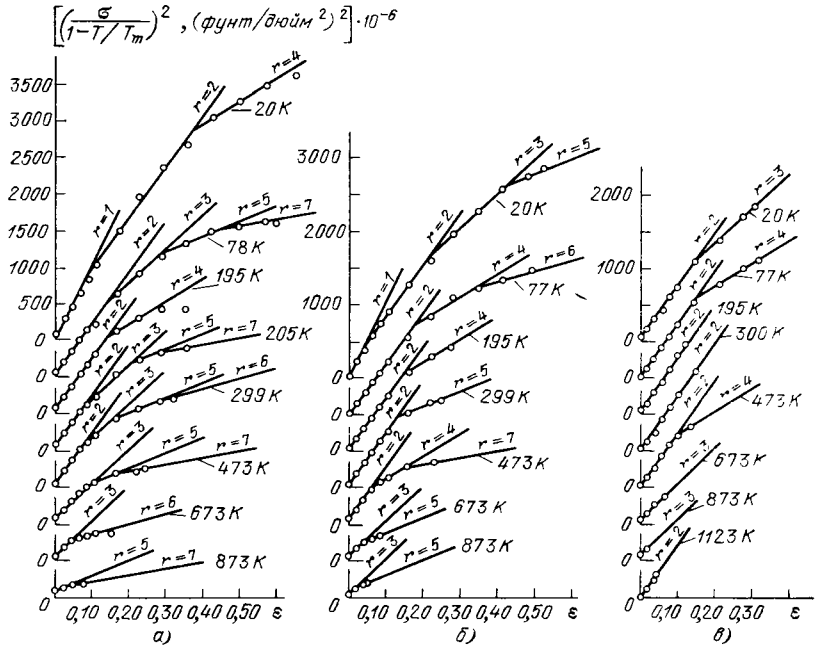



Рис. 4.99. Опыты Каррекера (1957) по испытанию поликристаллического серебра при указанных значениях температуры, приведенных для создания возможности соотнесения к абсолютному нулю. Данные графиков (напряжение)$^2$ — деформация сравниваются с результатами (сплошные линии), полученными по формуле (4.25). *а*) серебро, отожженное при 976 К; *б*) серебро, отожженное при 1073 К; *в*) серебро, отожженное при 1173 К. *r* — целочисленные значения индекса формы, указанные рядом с графиками. Здесь σ и ε представлены как условные напряжение и деформация; данные пересчитаны Беллом с результатов опытов Каррекера, приведенных в истинных напряжении и деформации.

влияет на появление переходов второго порядка и на целочисленные индексы формы при возникновении переходов второго порядка. Это, конечно, было причиной изменения отклика, прежде относившегося на счет вязкопластичности.

На рис. 4.100 приведена компиляция квазистатических опытов Хокетта (Hockett [1959, 1]), проводившихся при относительно высокой скорости деформации с орторомбическим очищенным ураном при сжатии. Усредненные данные (кружки) после пересчета в информацию в системе осей: квадрат условного напряжения и условная деформация, находятся в близком соответствии с основным характером, определяемым формулой (4.25).

Для урана $\mu(0)=8450$ кгс/мм$^2$ и $T_m=1405$ К; образцы Хокетта имели диаметр 0,800 дюйма; торцы их во время опыта были смазаны. Они деформировались на специально сконструированном

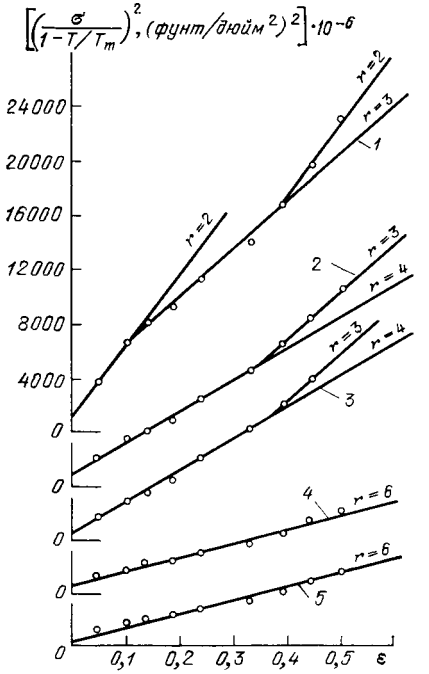



Рис. 4.100. Опыты Хокетта (1959) по сжатию очищенного урана со скоростями деформаций: $\dot{\varepsilon}=1\,\text{с}^{-1}$ (нижняя кривая) и $\dot{\varepsilon}=10^{-1}\,\text{с}^{-1}$ (верхние кривые) при указанных значениях окружающей температуры, приведенных для создания возможности соотнесения к абсолютному нулю. Экспериментальные данные (кружки) сравниваются с результатами, полученными для урана при данных значениях температуры на основании формулы (4.25). Отметим наблюдающиеся переходы второго порядка, имеющие место при четвертой и шестой деформациях перехода, т. е. при $N=10$ и $N=2$; *1* — 673 К (7 опытов); *2* — 773 К (10 опытов); *3* — 773 К (9 опытов); *4* — 873 К (7 опытов); *5* — 873 К (9 опытов). Здесь $\sigma$ и $\varepsilon$ даны как условные напряжение и деформация; данные пересчитаны Беллом с результатов опытов Хокетта, представленных в истинных напряжении и деформации.

аппарате, нагружаясь с помощью быстро вращающегося устройства, преобразующего вращательное движение в поступательное; была достигнута скорость деформации от $10^{-1}$ до 1 с$^{-1}$. Опыты были проведены при предусмотренных значениях окружающей температуры.

Формула (4.25) не содержит членов, которые относятся к специфической кристаллической структуре образца. Тот факт, что функции отклика не зависят от кристаллической структуры, иллюстрируется показанными на рис. 4.101 результатами семи экспериментов на сжатие, которые я провел (Bell [1968, 1]) в 1965 г. с образцами из оттожженного цинка двух различных степеней чистоты, длиной 3 дюйма и диаметром 1 дюйм. Цинк — металл с гекса-

гональной решеткой, для которого значения модуля упругости при малой деформации, как известно, имеют разброс — они заметно меняются от одного образца к другому; для этого металла отсутствует III стадия деформирования в функции отклика определяющей деформации сдвига монокристалла. Несмотря на это, при одноосных опытах с поликристаллическими образцами в условиях квазистатического нагружения (и при распространении волны, как будет показано ниже) наблюдаемый экспериментальный отклик

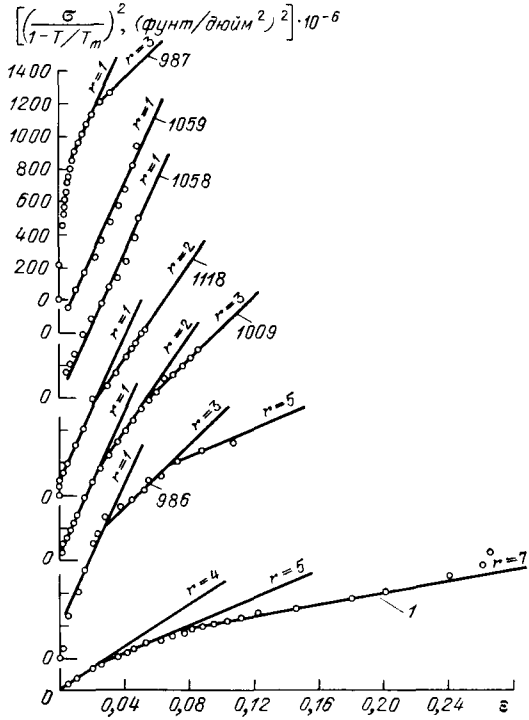



Рис. 4.101. Опыты Белла (1968) на сжатие поликристаллического цинка низкой чистоты (99,2%) при $T=300$ К (кружки) (все данные для создания возможности сопоставления приведены к нулю шкалы Кельвина). Экспериментальные данные сопоставляются с результатами, полученными по формуле (4.25) (сплошные линии). Рядом с графиками указаны номера опытов и целочисленные значения $r$ — индекса формы кривой отклика в системе осей $\sigma-\varepsilon$; *1* — опыт 1132, чистота 99,99%.

дается основным соотношением, т. е. формулой (4.25). Для цинка $\mu(0)=4660$ кгс/мм² и $T_m=692{,}5$ К. Опыты, результаты которых показаны на рис. 4.101, были проведены при комнатной температуре. Образцы были отожжены при 588 К в течение 2,5 ч и охлаждены в печи.

В качестве другого примера одноосных опытов, которые важны для последующего обсуждения результатов, я включил 16 опытов по одноосному растяжению Каррекера и Хиббарда (Carreker and Hibbard [1953, 1]), проведенных в 1953 г., с медной проволокой чистоты 99,99%, диаметром 0,030 дюйма. Значения температуры отжига показаны на рис. 4.102, а значения окружающей температуры опытов изменялись от 20 до 1023 К. Для меди $\mu(0)=5080$ кгс/мм²

и $T_m=1356$ К. Имеется в основном согласование с наклонами прямых, предсказанными формулой (4.25). Поскольку медь — хороший проводник и легко доступна для получения лабораторией, медь высокой чистоты исследовалась в продолжение более века. Значение индекса формы $r=4$, наблюдаемое в условиях комнатной

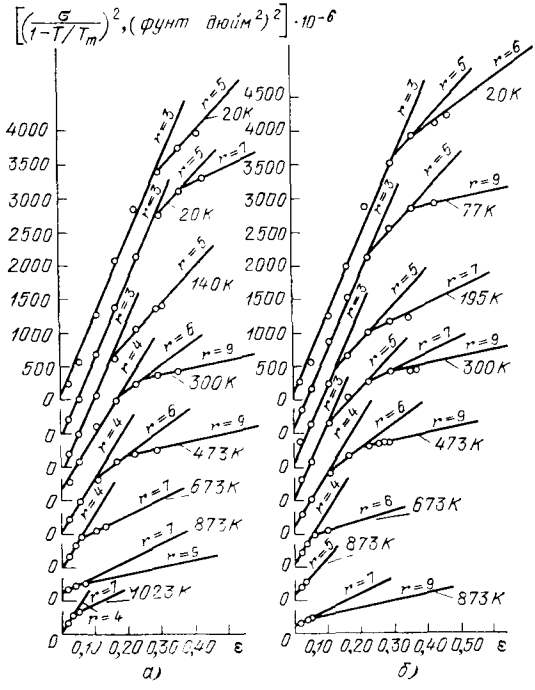



Рис. 4.102. Опыты Каррекера и Хиббарда (1953) с медью высокой чистоты (99,999%), выполненные при указанных значениях температуры (все данные (кружки) для создания возможности сопоставления приведены к абсолютному нулю). Экспериментальные результаты сравниваются с результатами (сплошные линии), полученными по формуле (4.25) при целочисленных значениях индекса формы кривой отклика в системе осей $\sigma-\varepsilon$, указанных рядом с графиками. *а*) Медь, отожженная при 1023 К; *б*) медь, отожженная при 823 К. Здесь $\sigma$ и $\varepsilon$ даны как условные напряжение и деформация; данные пересчитаны Беллом с результатов опытов Каррекера и Хиббарда, представленных в истинных напряжении и деформации.

температуры после высокого отжига, указанное на рис. 4.102, действительно было типичным для откликов при конечной деформации, даже начиная с экспериментов Савара в 1837 г.

Эксперимент, описанный в конце раздела 4.20, представлял собой опыт Тэйлора и Квинни (Taylor and Quinney [1934, 2]) по сжатию поликристалла, проведенный в 1934 г. (рис. 4.91). Результаты этого опыта, продолжающегося до очень большой деформации, были представлены авторами в виде зависимости условного напряжения от логарифмической (истинной) деформации. Пересчет в зависимость $\sigma^2-\varepsilon$ для условных напряжений и деформации, который я провел для данного исследования (рис. 4.103, *а*), позволил обнаружить, что отклик на условную деформацию, равную примерно 60%, описывается формулой (4.25) с единственным переходом второго порядка, происходящим при $\varepsilon_N=0{,}17$.

Начиная с опытов с отожженным алюминием, результаты которых представлены на рис. 4.92, мы видим примеры переходов вто-

рого порядка при $\varepsilon_N=0{,}015$; в опытах, которые соответствуют рис. 4.94, переходы второго порядка были при $\varepsilon_N=0{,}040$ и $\varepsilon_N=0{,}075$; и в опыте Тэйлора и Квинни с медью, данные которого изображены на рис. 4.103, *а*, $\varepsilon_N=0{,}256$. Обзор результатов для поликристаллов позволил обнаружить 8 таких деформаций перехода, которые, подобно III стадии деформации монокристаллов, могут быть представлены эмпирически с помощью формулы

$$\varepsilon_N=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{N/2}, \qquad (4.26)$$

где $N$, как и раньше, имеет целочисленные значения: $N=0$, 2, 4, 6, 8, 10, 13 и 18. Им соответствуют значения $\varepsilon_N=0{,}577$; 0,385; 0,256; 0,171; 0,114; 0,076; 0,041 и 0,015; для всех них были найдены соответствующие экспериментальные величины переходов второго порядка (Bell [1968, 1], [1971, 1]). Как будет видно в разделе 4.32, деформации перехода для определяющей сдвиговой деформации монокристалла и поликристалла связаны. Анализ многих сотен опытов приводит к следующему соотношению:

$$\gamma_N=\bar{m}\varepsilon_N, \quad \text{где } \bar{m}=3{,}06. \qquad (4.27)$$

Этот экспериментальный факт важен для понимания пластической деформации агрегатов (поликристаллов), которая представляется некоторым статистическим преобразованием откликов их кристаллических компонентов.

Для сравнения с опытом Тэйлора и Квинни с отожженной медью при сжатии, результаты которого показаны на рис. 4.103, *а*, я включил опыт на растяжение, проведенный в моей лаборатории с таким же, но на этот раз полностью отожженным материалом, при нагружении мертвой нагрузкой тонкостенной полой трубки. Скорость нагружения была постоянной; проведение опыта заняло около часа. Результаты, показанные на рис. 4.103, *б*, как и для опыта Тэйлора и Квини на рис. 4.103, *а*, нанесены как на плоскости $\sigma-\varepsilon$, так и на плоскости $\sigma^2-\varepsilon$ для демонстрации деталей, наблюдаемых на графиках последнего рисунка, который показывает не только серию прямых линий, согласующихся с формулой (4.25), но также и переходы второго порядка, имеющиеся при шести из восьми деформаций перехода второго порядка, определяемых по формуле (4.26). Последний переход при $N=0$, показанный как на рис. 4.103, *а*, так и на рис. 4.103, *б*, который, согласно формуле (4.26), должен бы быть при $\varepsilon_N=0{,}577$, произошел при деформации, соответствующей точке предельного напряжения как при сжатии, так и при растяжении, если данные нанесены, согласно обобщению уравнения (4.25), на плоскости в системе осей условное напряжение — условная деформация.

Результаты испытаний, приведенные на рис. 4.98 и 4.102, нанесены как графики зависимости величины $(\sigma/(1-T/T_m))^2$ от $\varepsilon$, так что сравнение наклонов прямых, редуцированных к абсолют-

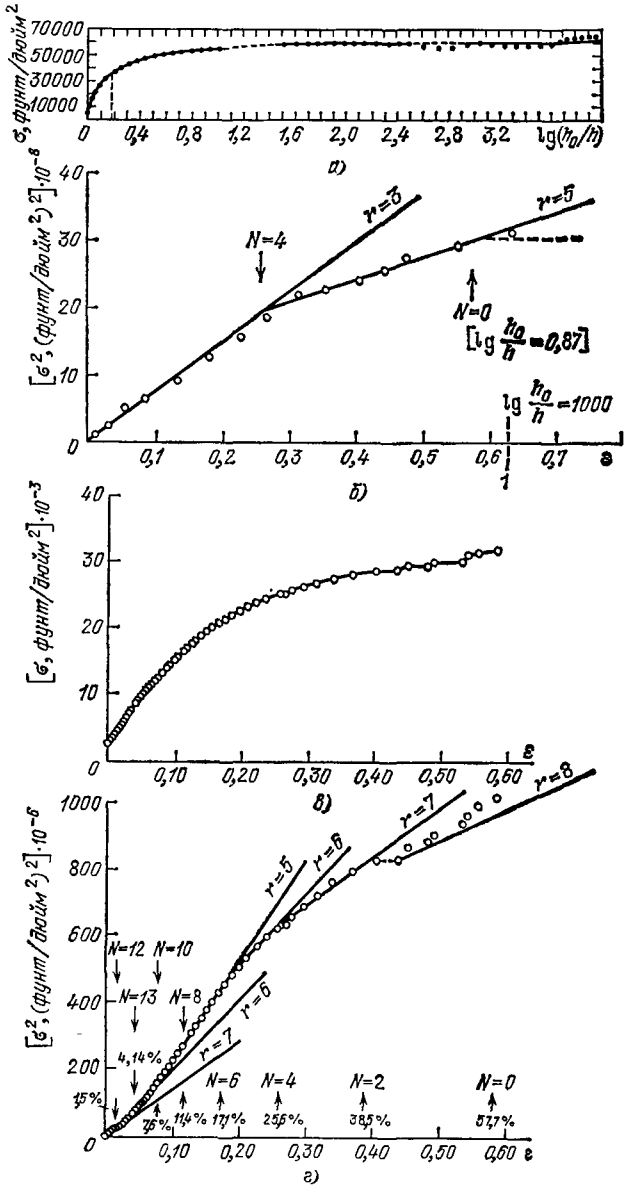



Рис. 4.103. *а*) Опыты Тэйлора и Квинни (1934) на сжатие медных образцов в области большой деформации (см. рис. 4.91). График в осях lg ($h_0/h$), σ (напряжение условное, пересчитанное Беллом с результатов опытов Тэйлора и Квинни, представленных в истинных напряжениях); *б*) График в осях квадрат условного напряжения — условная деформация. Результаты того же опыта, но представленные для сравнения с результатами, полученными по формуле Белла (4.25), соответствующей параболическому закону в осях условных напряжений σ и деформаций ε. Отметим переход второго порядка при $N=4$; *1* — фактический конец опыта. *в*), *г*) Графики $\sigma-\varepsilon$ и $\sigma^2-\varepsilon$, построенные на основе результатов экспериментов Белла по растяжению образцов из отожженной при 1700° F поликристаллической меди высокой чистоты под действием мертвой нагрузки при $T=300$ K, показывающие переходы второго порядка при $N=18$, 13, 6, 4, 2 и разрушение при наиболее высокой найденной экспериментально деформации перехода, соответствующей $N=0$.

ному нулю, могло показать, что для каждого из этих тел, как и для многих других, которые также аналогично рассматривались, функция отклика изменялась линейно с изменением температуры в соответствии с формулой (4.25).

### 4.22. Квазистатические эксперименты с поликристаллическими телами при конечных деформациях: кручение полых труб

По сравнению со многими сотнями опытов с твердыми телами по одноосной деформации, описанными на протяжении последнего столетия, было проведено очень мало опытов при кручении и в особенности при кручении полых труб. Опыты же с трубками из отожженного материала составляют еще меньшую часть от этого числа. Если имеется какая-либо надежда полагать, что пластическая деформация поликристаллов может быть описана в терминах общих свойств материала, то упорядоченность, наблюдаемая в результатах одноосных испытаний таких твердых тел, можно было бы распространить на данные, полученные в опытах на кручение тонкостенных полых трубок. Я впервые обнаружил, что такое распространение результатов, найденных при испытаниях, допустимо (Bell [1968, 1], стр. 181—183), получив благоприятную возможность проверить эксперименты на кручение полностью отожженных трубок, проделанные О. В. Диллоном (Dillon [1963, 1]), который в 1962 г., проводя эти опыты, был сотрудником университета Джона Гопкинса.

Оставляя обсуждение этой корреляции до раздела 4.31, посвященного эффекту Савара — Массона, я начну здесь дальнейший анализ эксперимента Тэйлора и Квинни (Taylor and Quinney [1931, 1]), проведенного 40 лет назад, который был описан в разделе 4.14. Эксперимент, результаты которого показаны на рис. 4.104, состоял в сравнении двух испытаний отожженных медных трубок — одной на одноосное растяжение и другой на чистое кручение. Оба испытания были проведены при монотонно возрастающем напряжении до получения большой деформации. Строя график по данным, полученным при растяжении, на плоскости в осях условное напряжение — логарифмическая («истинная») деформация и сравнивая его с графиком зависимости между номинальным касательным напряжением и деформацией сдвига при кручении, они заключили, как мы видели в разделе 4.14, что не применимы ни гипотеза течения Треска — Геста, ни гипотеза течения Максвелла — Мизеса (см. рис. 4.60). Вновь обнаруживаем в истории эксперимента пример пристрастия к концепции, повлиявшего на представление и интерпретацию экспериментальных результатов. Когда результаты тех же самых двух опытов были пересчитаны для сравнения к условному напряжению и к условной деформации, они не только показали точное соответствие с гипотезой Максвелла — Мизеса, но графики $\sigma^2$—$\varepsilon$ и $S^2$—$s$ обеспе-

чили также точное согласование с наклонами прямых, предсказанными выше на основании формулы (4.25) для опытов на одноосное растяжение и на основании формулы (4.29), приведенной ниже для опыта на кручение с обычным индексом формы $r=4$ для отожженной меди при комнатной температуре.

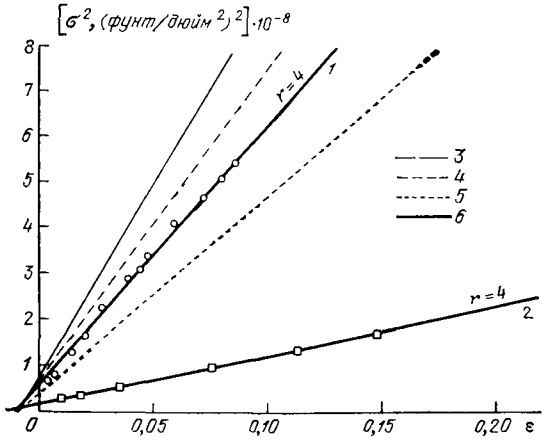



Рис. 4.104. Эксперименты Тэйлора и Квинни (1931), результаты которых представлены на рис. 4.60; эти результаты, пересчитанные Беллом в условные напряжение $\sigma$ и деформацию $\varepsilon$ из истинных, показывают полное их соответствие гипотезе Максвелла — Мизеса; *1* — растяжение, *2* — кручение, *3* — $\overline{m/n}=\sqrt{4}$ (Треска), *4* — $\overline{m/n}=\sqrt{3{,}44}$ (Тэйлор — Бишоп и Хилл), *5* — $\overline{m/n}=\sqrt{2{,}46}$ (Даусон), *6* — $\overline{m/n}=\sqrt{3}$ (Мизес).

Мы видим, что опыт на кручение полой трубки обеспечивает параболическую функцию для касательного напряжения $S$ и сдвиговой деформации $s$, показывая возможность обобщения уравнения (4.25) распространением его на любое напряженное состояние, отвечающее возникновению пластической деформации. Результаты Тэйлора и Квинни, в форме условных напряжения и деформации показанные на рис. 4.104, можно было бы сравнить с авторским представлением результатов этих испытаний, изображенным на рис. 4.60.

Условие Максвелла — Мизеса требует того, чтобы

$$\sigma/S=\sqrt{3}=s/\varepsilon. \tag{4.28}$$

Подставляя $S$ и $s$, найденные из (4.28), в (4.25), получаем следующую формулу:

$$S=\left(\frac{2}{3}\right)^{r/2}\mu(0)\,B_0(\sqrt{3})^{-3/2}(1-T/T_m)(s-s_b)^{1/2},\quad r=1,2,3,4,\ldots, \tag{4.29}$$

из которой была получена информация (сплошная линия) применительно к опытам Тэйлора и Квинни на кручение (рис. 4.104).

Как можно было ожидать, опыты на кручение полых труб показывают переходы второго порядка, обнаруженные и в опытах при одноосной деформации. На рис. 4.105 представлены результаты четырех экспериментов на кручение полых труб, составляющие часть докторской диссертации, посвященной исследованию одновремен-

но происходящих растяжения и кручения, выполненного Рамешом Митталом в 1969 г. (Mittal [1969, 1]; [1971, 1]) [1]). Образцами были полностью отожженные тонкостенные полые трубки с наружным

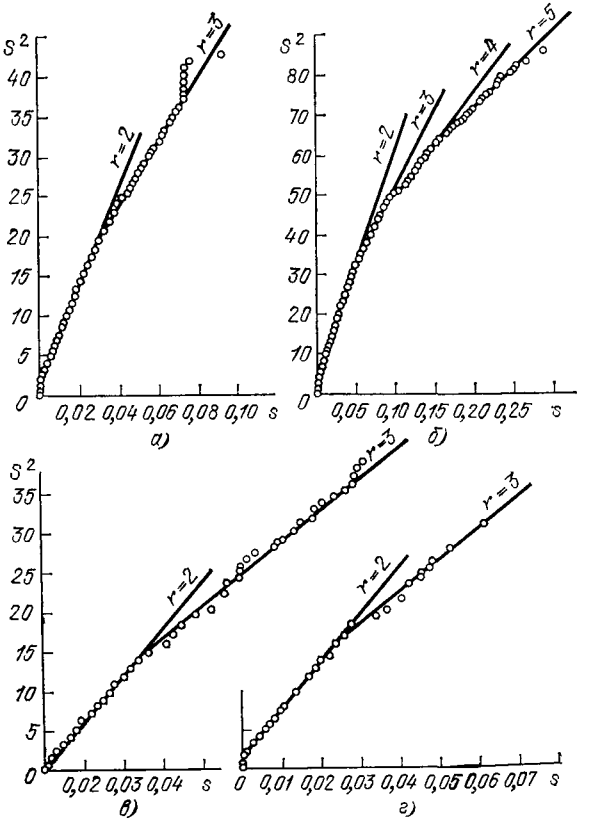



Рис. 4.105. Четыре опыта Миттала (1969) на кручение при нагружении мертвой нагрузкой (кружки) в сравнении с результатами, полученными по формуле (4.29) Белла (сплошные линии). *а*) опыт 1425; *б*) опыт 1402; *в*) опыт 1453; *г*) опыт 1450.

диаметром 0,4395 дюйма и с толщиной стенки 0,0323 дюйма, выполненные из поликристаллического алюминия чистоты 99,16%. Нагрузка прикладывалась так, что обеспечивалась постоянная скорость напряжения.

[1]) В первоначальном расчете образца на кручение, выполненном в этих опытах, не был учтен малый постоянный крутящий момент, возникавший от сил тяжести сосудов, использованных в опыте для создания мертвой нагрузкой постоянной скорости возрастания крутящих моментов путем нагружения этих сосудов стационарной струей воды. Поскольку эти опыты были выполнены в моей лаборатории, я мог пересчитать все результаты этой серии опытов. Эти последние расчеты цитируются здесь и ниже в разделе 4.35 данного исследования. Отмеченное упущение не изменило ни одного из заключений Миттала, нашедших графическое изображение в представленных им данных.

Как можно было видеть из рис. 4.105, эти экспериментальные результаты (кружки) хорошо согласуются на графиках $S^2$—$s$ с наклонными прямыми, предсказанными уравнением (4.29), с переходом второго порядка от одной формы деформации к другой. Этому отожженному алюминию, за исключением немногих случаев, соответствует начальный индекс формы $r=2$. Исходя из (4.25) и (4.28), можно проверить, что деформации перехода при кручении выражаются следующей формулой:

$$s_N = \left(\frac{2}{3}\right)^{N/2}, \tag{4.30}$$

которая приводит к серии из 8 значений деформации $s_N$: 0,026; 0,072; 0,132; 0,198; 0,294; 0,444; 0,667; 1,000.

Миттал усреднил 38 значений деформации перехода, полученных на основе результатов 19 опытов с полыми трубками (как было описано в разделе 4.32) при различных путях нагружения в условиях совместного кручения и растяжения. Эгими усредненными значениями были: $s_N=0{,}025$ из 10 наблюдений, $s_N=0{,}072$ из 16 наблюдений, $s_N=0{,}135$ из 11 наблюдений; также было получено значение $s_N=0{,}198$ из одного наблюдения. Эги значения деформации перехода, очевидно, хорошо согласуются с первыми четырьмя значениями, даваемыми формулой (4.30), а также с условием Максвелла — Мизеса. Соотношение между деформациями перехода при сдвиге поликристалла и при сдвиге монокристалла получает вид

$$s_N = \bar{n}\gamma_N, \qquad \text{где } \bar{n}=1{,}765. \tag{4.31}$$

Дальнейшее обсуждение корреляции отклика монокристаллов и поликристаллов для одноосных опытов и опытов на кручение будет дано в разделе 4.32, где рассматривается соотношение между агрегатом (поликристаллом) и монокристаллом, и в разделе 4.35, где описываются общие определяющие уравнения и эксперименты для более сложных напряженных состояний.

### 4.23. Эксперименты по термопластичности

При любом серьезном изучении пластической деформации необходимо рассматривать термопластические аспекты остаточной деформации, а именно, связанную с ней генерацию тепла [1]. Вопрос

[1]) Несомненно, что первым экспериментом по теплоыделению при конечном деформировании металлов были опыты, произведенные Клодом Луи Бертоле в 1809 г.(Berthollet [1809, 1]).

Бертоле сплющивал металлические образцы в монетном прессе и сразу же после появления деформации бросал их в маленькую ванночку с водой так, чтобы вода едва прикрывала их. С помощью термометра он отмечал повышение температуры после первого, второго и третьего ударов по образцу; полученное повышение температуры в меди уменьшалось от примерно 10 °С после первого удара до менее чем 1 °С после третьего, а для серебра примерно от 4 °С после первого до 1,25 °С после второго.

о том, диссипируется ли в форме тепловой энергии энергия, затраченная на пластическое деформирование или, иными словами, нужно ли ее учитывать, является главным.

В 1925 г. Тэйлор и Фаррен (Taylor and Farren [1925, 2]), провели опыты с поликристаллическими образцами из стали, меди и алюминия и с монокристаллами алюминия на простое растяжение и при этом наблюдали небольшое повышение температуры, сопровождавшее деформирование [1]). Поскольку опыты должны были проводиться в короткий промежуток времени, достаточный, чтобы тепловая диссипация не проявилась, было построено для опытов специальное записывающее устройство. Первоисточник, к которому я отсылаю читателя, содержит подробности относительно изобретенного устройства и его калибровки.

Эти замечательные опыты, проведенные в 1925 г., обнаружили тот факт, что когда энергия [2]), вычисленная по измеренному повышению температуры, сравнивалась с энергией деформации, полученной по квазистатической кривой напряжение — деформация, оставалось расхождение порядка 10%, т. е. 90% затраченной энергии появилось в виде измеренной тепловой. Отношения измеренных значений температуры $T_1$ к их значениям $T_2$, вычисленным по на-

---

Бертоле проводил эти опыты со своими двумя друзьями Пикте и Био. Он пришел к заключению, что тепло, появившееся при деформировании, каким-то образом связано с изменением размеров, поскольку вновь появлявшаяся деформация убывала с каждым ударом. Он сделал особый упор на меры предосторожности, которые им нужно было предпринять, чтобы обеспечить одинаковую начальную температуру пресса и образца.

[1]) Если исключить грубые опыты Треска, проводившиеся в 1874 г. (см. Tresca [1878, 1]), а также раздел 4.4 настоящего труда), потребовалось 95 лет, прежде чем талантливо поставленные опыты Вебера (Weber [1830, 1]), с которых и начинается изучение термоупругости, были в такой же изящной манере распространены и на термопластическую конечную деформацию, что свидетельствует о непредвиденном заранее развитии идей. Во вступлении к своей работе Тэйлор и Фаррен в 1925 г. могли сказать:

«Любопытно, что, по-видимому, было очень мало опытов такого рода. Единственная ссылка, которую мы смогли обнаружить, имеется в статье д-ра Розенхайна «Металлы» в физическом словаре, где он цитирует некоторые ранее не опубликованные наблюдения д-ра Синната.

Согласно этим наблюдениям только одна десятая затраченной работы переходит в тепло, остальные 90% предположительно идут на изменение фазы материала. Результат, если он верный, представляет огромный интерес, но пока что подробности наблюдений не были опубликованы. Д-р Розенхайн сообщил нам, что он проводит дальнейшие опыты на эту тему» (Taylor and Farren [1925, 2], стр. 85).

Результат Тэйлора и Фаррена, показывающий, что 90 или более процентов энергии превращается в тепло, прямо противоположен сомнительным результатам д-ра Синната и говорит не только об экспериментальных трудностях, но также и об осторожности, которую должен проявить теоретик, устанавливая контакт с Матерью-Природой. Тэйлор и Фаррен не знали, что Треска, невзирая на грубость эксперимента, был в 70-е гг. XIX века первым, обнаружившим тот факт, что для поликристаллической меди свыше 90% энергии пластического деформирования переходит в тепло.

[2]) Поскольку опыты были квазистатическими, на потерю тепла вносились малые поправки.

блюдаемой работе растяжения, показали, что эти отношения не зависят существенно от уровня деформации. Средние значения этих отношений для трех стальных образцов были: 0,865; 0,865 и 0,865; для образцов из меди: 0,92; 0,905 и 0,905; для алюминия: 0,93; 0,92 и 0,935. Для двух монокристаллов алюминия отношения были 0,95 и 0,945. В монокристаллах значение отношения также не зависело от деформации. Наблюдались следующие максимальные значения деформации $\varepsilon$: 0,131; 0,1183 и 0,1622 у стали; 0,1745; 0,1990 и 0,2020 у меди; 0,2306; 0,2195 и 0,2188 у алюминия и 0,5272; 0,5572 у монокристаллов алюминия [1]).

В 1934 г. Тэйлор и Квинни (Taylor and Quinney [1934, 2]) провели опыты по кручению и сжатию для определения теплового поведения с помощью как термопар, так и калориметров. По измерениям при помощи обоих приборов они получили сравнимые результаты. Деформированные образцы быстро снимались с закручивающего устройства и бросались в калориметр. Для отожженной чистой меди и мягкой стали порядок значений скрытой теплоты был одинаковым, но вместо того, чтобы оставаться постоянным по значению в процессе деформирования, скрытая теплота претерпевала процентное уменьшение при весьма больших деформациях. Сравнивая результаты измерений по калориметру для чистой меди с максимальным напряжением, достигавшимся при $\lg(h_0/h)=1{,}45$ по данным опыта, представленным на рис. 4.91, они показали, что работа по холодной обработке, необходимая для насыщения меди скрытой энергией при комнатной температуре, была примерно такой же, как и та, которая необходима для того, чтобы повысить прочность металла до ее максимального значения.

В 1962 г. Оскар Диллон (Dillon [1962, 2]) дал описание первой серии экспериментов, распространивших исследования 30-х гг. за пределы одного лишь вида нагружения. В повторявшихся опытах на кручение поликристаллов из полностью отожженного алюминия коммерческой чистоты он изучал различные углы закручивания и длины образцов. Это позволило Диллону с уверенностью заявить в 1962 г., что «за исключением работы Тэйлора нет, по-видимому, экспериментальных данных по эффекту взаимодействия в реальных материалах» (там же, стр. 3100). Взаимодействие, о котором говорилось, было взаимодействием между температурным полем и полем компонентов девиатора деформации при деформировании материала в области за пределом упругости [2]). Первые экспери-

---

[1]) Такие эксперименты находятся в интересном контрасте с соображениями относительно термического аспекта остаточных деформаций, которые последовали за работами Треска в XIX веке или с в равной мере туманными замечаниями на эту тему Кориолиса после того, как он провел опыты по сжатию свинца в 30-х гг. XIX века.

[2]) В 1942 г. Дарт, Энтони и Гас (Dart, Anthony and Guth [1942, 1]), а в 1943 г. Джеймс и Гас (James and Guth [1943, 1]) провели ряд экспериментов, дававших обратное соотношение между удлинением и температурой в натуральной и син-

менты Диллона касались главным образом стержней из твердых деформируемых материалов. В стержнях, о которых он писал в статье, проявлялись основные черты термопластического поведения. Наблюдения за ними дали основание утверждать о переходе тепла в более холодную центральную упругую часть. В этом он убедился, сравнивая эти результаты с предыдущими по тонкостенным трубкам.

В том же 1962 г. увидела свет работа Диллона (Dillon [1962, 1]), которую можно считать наиболее результативной до сегодняшнего дня по экспериментам в этой области. Он использовал трубки из поликристаллического алюминия низкой чистоты, отжигавшиеся в течение двух часов при 1100° по Фаренгейту с последующим охлаждением в печи [1]). Деформация определялась по формуле $\varepsilon = \varphi a/L$, где $\varphi$ — угол закручивания, $a$ — средний радиус, $L$ — длина трубки. В этих экспериментах «$a$» было равно 0,218 дюйма, а толщина стенки 0,064 дюйма. Наблюдая отсутствие ползучести в образцах из материала, в котором отжиг «стер» предшествовавшую механическую историю (если она имелась), за исключением той деформации ползучести, которая возникала в образцах, ранее работавших в исследуемой области напряжений, Диллон заметил, что при напряжениях ниже 4500 фунт/дюйм$^2$ (3,17 кгс/мм$^2$) ползучесть прекращалась в течение нескольких минут.

Два опыта на кручение образцов из ранее не использовавшегося отожженного материала, кривые напряжение — деформация для которых содержали (рис. 4.10б) ступеньки Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье), продемонстрировали воспроизводимость начального состояния. Диллон показал, что при деформациях, превышающих 0,0025, соотношение между крутильными касательными напряжениями $\tau$ и крутильными деформациями сдвига $\varepsilon$ имели вид $\tau = \beta\varepsilon^{1/2}$, где значение $\beta = 2{,}96 \cdot 10^4$ фунт/дюйм$^2$ (21 кгс/мм$^2$) может быть поставлено в соответствие с имевшими место в экспериментах Тэйлора и Фаррена (1925) с монокристаллами и в динамических экспериментах Белла (1961) [2]). Особенно большое значение имело то, что после нескольких циклов Диллон получил новую вос-

---

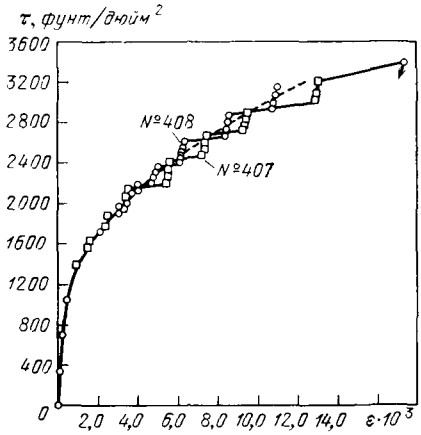
тетической резине; часть экспериментов в сущности повторяла эксперименты Джоуля 1859 г. (Joule [1859, 1]), изучавшего открытие Джона Гафа в 1802 г. (Gough [1805, 1]), но в некоторых других их опытах деформации были значительно большими, и ввиду новизны этих опытов они представляли большой интерес. Однако интерес к этим экспериментам в 40-е гг. не в том, что деформация имела природу девиатора.

[1]) Он заявил, что выбрал этот твердый материал и предварительную термическую обработку его для того, чтобы данные можно было связать с изучениями Белла пластических динамических волн. Диллон заключал: «Как было показано ниже, этот подход оказался плодотворным».

[2]) Dillon [1962, 1], стр. 238. Коэффициент $2{,}96 \cdot 10^4$ фунт/дюйм$^2$ параболы Диллона находится в исключительно хорошем соответствии с тем, который был предложен мной в то время и равнялся $2{,}93 \cdot 10^4$ фунт/дюйм$^2$ при кручении алюминия низкой чистоты. В терминах индексов формы это соответствует $r = 1$ (см. раздел 4.22, формулу (4.29)).

производимую кривую напряжение — деформация, на которой была видна краткосрочная ползучесть (рис. 4.107).

На рис. 4.107 показано сравнение квазистатических кривых $\tau$—$\varepsilon$ после динамических колебаний с амплитудами $\varepsilon_{дин}=0{,}0025$



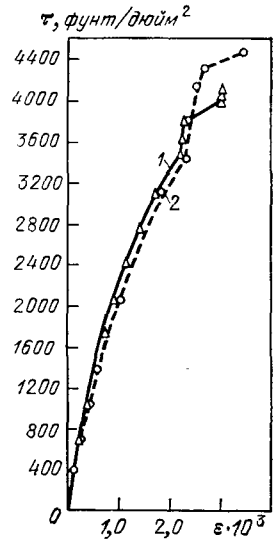




Рис. 4.106. Опыты Диллона (1962) по кручению стержня из отожженного алюминия 1100. По оси абсцисс отложен сдвиг $\varepsilon\cdot10^3$, по оси ординат — напряжение $\tau$ в фунт/дюйм².

Рис. 4.107. Опыты Диллона (1962). Результаты статических испытаний образцов на кручение по установленню связи между напряжениями и деформациями после вибрации с указанием амплитуд сдвиговых деформаций, демонстрирующие достижимую воспроизводимость. По оси абсцисс отложен сдвиг $\varepsilon\cdot10^3$, а по оси ординат — касательное напряжение $\tau$ в фунт/дюйм²; *1* — после колебаний с амплитудой $\varepsilon_{дин}=0{,}0025$; *2* — то же, $\varepsilon_{дин}=0{,}0060$.

и $\varepsilon_{дин}=0{,}0060$. Сравнение квазистатического и динамического циклических нагружений по углу наклона касательной к кривой в начальной точке и углу наклона касательной к кривой разгрузки проводилось путем использования уравнения $\tau=\mu\varepsilon$, где $\mu$ — модуль упругости при сдвиге, равный $3\cdot10^6$ фунт/дюйм² (2110 кгс/мм²) [1]).

Испытательная машина и испытываемые образцы Диллона представлены на рис. 4.108. Концы образцов были завернуты неплотно

[1]) Отчасти, это уменьшение модуля, вызванное остаточными деформациями, согласуется с мультимодульностью, описанной в гл. III, раздел 3.44 (см. выше). Устойчивое значение начального модуля сдвига для алюминия $\mu=2690$ кгс/мм²; т. е. я обнаружил, что для изотропных твердых тел квантуемое значение модуля упругости при сдвиге было при $s=11$, $p=0$. После появления остаточных деформаций измеренное Диллоном значение 2110 кгс/мм² может рассматриваться как новое значение модуля упругости при сдвиге в условиях кручения, возникшее при переходе от $s=11$ к $s=12$. Предсказанный модуль упругости при сдвиге при $s=12$, $p=0$ равен 2190 кгс/мм² (Bell [1968,1], см. выше раздел 3.43, уравнение (3.27) и раздел 3.44, уравнение (3.28)).

изолятором из стекловолокна. Переменная скорость мотора позволяла варьировать частотами от 400 до 2200 об/мин, при этом амплитуды поворота менялись от 5,5° до 30°.

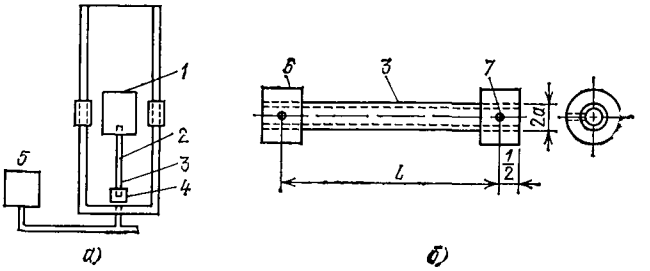



Рис. 4.108. Опыты Диллона (1962). *а*) Схема машины для испытаний на кручение; *б*) конструкция термически испытываемого образца; *1* — подвижный траверс; *2* — термопара, *3* — образец, *4* — крутящий конец, *5* — мотор, *6* — концевая муфта, *7* — крепежный винт.

На рис. 4.109 показан закон изменения приращений температуры во времени, обнаруженный Диллоном при угловой скорости $\omega=1080$ об/мин и амплитуде деформации 0,0043; температура $\theta$ дана в градусах шкалы Фаренгейта. По результатам таких опытов он нашел приращение температуры $\Delta\theta$ за четверть цикла, которое

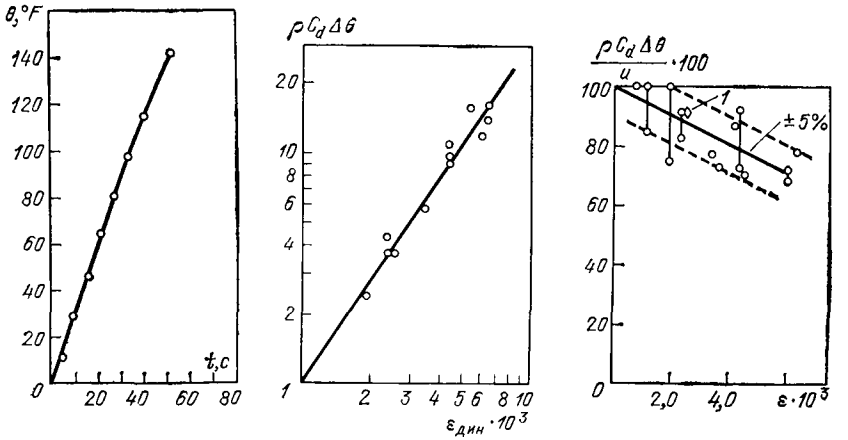



Рис. 4.109. Опыты Диллона (1962). Типичная экспериментальная зависимость приращений температуры от времени ($\omega=1080$ об/мин, $\varphi a/L=4{,}3\cdot10^{-3}$). По оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат — температура в °F.

Рис. 4.110. Опыты Диллона (1962). Теплота, генерируемая в алюминии за четверть цикла.

Рис. 4.111. Опыты Диллона (1962). Зависимость отношения удельной теплоты, генерируемой за четверть цикла, к механической энергии от деформации сдвига $\varepsilon$; *1* — три опыта.

после умножения на плотность $\rho$ и на удельную теплоемкость при постоянной деформации $C_d$, он представил как функцию от амплитуды динамической деформации сдвига $\varepsilon_{\text{дин}}$; график этой функции, т. е. генерируемого тепла, показан на рис. 4.110.

По логарифмической кривой, приняв $\rho C_d = 205 \frac{\text{дюйм} \cdot \text{фунт}}{\text{дюйм}^3}$ на 1° F, Диллон получил эмпирическое соотношение

$$\rho C_d \Delta\theta = 34\,000\ \varepsilon_{\text{дин}}^{3/2}. \tag{4.32}$$

Вычислив механическую энергию на единицу объема $U$, Диллон получил удельную энергию как функцию деформации сдвига $\varepsilon$, график которой изображен на рис. 4.111. Результаты показывают, что даже при большом числе циклов нагружения при воздействии однопараметрической нагрузки вывод Тэйлора и Фаррена (Taylor and Farren [1925, 2]), полученный в 1925 г., справедлив. Большая часть необратимой энергии превращалась в тепло.

В 1966 г. Диллон (Dillon [1966, 2]) распространил свои исследования на отожженную поликристаллическую медь, а в 1967 г. (Dillon [1967, 2]) провел подробный анализ повышения температуры при весьма медленных циклах закручивания, в которой описал охлаждение, обнаруживаемое в процессе разгрузки. Он обнаружил, что после первых двух медленных циклов деформирования повышение температуры было связано скорее всего с последним значением амплитуды, а не с предыдущим.

«За исключением первых двух циклов, которым был подвергнут образец, изготовленный из полностью отожженного материала, мы не смогли обнаружить значительных изменений в проценте механической работы, перешедшей в тепло. Он всегда находится между 95 и 100%. Величина экспериментальной ошибки оценивается в 5%» (там же, стр. 56).

### 4.24. Вязкопластичность в металлах: эксперименты, проводившиеся до 1940 г.

В 70-е гг. XIX века Тарстон (Thurston [1874, 1]) при изучении больших деформаций металлов заметил, что если скорость квазистатического испытания изменить переходом от сравнительно небольшой скорости нагружения к другой большей, то результатом этого в общем случае будет более высокая кривая напряжение — деформация. До экспериментов Людвика 1909 г. (Ludwik [1909, 1]) не было попыток серьезного экспериментального изучения этого явления. Сейчас работа Людвика, если и читается редко, то цитируется чаще всех работ по экспериментальной механике твердого тела начала XX века.

Людвик интересовался связью между скоростью деформаций, остаточной деформацией и последействием. Людвик обнаружил, что для большинства металлов вязкие эффекты оказались пренебрежимо малыми, и, обращаясь к предыдущим исследованиям в попытке найти подходящий материал для изучения такого поведения, он в конце концов выбрал олово. Он провел два типа опытов. В первом оловянные проволоки 3 мм в диаметре и 3 м длиной растягивались грузами весом от 2 до 15 кгс так, что он мог наблюдать скорости удлинения образцов.

Во второй серии опытов (см. там же) Людвик с помощью д-ра Альфонса Леона растягивал до разрыва с различной скоростью удлинения на испытательной машине Амстер — Лаффона в механико-технической лаборатории императорского Технического университета в Вене оловянные проволоки 6 мм в диаметре и 20 см длиной. В этих опытах он менял скорость подвижного зажима, изменяя передаточное число и скорость передачи. Он пытался обеспечить постоянную скорость в опытах с помощью метронома и тормоза. Он увеличивал скорость подвижного зажима семью ступенями от 0,00875 до 9,7 мм/с, соответствовавшими скоростям деформации образцов 200 мм длиной от $4{,}375 \cdot 10^{-5}$ до $4{,}85 \cdot 10^{-2}$, т. е. с отношением порядка 1000. К отношению скоростей деформации в десять миллионов Людвик пришел, сравнивая крайние случаи двух типов опытов. Скорости деформации, которые, конечно, не были постоянными при постоянной нагрузке, были зафиксированы от значения $\dot{\varepsilon}=5 \cdot 10^{-9}$ 1/с до значения $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ 1/с, когда деформация ползучести под действием каждого из шести грузов достигала значения 0,15. В каждой ситуации рассматривались четыре образца, что дало в общей сложности в этой серии 52 опыта. Пример эксперимента Людвика, в котором скорость удлинения была постоянной, показан на рис. 4.112.

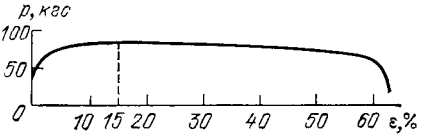



Рис. 4.112. Опыт Людвика (1909). График функции напряжение — деформация при квазистатическом растяжении оловянной проволоки в условиях постоянной скорости деформации, показывающий, что максимальное напряжение достигается при удлинении 15%.

Людвик заметил, что для олова при всех шести скоростях нагружения на длинном участке диаграммы $p$ — $\varepsilon$ почти постоянного напряжения наибольшее значение достигалось при деформации, равной 0,15. Он решил сравнить скорость деформации с напряжением при деформации 0,15 в опытах на ползучесть при постоянной нагрузке, т. е. в опытах первого типа, в которых скорости деформации были переменными, и в опытах второго типа при постоянной скорости деформации, при которой напряжение было наибольшим, если сама деформация равнялась 0,15. В опытах второго типа скорость нагружения была переменной. Эти результаты, включая разброс по всем четырем повторениям каждого типа измерений, даны в табл. 132 для опытов с постоянной нагрузкой и в табл. 133 для опытов с постоянной скоростью деформации (Ludwik [1909, 1]). Непосредственно на основе результатов своих наблюдений над оловом Людвик предложил для этого твердого тела при одноосном нагружении функцию отклика, отражающую вязкопластические свойства.

Поскольку предельная прочность для каждой скорости относилась к одному и тому же частному значению конечной деформации, равному 0,15, Людвик назвал ее сопротивлением при специфической деформации или внутренним трением, которое он обозначил

Таблица 132

**Результаты опытов Людвика (1909) по растяжению при постоянном напряжении**

| Условное напряжение (кгс/см²) | Удлинение за 1 с при деформации 0,15, отнесенное к первоначально измеренной длине, умноженное на $10^9$ | | |
|---|---|---|---|
| | наблюденное в опыте | по уравнению (4.33) | по уравнению (4.34) |
| 28,3 | 5—8 | 0,0000000002 | 5,7 |
| 42,5 | 13—19 | 0,00000098 | 16 |
| 56,5 | 25—35 | 0,00012 | 33 |
| 70,75 | 60—75 | 0,0037 | 63 |
| 141,5 | 1 000—1 200 | 53,1 | 1 030 |
| 212,0 | 14 000—16 000 | 9332,6 | 15 060 |

символом $R$. Он получил два эмпирических соотношения «после нескольких неудачных попыток с другими кривыми» (Ludwik [1909, 1]), которые одинаково хорошо согласуются с данными опытов при постоянной скорости: параболическую кривую, уравнение (4.33), и логарифмическую кривую, уравнение (4.34). Однако только одну из них можно было распространить на гораздо более низкие скорости деформации в опытах на ползучесть при постоянной нагрузке. Эти эмпирические соотношения таковы:

$$R = R_0 + k \sqrt[n]{\dot{\varepsilon}}, \tag{4.33}$$

$$\varepsilon = k\,(a^{R-R_0} - 1), \tag{4.34}$$

где $R_0$ — не поддающееся измерению предельное растягивающее напряжение в опыте с $\dot{\varepsilon}=0$; $k$, $a$ и $n$ — константы материала. В табл. 132 и 133 дано также сравнение результатов вычислений, выполненное Людвиком, основанных на каждом из этих эмпирических соотношений.

Логарифмическая функция Людвика не была той функцией, которая могла описать зависимость между напряжением и деформацией (в условиях вязкости) в общем случае поведения твердых тел, как это часто утверждается; скорее всего она позволяла сравнивать, и то для одного лишь твердого тела — олова, — скорости ползучести при постоянном напряжении, соответствующем специфической деформации, со скоростью деформации при измеренном предельном напряжении, соответствующем той же специфической деформации в опыте с постоянной скоростью деформации. То, что значение предельного напряжения в олове изменяется со скоростью деформирования, не дает, к сожалению, информации о динамической функции отклика для промежуточной II стадии деформирования — зоны Треска, предшествующей III стадии с постоянным

Таблица 133

**Результаты опытов Людвика (1909) по растяженню при постоянной скорости удлинения**

| Удлинение за 1 с, отнесенное к первоначально измеренной длине и умноженное на $10^6$ | Растягивающие напряжения в кгс/см² при деформации 0.15 (условные) | | |
|---|---|---|---|
| | наблюденное в опыте | по уравнению (4.33) | по уравнению (4.34) |
| 43 750 | 238—242 | 240 | 240 |
| 175 000 | 269—276 | 268 | 277 |
| 700 000 | 304—315 | 299,5 | 313 |
| 2 100 000 | 336—346 | 327,5 | 342 |
| 6 060 000 | 360—371 | 358 | 370 |
| 24 250 000 | 396—410 | 400,5 | 407 |
| 48 500 000 | 422—428 | 425 | 425 |

предельным напряжением, для которой и были выполнены опыты Людвика. Людвик выбрал специфическое значение деформации, равное 0,15, так как именно при нем в условиях любой скорости деформации достигается предельное значение напряжения. Он отмечал отсутствие шейки во всех образцах при этой деформации. В действительности Людвик отметил то, что однородная деформация в образце имеет место в области значений деформаций, в которой на кривой напряжение — деформация имеется пологий участок с почти постоянным напряжением, начиная от деформации, имеющей меньшее значение, чем отвечающая предельному напряжению, и кончая гораздо большими деформациями, чем отмеченная, пока не появляется локализованная деформация. Он утверждал во вступлении, что поскольку он был убежден, что не существует четкой границы между жидкими и твердыми телами, не должно быть фундаментальной разницы в соотношении между внутренним трением и скоростью в двух группах материалов. Он считал, что, по-видимому, линейная вязкость жидкости, выражаемая соотношением $R=kv$, в действительности может описываться с большей справедливостью зависимостью, которой отвечает очень пологая логарифмическая кривая с $a\sim 1$ в определенных пределах значения скорости. Он предложил считать это временно не установленным фактом.

Людвик признавался в неспособности получить измеренное значение для $R_0$ в пренебрежении влиянием удельного веса проволоки, в невозможности избавиться от флуктуации температуры, учитывая большую продолжительность (месяц) эксперимента, в неизбежности вибрации и т. д. и, особенно, — в невозможности избавиться от неоднородности материала, считая все отмеченное источниками серьезных ошибок при малых скоростях деформации в эксперименте с

постоянной нагрузкой. Эти ошибки затруднили сравнение результатов по двум типам экспериментов.

Людвик не строил кривые напряжение — деформация при растяжении при различных постоянных скоростях деформации; вместо этого он находил зависимость изменения предельного напряжения от скорости деформации. Он построил диаграмму (рис. 4.113), основанную на измерениях предельного напряжения, которую стал анализировать с точки зрения повышения предела упругости. В этом же смысле он рассматривал эффект Тарстона (Thurston [1873, 1]), который ошибочно приписал Баушингеру (Bauschinger [1881, 1], см. выше раздел 4.5), т. е. повышение верхней границы упругой деформации после паузы в пластическом деформировании. Как примеры материалов, которые, по его мнению, могут проявить вязкое поведение, он указал: жидкости, многие смолы, свинец, олово и цинк; он отмечал, что такое поведение можно не учитывать в меди, бронзе, латуни, томпаке (сплав не больше 10% цинка и меди), железе и стали. По всей видимости, основа этих суждений была заложена в его предварительном исследовании.

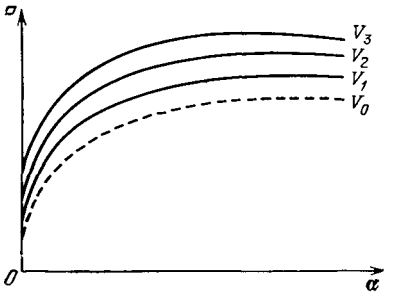



Рис. 4.113. Опыты Людвика (1909). Диаграммы нагрузка — удлинение при растяжении оловянной проволоки, соответствующие деформации 15% и различным скоростям нагружения.

Людвик отметил, что даже в олове вязким поведением можно пренебречь при более высоких скоростях деформации удара (т. е. в области динамической пластичности), и ссылался на эксперименты Кика (Kick [1875, 1]), который в конце XIX века был главным защитником той точки зрения, что энергию удара можно вычислить по квазистатической кривой напряжение — деформация. Людвик ссылался также на эксперимент с оловом при высокой скорости. При доведении длины образца до 10 см и увеличении силы удара машины возрастание скорости деформации приводило к менее чем пятипроцентному возрастанию напряжений — свойство, которое и по остальным его данным также привело к заключению, что вязкость не играет большой роли при высоких скоростях деформации.

Хотя влияние Людвика было значительным в установлении мнений, потребовалось почти два десятилетия, пока не взялись изучать серьезно пластическую деформацию как функцию скорости деформации. Это сделали Зибель и Помп в 1927 г. (Siebel and Pomp [1928, 1]). В промежутке, однако, проявлялся большой интерес к повышению предела упругости со скоростью деформации, наблюдавшемуся в некоторых металлах. Конечно, это был скорее феномен, связанный со скоростью инфинитезимальной упругой деформации, а не с вязкопластичностью конечных деформаций. Множество дис-

куссий и некоторое количество экспериментов были посвящены двойной текучести в железе и стали как функции скорости нагружения. К этому частному вопросу Элам (Elam [1935, 1]) обращалась почти двадцать раз в течение десятилетия до 1937 г. Изучение показало, что упругость испытательных машин была по крайней мере столь же важна в создании «двойной текучести», как и изменение любого параметра материала испытываемого твердого тела.

Зибель и Помп пересмотрели проблему Людвика. Исследования Людвика (Ludwik [1909, 1]) из-за низкой температуры плавления олова предназначались для твердых тел со сходственной температурой $T/T_m=0{,}59$ при $T$, равном комнатной температуре. Для свинца и цинка, которые он полагал также вязкопластическими, значения сходственной температуры при том же условии были $T/T_m=0{,}50$ и $T/T_m=0{,}43$ соответственно. С другой стороны, для стали, меди и латуни, для которых по его утверждению вязкими эффектами можно было пренебречь, $T/T_m=0{,}17$; 0,22 и 0,25 соответственно. Таким образом, на выводы Людвика повлияло то, что он выбрал частное значение $T$, т. е. комнатную температуру, для всех своих сравнений.

Зибель и Помп, проводившие эксперименты только при комнатной температуре, испытывали мягкую сталь, медь и свинец. Их эксперименты по растяжению и сжатию при различных скоростях деформации выявили, что не только свинец, но и мягкая сталь, и медь проявили поддающееся измерению увеличение напряжений со скоростью. Они предложили, учитывая свои данные, считать параметр $k$ в уравнении (4.34) также зависящим от скорости, причем $k_{\mathrm{dyn}}=k_{\mathrm{st}}+c(v^*)^n$, где $v^*$ соответствовала скорости часто прерывавшегося опыта, равной $v^*\cong 2{,}5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{c}^{-1}$. Это было началом (Siebel and Pomp,[1] [1928, 1]) ряда описаний вязкопластического поведения материалов, которые стали часто появляться с тех пор.

В 1932 г. Дойтлер (Deutler [1932, 1]), будучи докторантом Людвига Прандтля, по предложению последнего предпринял исследование идеи Людвика о том, что при скоростях деформации, больших чем $10^{-2}\ \mathrm{c}^{-1}$ роль вязкости невелика. На испытательной машине того же типа, что и у Людвика, в Институте прикладной механики Геттингенского университета он получил скорости деформации от $10^{-5}$ до $5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{c}^{-1}$. Приняв квазистатическую гипотезу об однородности напряжений и деформации во время удара, Дойтлер определил для скоростей деформации выше этого интервала усредненные значения скорости деформации по обычной схеме опыта с маятниковым ударом, основанного на поглощенной образцом энергии. Машина представляла собой модифицированную ударную машину Шарпи для испытания образцов с надрезанным образцом. Так Дойтлер оценил скорость деформации до $10\ \mathrm{c}^{-1}$, что позволило получить равное миллиону отношение скоростей $10^{-5}$ и $10\ \mathrm{c}^{-1}$, ограничивающих используемую им область значений.

Дойтлера огорчал широкий разброс данных по ударным испытаниям, что он частично приписывал трудностям совмещения нулевой линии записывающего устройства. Изобразив графики зависимости разности предельных напряжений в процентах (по отношению к предельному напряжению при самой низкой из рассмотренных в опыте скорости деформации) от $\lg(v/v_1)$, где $v_1$ — скорость удлинения в наиболее медленных опытах, выполненных при $\dot{\varepsilon}=1\cdot10^{-5}\,c^{-1}$, Дойтлер заключил, что формула Прандтля (Prandtl [1928, 1])

$$\sigma-\sigma_1=\text{const}\cdot\lg(v/v_1)$$

справедлива и в области более высоких скоростей деформаций. На рис. 4.114 даны графики в полулогарифмической системе осей по результатам опытов с железом и медью.

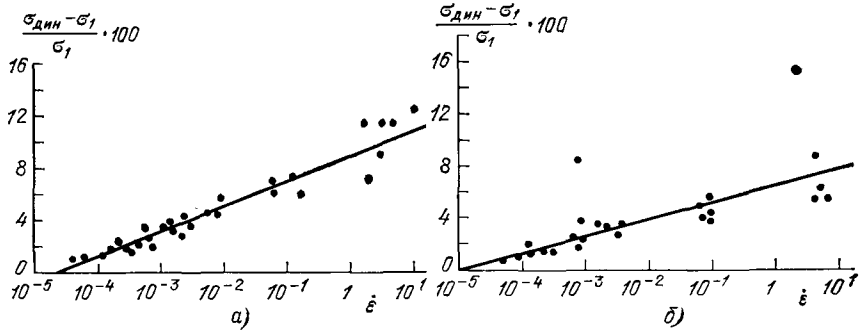



Рис. 4.114. Опыты Дойтлера (1932). Процентное увеличение максимального напряжения (согласно квазистатической кривой) относительно полученного при $\dot{\varepsilon}=10^{-5}c^{-1}$ в зависимости от скорости деформации: *а*) в испытаниях железа; *б*) в испытаниях меди.

Заметим, что абсцисса задана в виде выражения, также зависящего от отношения $v/v_1$, где $v_1=1\cdot10^{-5}\,c^{-5}$; таким образом, машина Амслера была в состоянии показать данные в диапазоне значений, заканчивающихся сразу после $\lg(v/v_1)=2$. Вначале Дойтлер пытался использовать в качестве $v_1$ величину $1\cdot10^{-4}\,c^{-1}$, но позднее счел диапазон результатов при этом значении наинизшей скорости недостаточным, чтобы сделать какие-нибудь выводы.

Дойтлер был весьма озабочен неточностями, наблюдаемыми в результатах по ударным опытам, которые он, наряду с неспособностью точно установить нулевую линию, приписывал временным эффектам и влиянию других факторов на ударные опыты. Общая тенденция увеличения предельного напряжения со скоростью деформации была очевидна, хотя он не был уверен в постоянстве скорости деформации, так как она зависела полностью от передачи мотора испытательной машины. В работе (Deutler [1932, 1]) содержится подробное обсуждение деталей эксперимента по любому аспекту проблемы, за исключением концептуальной ограниченности маятниковых удар-

ных опытов. На рис. 4.115 показаны результаты опытов Дойтлера — скорости удлинения, $v=f_2(\varepsilon_0)$, позволившие получить приведенную там же кривую $\sigma=f_1(\varepsilon_0)$ напряжение — деформация. Его заботило то, что простое допущение о постоянстве скорости деформации в таких опытах было недостаточным.

В итоге опыты Дойтлера оказались неадекватными явлению, чтобы на их основе можно было дать надежное сравнение функций отклика при квазистатическом нагружении и при высоких скоростях деформации. Однако они оказались достаточными, чтобы вызвать сомнение в концепции Людвика о том, что динамическая пластичность невязкая для большинства металлов.

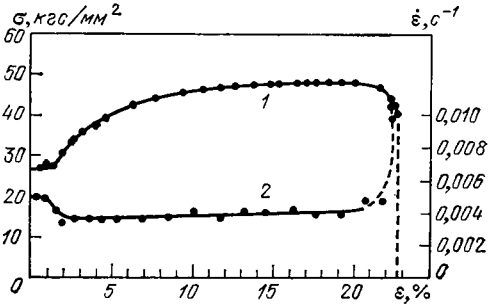



Рис. 4.115. Опыты Дойтлера (1932). Измеренная скорость деформации как функция деформации в опыте с растяжением железа; *1* — зависимость $\sigma=f_1(\varepsilon)$, *2* — зависимость $\dot{\varepsilon}=f_2(\varepsilon)$.

В работе 1938 г., главной целью которой была повторная проверка влияния скорости деформации на предел текучести железа и стали, Элам (Elam [1938, 1]) представила то, что является в определенной мере продолжением опытов Людвика (Ludwik [1909, 1]) и Дойтлера (Deutler [1932, 1]). После обсуждения проблем, связанных с использованием 50-тонной машины Бухтона и двух испытательных машин Инженерной лаборатории Кембриджского университета с самопишущими приборами, Элам пришла к заключению, что хотя ошибки не позволяют сравнивать абсолютные значения, сравнение относительных величин может оказаться справедливым, так как все измерения проводились одинаково.

Отказавшись от образцов «струйной» формы, Элам использовала цилиндрические образцы диаметром от 0,30 до 0,40 дюйма и длиной в 6 дюймов, закладные головки (концы) которых были 0,75 дюйма в диаметре и 0,5 дюйма длиной. В добавок к этому она провела на 50-тонной машине несколько экспериментов со стержнями длиной 18 дюймов и диаметром в 0,75 дюйма. Во всех опытах она использовала сферические крепления, чтобы обеспечить осевое нагружение. Во всех случаях для армко-железа и стали предел упругости и начальный участок конечной деформации возрастали, как видно из рассмотрения рис. 4.116. Для армко-железа за пределами начального участка кривая напряжение — деформация при более высоких скоростях деформации располагается ниже кривой, соответствующей более низким скоростям.

Для стали кривая напряжение — деформация при более высоких скоростях деформации располагается выше кривой напряжение — деформация, полученной при очень низкой скорости дефор-

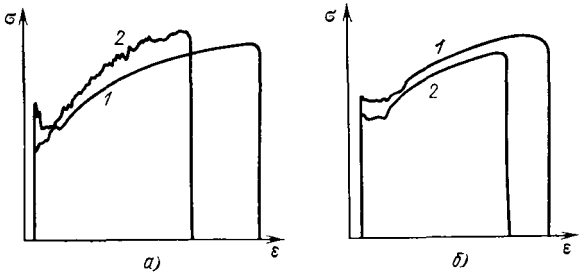



Рис. 4.116. Опыты Элам (1938). Результаты квазистатического растяжения: *а*) армко-железа, *б*) стали при различных скоростях деформации (видно, что при больших пластических деформациях армко-железа более высокая кривая соответствует меньшей скорости деформации); *1* — быстрое деформирование, *2* — очень медленное деформирование.

мации, как это представлено на рис. 4.116. Однако при рассмотрении низких и очень низких скоростей у стали наблюдается обратная картина, как показано на рис. 4.117.

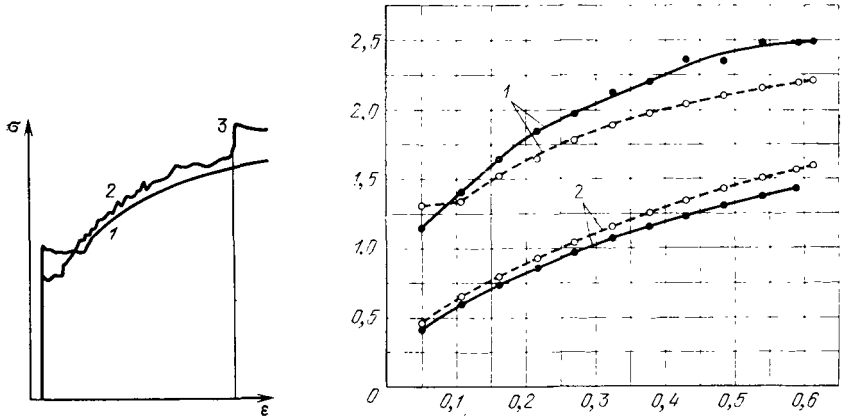



Рис. 4.117. Опыты Элам (1938). Сравнение результатов растяжения стальных образцов при различных скоростях деформации; более высокая кривая соответствует меньшей скорости деформации; заметен эффект Тарстона после 20-часового промежутка, в течение которого нагрузка не действовала; *1* — медленное деформирование, *2* — очень медленное деформирование, *3* — вертикальный уступ, образовавшийся после разгрузки и повторного нагружения спустя 20 часов.

Рис. 4.118. Опыты Элам (1938). Сравнение результатов экспериментов по квазистатическому растяжению железа и меди при медленном (сплошная линия) и быстром (штриховая) деформировании. *1* — армко-железо, *2* — медь. По оси абсцисс отложено удлинение в дюймах, а по оси ординат — нагрузка в тс.

Сравнение высоких и низких скоростей деформирования стали и армко-железе при конечных деформациях выявило, как видно на рис. 4.118, что, хотя у меди напряжение увеличивается со скоростью деформации, у армко-железа уровень кривой отклика в области

пластических деформаций при более высоких скоростях деформации оказывается более низким, чем при более низких скоростях деформации. Это наблюдение не только противоречит результатам опытов Дойтлера, но является показателем того, что стандартные гипотезы вязкопластичности оказались несостоятельными для учета разницы в пластическом поведении как функции скорости нагружения.

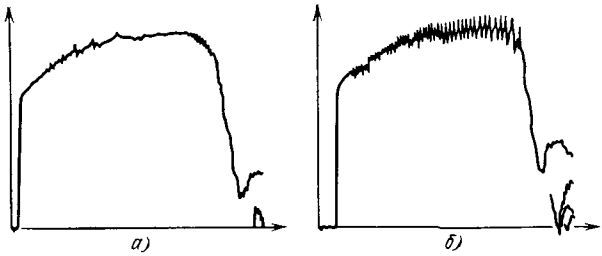



Рис. 4.119. Опыты Элам (1938). Растяжение алюминиевого сплава: *а*) быстрое, *б*) очень медленное (видны зубцы, связанные с явлением прерывистого деформирования при использовании жесткой испытательной машины).

Следуя за описанием серии экспериментов, в которых она рассматривала «эффект Тарстона» при паузах 0,5 ч и до 22 ч при конечном шаге в процессе испытания в области конечных деформаций, Элам представила сравнение очень медленных и очень быстрых опытов с алюминиевым сплавом, в котором проявился эффект типа Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье), наблюдаемый тогда, когда опыты проводятся на жестких машинах. Эти результаты, показанные на рис. 4.119, обеспечивали такую же функцию напряжение — деформация для очень медленного опыта при сравнении с быстрым опытом. Таким образом, аномалия в смысле вязкопластичности не ограничивалась армко-железом. Отсюда мы ясно обнаруживаем, имея противоречивые экспериментальные факты, что к 1938 г. роль вязкости в пластическом деформировании кристаллических твердых тел была еще не выяснена.

### 4.25. Эксперименты на удар, проведенные Дж. Гопкинсоном (1872) и Данном (1897)

В начале XIX века было признано в области линейной упругости, что модули упругости для высоких скоростей деформации нельзя определить по квазистатическим опытам на растяжение. Такие параметры, определяющие линейное упругое поведение при высоких скоростях деформации, находили из экспериментов либо на вибрацию твердых тел, либо на распространение волн; что касается области пластичности, то исследования при помощи вибрации, конечно, были невозможны из-за большой разницы в функции отклика при нагружении и разгрузке, а также вследствие нелинейности

зависимости $\sigma$—$\varepsilon$ и наличия остаточных деформаций при нагружении. И только в 1956 г., после того как были задуманы и осуществлены эксперименты с использованием техники дифракционных решеток, оказалось возможным точно определить волновые профили высоко дисперсивных пластических волн (Bell [1956, 1, 2, 3]). Так, в течение целого столетия между 50-ми гг. XIX века и 1956 г. экспериментаторы пытались с очень малым успехом как-то экстраполировать допущения и результаты анализа из области квазистатических экспериментов по одноосному растяжению и сжатию или кручению на область высоких скоростей распространения пластических волн деформации конечной амплитуды.

Вскоре после середины XIX века металлические образцы стали подвергать быстрому растяжению взрывом пороха в орудийных стволах. В конце столетия в инженерную практику вошли падающий груз и маятниковые устройства. В качестве критерия для расчетов стали применять значение остаточной деформации, вызванной некоторым ударом. К концу столетия попытка установить некоторую воспроизводимость в этих опытах и, в частности, в изучении серьезной инженерной проблемы хрупкого разрушения при низких температурах, привела к опытам над образцами с надрезами, которые в различных формах все еще остаются частью грубооценочной схемы испытаний для промышленных материалов. Многие авторы, и я в том числе (Bell [1962, 2, 3]), подчеркивали научную и, возможно, технологическую ограниченность этих опытов и предосторожность, которую нужно проявить, допуская, что они соответствуют инженерным условиям.

Тем не менее в 1897 г. новая фаза эксперимента в этой области была введена лейтенантом Армии США Б. Данном (Dunn [1897, 1]). Ему удались измерения оптико-фотографическими способами изменения перемещений концов коротких цилиндрических медных образцов во времени при ударе падающим грузом. Анализ результатов этих измерений в квазистатическом смысле стал прототипом для непрерывной последовательности аналогичных по сути опытов в течение следующих 70 лет.

Прежде чем дать краткую оценку этим «расширенным квазистатическим ударным опытам» и их толкованиям, которые вызвали так много противоречивых мнений в середине 60-х гг. нашего века, несмотря на то, что уже в течение десяти лет распространение фронта волны конечной амплитуды можно было изучать непосредственно, интересно рассмотреть первые попытки, предпринятые в 1872 г. Джоном Гопкинсоном (J. Hopkinson [1872, 1]), считать динамическую пластичность волновым феноменом. Эксперименты Гопкинсона были уникальными для своего времени, и с тех пор они высоко оценивались лицами, которые не пытались повторить его опыты и не подвергли анализ Гопкинсона тщательному изучению. С другой стороны, мы бы не много потеряли, если опустили бы обсуждение его экспериментов. Однако, за исключением Дж. Гопкинсона,

никто не сделал попытки [1]) рассмотреть динамическую пластичность как проблему распространения волн до того, как появились билинейный расчет Л. Доннелла в 1930 г. (Donnell [1930, 1]) и более правдоподобная теория волн конечной амплитуды сэра Джеффри Инграм Тэйлора (Taylor [1942, 1]) и Теодора фон Кармана в 1942 г. (Von Kármán [1942, 1]).

Джон Гопкинсон, отбросив промежуточную область процесса деформации Треска, допустил, что теория линейной упругости применима вплоть до разрушения образца. Таким образом, для данной проволоки, «закрепленной» на одном конце и подверженной удару на другом, первое разрушение по мере увеличения высоты падающего груза должно было произойти у верхнего зажима или точки закрепления, поскольку по простым соображениям напряжение должно удвоиться при отражении волны. Дальнейшее увеличение высоты падения в 4 раза по сравнению с этой высотой вызывало мгновенный разрыв проволоки на том конце, где был произведен удар, т. е. увеличение вдвое начальной скорости вызвало такие же напряжения в сечении нижнего конца, как и при отражении в сечении закрепленного конца, но при первоначальной высоте падения груза. В первой из двух своих работ на эту тему Гопкинсон (J. Hopkinson [1872, 1]) был заинтересован также и в том, чтобы выяснить, следовало ли разрушение закону кинетической энергии $mv^2$, количества движения $mv$ или вовсе не зависело от массы падающего груза, а только от амплитуды скорости в проволоке, как это подсказывала элементарная волновая теория [2]).

В первых экспериментах проволоки имели длину, равную 27 футам (8,23 м), и диаметр по описанию 13 калибра или равный 0,092 дюйма (0,234 см). Проволока зажималась на верхнем конце и натягивалась грузом в 56 фунтов (25,4 кгс). К проволоке прикреплялся зажим у нижнего конца, на который падала с заранее установленной высоты металлическая сфера, нанизанная на проволоку через отверстие, расположенное вдоль диаметра. Измеренная квазистатическая нагрузка при разрыве была равна 350 фунтам (159 кгс), чему отвечало предельное растягивающее напряжение в 52 700 фунт/дюйм$^2$ (37 кгс/мм$^2$).

В этой работе Гопкинсон сообщил в общей сложности об одиннадцати опытах при четырех значениях нагрузки. Вначале падение груза весом в 7,25 фунта (3,29 кгс) с высоты 6 футов и 6 футов 6 дюй-

---

[1]) Мы должны, однако, отметить, что Бертрам Гопкинсон в начале XX века проверил опыты своего отца и выполнил ряд экспериментов, связанных с динамическим пределом упругости (B. Hopkinson [1901,1], [1905, 1]).

[2]) См. статью в избранных трудах Тэйлора (G. J. Taylor [1958, 1], стр. 516—519) из (Taylor [1946, 1]), в которой содержится едкое замечание по поводу двух работ Гопкинсона. Тэйлор говорил: «Я должен признаться, что если бы мои знания по этому вопросу были ограничены этими экспериментами, я не почувствовал бы себя вправе считать справедливым заявление, что «удары эквивалентны, когда их скорости равны» (там же, стр. 517).

мов (1,83 м и 1,98 м) не привело к разрыву проволоки, но падения как с высоты 7 футов, так и 7 футов 2 дюймов (2,13 м и 2,18 м) вопреки ожиданиям привели к разрыву у основания. Он не смог найти наименьшую скорость, при которой разрыв происходил бы из-за отражения на закрепленном верхнем конце. Второй груз весом в 16 фунтов (7,26 кгс), падавший с высоты 5 футов 6 дюймов (1,67 м), разорвал проволоку у верхнего зажима, и хотя результатов других опытов при этом значении веса груза не приведено, оно было ошибочно включено в сравнения высот падения, необходимых для разрыва у нижнего зажима. Груз весом в 28 фунтов (12,70 кгс) разорвал проволоку в верхнего зажима при падениях с высоты, равных 2, 3 и 5 футам, тогда как падение с 4 футов 6 дюймов (1,37 м) привело к разрыву в точке на 3 фута ниже в «поврежденном месте» (J. Hopkinson [1872, 1], стр. 319), но при падении с 6 футов проволока разорвалась у нижнего зажима. Наконец, груз весом в 41 фунт разорвал проволоку у верхнего зажима при падении с высоты 4 фута 6 дюймов и у нижнего зажима при падении с высоты 5 футов 6 дюймов.

«В проблемах такого рода одни полагали, что два удара эквивалентны, когда значения $mv^2$ у них одинаковы, другие — когда равны их количества двнжения, мой результат состоит в том, что они эквивалентны, когда равны их скорости или высоты» (J. Hopkinson [1872, 1]).

Умозрительно интуитивно оценивая в целом эти любопытные результаты, Гопкинсон (J. Hopkinson [1872, 1], см. также сноску на стр. 197) утверждал, что разрыв не зависел ни от $mv^2$ ни от $mv$.

Результаты Гопкинсона не позволили сделать какой-либо обоснованный вывод. Скорости, при которых разрыв проволоки происходил у нижнего зажима при грузах весом в 7,25 фунта, 28 фунтов и 41 фунт если бы падение было действительно свободным, соответственно равнялись 250, 236 и 226 дюйм/с. Он был серьезно озадачен тем, что образцы не разрушались от отражения волны у верхнего зажима при падении груза весом 7,25 фунта, тогда как падения груза весом в 41 фунт с высоты 2 футов было достаточно для разрыва [1]). Он заявлял, что пытался безуспешно приписать это расхождение трению в самой проволоке, сравнимому с таким феноменом, как звук в воздухе. В конце концов он приписал расхождение мгновенным перенапряжениям [2]) и недостаточной жесткости опор у верхнего зажима, что дало бы сдвиг в сторону больших значений веса.

Заключив, что результаты для груза весом в 28 фунтов достаточны, чтобы продемонстрировать увеличение скорости примерно в

[1]) Это, конечно, не согласовывалось с его уже опытно установленным фактом, согласно которому для разрыва у верхнего зажима грузом весом в 41 фунт требовалась высота падения, равная 4 футам 6 дюймам.

[2]) Вне всякого сомнения именно это замечание повлияло на экспериментальные исследования его сына Бертрама Гопкинсона, предпринятые в 1905 г., чтобы рассмотреть такие перенапряжения (B. Hopkinson [1905, 1]).

два раза, Гопкинсон пришел к выводу (J. Hopkinson [1872, 1]), что предложенная им линейная теория справедлива.

Во второй своей статье на эту же тему (J. Hopkinson [1872, 2]), сославшись на «подтверждение» теории экспериментом в первой, Гопкинсон признавал, что груз, висящий ниже нижнего зажима, а также масса и упругость самого зажима, «которые влияли материально на результат», не были учтены совершенно. Заявив, что «эти факторы я включил в число подлежащих рассмотрению», он перешел к изложению новых серий опытов с проволоками длиной от 9 до 12 футов при натягивающем проволоку грузе в 61 фунт, результаты которых даны в табл. 134.

Эксперименты были идентичны изложенным в первой работе, за исключением того, что он ввел столбец исправленных высот падения с помощью множителя $\left(\frac{M}{M+M'}\right)^2$, где $M$ — вес падающей массы, а $M'$ — вес зажима в 26 унций, и серию опытов (отмеченных штрихом), в которых нижний зажим и прилегающая часть проволоки до эксперимента были погружены в эфир, чтобы понизить температуру. Вес, дававший предварительное напряжение и являвшийся наиболее важным фактором из числа ранее не учитывавшихся, все еще не учитывался. Введенные на верхнем зажиме пружины и ряд сухих и влажных кожаных шайб оказались не конструктивными и указывают лишь на обеспокоенность Гопкинсона по поводу неадекватности эксперимента.

Изучение этих дополнительных данных показывает, что усредненная в целом высота падения, измеренная или вычисленная с учетом поправочного множителя, отличается на весьма малую величину от высот, необходимых для разрыва на верхнем зажиме и внизу. Для реальных высот эти усредненные значения были равны 72 дюймам при разрыве наверху и 73,9 дюймам при разрыве у нижнего зажима, с отклонением для последней высоты при весах в 7, 16 и 28 фунтов до значений высот падения, равных 84, 78 и 69,9 дюйма соответственно. Это уменьшение при увеличении массы не было отмечено в работе Гопкинсона, так же как и то, что динамическое напряжение в сумме с предварительным на основе теоретических расчетов располагалось значительно ниже квазистатического разрушающего напряжения. Высота падения должна была быть на 100 дюймов больше, чтобы оказаться равной той, которая соответствует разрушающему напряжению, не говоря уже о том, чтобы быть выше него, как это подразумевалось в рассуждениях относительно кратковременных перенапряжений [1]).

---

[1]) Несколько лет тому назад, повторяя эксперименты Гопкинсона при аналогичных, как я надеялся, условиях, поскольку он не приводил расстояний от нижнего зажима до груза, вызывавшего предварительное напряжение, я обнаружил такую же недостаточность в воспроизводимости. Однако большинство разрывов происходило в самих зажимах, что, вероятно, объясняет причину того, что Гопкинсон не сообщает большинства измеренных расстояний от зажима.

Таблица 134

**Результаты экспериментов Дж. Гопкинсона (1872)**

| Высота падения (в дюймах) | Скорректированная высота (в дюймах) | Место разрыва |
|---|---|---|
| **Первая серия** | | |
| Груз весом 16 фунтов | | |
| 72 | 60,0 | 18 дюймов от верхнего конца |
| 78 | 65 | 12 дюймов от нижнего конца |
| 78 | 65 | 24 дюйма от верхнего конца |
| 81 | 67,5 | На верхнем и нижнем концах |
| 82 | 68,5 | 21 дюйм от верхнего конца |
| 84 | 70 | На нижнем конце |
| 84 | 70 | То же |
| *48 | 40 | Разрыва не произошло |
| *54 | 45 | На нижнем конце |
| *60 | 50 | То же |
| *72 | 60 | » » |
| Груз весом 28 фунтов | | |
| 72 | 65 | 20 дюймов от верхнего конца |
| 78 | 70 | Вблизи верхнего конца |
| 79,5 | 71,5 | На нижнем конце |
| 81 | 73 | То же |
| Груз весом 7 фунтов | | |
| 81 | 54 | На верхнем конце |
| 84 | 56 | На нижнем конце |
| *72 | 48 | То же |
| *75 | 50 | » » |
| **Вторая серия** | | |
| Груз весом 28 фунтов | | |
| 54 | 48 | У верхнего конца |
| 60 | 53,5 | У нижнего конца и в середине |
| 60 | 53,5 | На верхнем конце |
| 63 | 56 | На нижнем конце |
| 66 | 59 | То же |
| 69 | 61,5 | » » |
| 72 | 64,5 | » » |
| *36 | 32 | На верхием коице |
| *48 | 43 | На нижнем конце |
| Груз весом 16 фунтов | | |
| 60 | 50 | В середине |
| 66 | 55 | На нижнем конце |
| С одной сухой кожаной прокладкой | | |
| 72 | 60 | 4 дюйма от нижнего конца |
| 60 | 55 | Вблизи верхнего конца |
| С двумя сухими прокладками | | |
| 72 | 60 | 6 дюймов от нижнего конца |
| С тремя пропитанными прокладками | | |
| 78 | 65 | В середине |
| 83 | 69 | У верхнего конца |

Приводя эту мою строгую и нелицеприятную критику экспериментов Джона Гопкинсона, я имел целью указать на опасности, скрытые в проведении опытов, находящихся в тесной зависимости от теории, применимость которой не проверена, в рассматриваемом случае — линейной упругости, принятой лишь ради аналитичес-

кой простоты в ситуации, которая известна как сложная. Тот факт, что в течение последних 30 лет на явно непрочтенные исследования Гопкинсона ссылаются как на определяющие во вступлениях буквально к сотням работ по динамической пластичности, заставляет нас в данном исследовании обратить внимание на главный принцип, а именно, что важно проводить различие между тем, что представляет лишь исторический интерес, и тем, что в действительности является здоровой экспериментальной базой для построения физически приемлемой теории.

В статье Данна 1897 г. экспериментальная проблема того времени охарактеризована во втором предложении вступления: «Как это понимается обычно, импульсивная сила является такой, что ее значение меняется слишком быстро, чтобы можно было произвести ее успешное измерение» (Dunn [1897, 1], стр. 321). Искусный эксперимент Данна не только позволил пересмотреть это определение, но, несомненно, открыл новые возможности в экспериментальной механике твердого тела введением высокоскоростной оптико-фотографической техники, которая позволила описать непрерывное поведение перемещения как функции времени в микросекундных интервалах.

Целью экспериментов Данна было построение динамической кривой напряжение — деформация при конечной деформации для медного цилиндра, подверженного удару падающего груза. Фундаментальные квазистатические допущения, сделанные при интерпретации результатов, лежат в основе всех расширенных квазистатических опытов, начиная с экспериментов 1897 г. и кончая самыми последними опытами 60-х гг. нашего века с «составным стержнем Гопкинсона». Вплоть до появления в 1940-х гг. приборов, емкостных и электрического сопротивления, не было существенных изменений по сравнению с фундаментальным экспериментом Данна, несмотря на большое количество экспериментаторов, работавших в каждом десятилетии обсуждаемого периода, которые либо утверждали, что они открыли этот эксперимент, либо приписывали его открытие кому-то другому.

К 1890 г. метод Пуйе 40-х гг. XIX века стал пригоден для измерения единичных событий продолжительностью порядка 1/10 000 с (Poullet [1844, 1]). Наилучшая разрешающая способность вибрационного камертона для записи на ламповой саже или пудре из соснового угля, нанесенных на вращающийся металлический цилиндр, доходила до 500 колеб/с со скоростью записи на поверхности в 10 фут/с. Этот предел, измеряемый миллисекундами, был недостаточен при изучении процесса, протекавшего в микросекунды. Данн отмечал безуспешные попытки улучшить аппаратуру и летом 1891 г. применил новый подход [1]).

[1]) То, что Данн стоял на пороге новой эры и не только в экспериментальной механике, можно заметить из текста страницы, предшествующей его статье в Жур-

Используя Солнце как источник светового луча и отверстие с идеально гладкими краями, просверленное на конце камертона, как рефлектор, Данн получил след камертона на фотобумаге, навиваемой на быстро вращающийся стеклянный цилиндр. Для получения достаточной концентрации светового луча на фотопленке применялась соответствующая комбинация линз. Схема этого метода Данна в применении к задаче определения перемещений как функции времени в процессе удара падающего груза на медный образец показана на рис. 4.120.

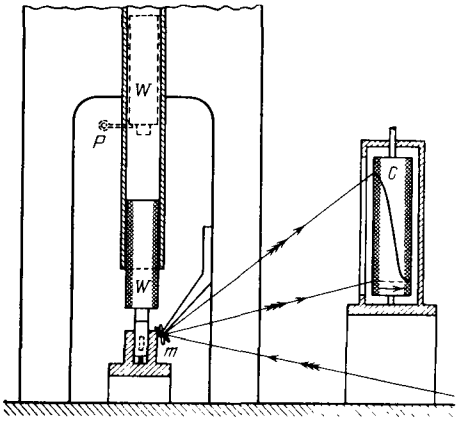



Рис. 4.120. Опыты Данна (1897). Аппарат, при использовании которого была получена первая «динамическая» кривая напряжение — деформация в расширением квазистатическом ударном эксперименте.

Новая оптическая система позволяла производить калибровку камертона на 1/4000 с на записывающей поверхности, перемещавшейся со скоростью примерно 100 фут/с. Данн отмечал, что эти значения величин ни в коем случае не являются предельными, но для целей его работы они были достаточны.

Изготовление свободно вращающегося стеклянного цилиндра, диаметр которого был тщательно доведен до точного размера, конструирование двойного затвора системы, чтобы можно было одновременно наблюдать перемещение массы и калиброванный камертон, оптическая калибровка камертонной системы и электромагнитная пусковая схема, которая поставила всю конструкцию на автоматическое управление в затемненной комнате,— все это описано Данном с большими подробностями. Он замечал, что этот эксперимент предназначен скорее всего для исследовательской лаборатории, а не для рядового инженера. Значительное место в остальной части своей замечательной работы он посвятил предложениям относительно упрощенной схемы приближенных процедур для технолога-практика.

Идея эксперимента проста и является основной для всех квазистатических опытов такого рода, выполненных до настоящего времени. Если перемещения концов образца как функции времени найдены экспериментально, то их разность дает усредненную деформацию всего образца как функцию времени при условии, что весь образец испытывает одномерную однородную деформацию в

---

нале института Франклина, в котором говорится о новом изобретении промышленных часов, «делающих ненужными услуги клерка-хранителя времени»; было рекомендовано наградить изобретателя премией Джона Скотта и медалью.

течение всей продолжительности удара. В своих экспериментах Данн полагал перемещения основания, на котором покоился образец, равными нулю, а перемещения противоположного конца в контакте с падающей массой определялись измеренными во времени перемещениями массы. Двухкратное дифференцирование этой экспериментальной кривой, если считать, что в твердой массе не распространяются линейные упругие волны и нет отражения и что она не испытывает многократных ударов от волнового взаимодействия образца и массы, дает кривую ускорение — время, по которой для образца определяется напряжение как функция времени. Что касается напряжений, то вновь, как это было сделано и для деформаций принимается допущение об однородности поля в течение всего процесса удара. Нанеся график зависимости вычисленных таким путем значений напряжения от вычисленных усредненных значений деформаций, получали, как надеялись, правдоподобную динамическую кривую напряжение — деформация

На рис. 4.121, *а* показана экспериментальная кривая перемещение массы — время, построенная Данном, по которой графическим дифференцированием он получил кривую скорость — время, рис. 4.121, *б*. Опять-таки, дифференцируя кривую скорость — время, он получил показанный на рис. 4.121, *в* график зависимости от времени ускорения, названный им «кривой замедления»; пользуясь последним графиком он нашел динамическую кривую напряжение — деформация, показанную на рис. 4.121, *г*. В обоих дифференцированиях, как это видно, Данн сгладил результаты. Динамическая кривая напряжение — деформация, данная в сравнении с кривой, полученной в квазистатическом опыте с аналогичным медным образцом, является первой такой кривой в литературе. К настоящему моменту сравнений таких кривых по данным, полученным с помощью сходных или почти сходных способов и допущений, насчитывается буквально тысячи.

Одной из примечательных особенностей таких динамических кривых напряжение — деформация, начиная от построенной Данном и до полученных в настоящее время, является недостаточная их воспроизводимость от одного опыта к другому. Почти в каждой работе, содержащей такие результаты, начиная от статьи Рудольфа Планка (Plank [1912, 1]), опубликованной в 1912 г. в Берлине (Планк случайно приписал начало опытов Данна [1]) докторской диссертации берлинского докторанта по фамилии Хёнингер (1910 г.)), до последних публикаций, авторы ссылаются на недостоверность результатов предыдущих экспериментов и предлагают некоторые модификации расширенных квазистатических опытов с целью получения более надежных данных.

[1]) Единственная ссылка на работу Данна, которую я случайно обнаружил в последние годы, была в работе Кёрбера и Шторпа (Körber and Storp [1925, 1]). Эксперимент Данна чаще всего ошибочно приписывается Хатту, который в действительности просто повторил опыт Данна семь лет спустя (Hatt [1904, 1]).

То, что кривая напряжение — деформация, полученная Данном в опыте по удару, располагается ниже квазистатической кривой, могло бы иметь важные технологические последствия, если

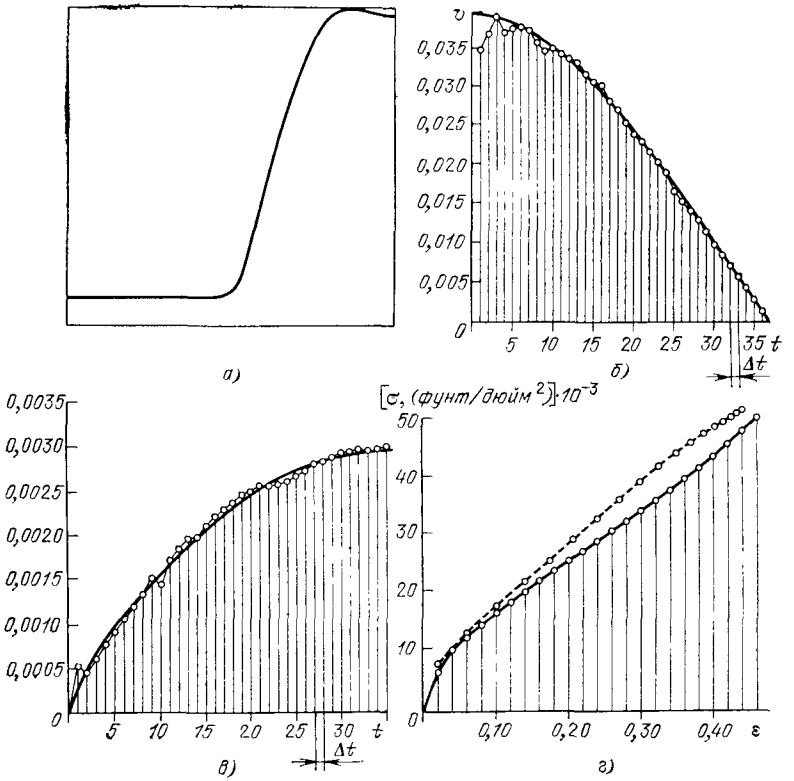



Рис. 4.121. Опыты Данна (1897). Двухкратное дифференцирование данных, полученных при испытании медного цилиндра. *а*) Экспериментальная зависимость перемещение — время; *б*) сглаженный график первой производной ($v$ — скорость после начала удара, $t$ — время, отсчитываемое от начала удара; цена одного деления на оси абсцисс $\Delta t = 0{,}0002346$ с); *в*) сглаженный графнк второй производной (по оси ординат откладывается величина «замедления» в дюймах); *г*) построенная по данным подсчета σ и ε на основе опытных данных «динамическая» кривая напряжение (σ) — деформация (ε) (сплошная линия) и квазистатическая кривая для того же материала (штриховая линия).

бы простые квазистатические допущения об однородном распределении и одномерности напряжений и деформаций были действительно корректными [1]).

[1]) Консидер в 1885 г. динамическн испытывал тонкие проволоки падающим грузом, оценивая работу и силу при разрыве. Он высказал соображение, что динамические значения выше, чем квазистатические на 42% и на 37% соответственно для работы и для силы. (Considére [1885, 1]). Согласно Кёрберу и Заку (Körber and Sack [1922, 1]), немецкий инженер Мартенс в 1891 г. и французский инженер Лебастер в 1892 г., также изучая энергию деформации в осевых ударных опытах, пришли к прямо противоположному заключению о том, что квазистатические опыты дают более высокие значения при всех скоростях нагружения.

Хотя, как отмечено выше, каждый последующий экспериментатор обращал внимание на ограничения, присущие такому эксперименту, особенно для начальной области пластической деформации, почти все они при обсуждении своих результатов ограничивались лишь мимолетным замечанием относительно того, что они пренебрегли влиянием распространения волн конечной амплитуды, взаимодействием волн и сложными пластическо-упругими и упруго-пластическими явлениями на границе.

### 4.26. Об усилиях, предпринимавшихся в течение семидесяти пяти лет по дальнейшему развитию опыта Данна, основанному на его предположении об идентичности квазистатических и ударных опытов с короткими образцами

Вот уже свыше шестидесяти лет каждое десятилетие предпринимаются энергичные усилия, чтобы улучшить или продолжить эксперименты Данна. Ввиду того, что технологи продолжают поиски надежных вариантов экспериментов Данна, а о существовании обширной ранней литературы забыто, я проследил подробно в первоначальном наброске этого исследования большинство модификаций и продолжений опытов Данна вплоть до настоящего времени. Теперь я считаю эти подробности излишними. Более удобно, по-видимому, ограничиться описанием опытов, являющихся продолжением экспериментов Данна и, за исключением одного, двух случаев, дать краткую ссылку на несколько экспериментов, в которых первоначальный был модифицирован, поскольку в течение семи десятилетий варьирования опыта Данна возникали все те же вопросы, утверждения и сомнения, которые появлялись каждый раз за весь рассматриваемый период; в самом деле, они и сейчас подвергаются постоянному обсуждению.

В 1912 г. Рудольф Планк (Plank [1912, 1]) повторил эксперимент Данна. Замена Планком механического записывающего устройства фотографическим была в действительности шагом назад. На его соображения об источниках ошибок, для устранения которых сам он ничего не сделал, ссылались много раз более поздние экспериментаторы, которые действительно пытались рассмотреть эти проблемы.

В 1914 г. Зеехазе (Seehase [1914, 1]), приписав идею своему профессору д-ру Евгению Мейеру, повторил опыт Данна, но вместо Солнца как источника света использовал проекционную лампу. Хотя Зеехазе и верил в то, что поставил оригинальный эксперимент, он в действительности использовал все усовершенствования в фотографической записи и калибровке, которые предполагал и сам Данн.

После некоторых начальных трудностей Фридриху Кёрберу ((Körber und Sack [1922, 1]), (Körber und Storp [1925, 1])) в 1925 г.

удалось поставить опыты Данна в их первоначальном виде, но с серьезным ограничением, заключавшимся в том, что для калибровки своего аппарата Кёрбер использовал падающую массу. Подобно Зеехазе в своем анализе он учел перемещение основания, на котором располагался ударяемый образец.

В эти же годы экспериментаторы Кёрбер и Зак (Körber and Sack [1922, 1]), Тафель и Фивегер (Tafel und Viehweger [1931, 1]) осуществляли опыты (типа выполнявшихся до опыта Данна), в которых кинетическая энергия падающей массы в начале удара сравнивалась с остаточной деформацией образца после удара.

Между 1931 и 1936 гг. Мититози Итихара (Itihara [1933, 1]), [1935, 1], [1936, 1]) в серии из пяти статей, опубликованных Императорским университетом Тохоку, привел многочисленные результаты сравнений квазистатических и ударных опытов на кручение весьма коротких образцов из мягкой стали и меди. Его подход заключался в адаптации идеи Данна к кручению с использованием фототехники. Итихара проводил свои опыты при температуре окружающей среды в пределах от — 170 до 1000°С.

Планк, Зеехазе, Кёрбер и Итихара пытались сравнивать динамические и квазистатические результаты при конечной деформации, используя те же квазистатические допущения, экспериментальную технику и метод графического анализа, которые были предложены Данном.

В 1937 г. Д. Джинс (Ginns [1937, 1]) модифицировал эксперименты Данна, применив систему пружинного нагружения для получения пластической деформации и датчик электрического сопротивления с угольной нитью для замеров удлинения. В письменном обсуждении работы Джинса Тэйлор описал иную модификацию опытов Данна. Детали устройства баллистического маятника, свой метод анализа и результаты, полученные им в этих опытах совместно с Квинни, Тэйлор изложил гораздо позднее (Taylor [1946, 1]) в лекции, посвященной Джеймсу Форресту и прочитанной в институте гражданских инженеров в Лондоне в 1946 г., Тэйлор заявил, что с помощью своего метода он добился скорости деформирования при растяжении для отожженой меди и мягкой стали порядка $\dot{\varepsilon}=3000\ c^{-1}$. Его результаты будут даны ниже на рис. 4.126, где проводится сравнение таких данных.

В той же работе Тэйлор описал опыты, проведенные совместно с Р. М. Дэвисом [1]), которые, как мне кажется, в литературе того времени дают наиболее убедительное доказательство возможности возрастания предела текучести при ударном нагружении для некоторых сталей, неважно по какой причине. Тэйлор и Дэвис бросали стальные шары на стальную плиту, покоящуюся на резиновом основании, постоянно увеличивая высоту падения, пока не появлялись

[1]) Тэйлор и Дэвис, см. Тэйлор (Taylor [1946, 1]); в избранных работах Тэйлора (Taylor [1958, 1], стр. 521 и т. д.).

Таблица 135

**Тэйлор и Дэвис (1946)**

| Марка стали | Статическое воздействие, производимое шарнком | | | | Динамическое воздействие, производимое шариком | | | | $P_d/P_s$, полученное по формуле (4.35) | Предел текучести на растяжение (тс/дюйм²) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | твердость по Бринеллю | наименьшая масса шара, вызывающая вмятину | наибольшая масса шара, не вызывающая вмятины | значение массы (тс), среднее из двух предыдущих | наименьшая высота падения, при которой происходит вмятина | наибольшая высота падения, при которой не происходит вмятины | среднее значение высоты падения из двух предыдущих (см) | $R$ (см) | | |
| WTM | 351 | 4510 | 3610 | 4060 | 1,1 | 0,9 | 1,0 | 0,137 | 1,18 | 74 |
| WTN | 321 | 8020 | 6330 | 7180 | 0,4 | 0,3 | 0,35 | 0,476 | 1,03 | 69 |
| WTN | 321 | 2400 | 1910 | 2150 | 0,4 | 0,3 | 0,35 | 0,317 | 1,18 | 69 |
| WTN | 321 | 1100 | 890 | 1000 | 0,5 | 0,4 | 0,45 | 0,159 | 1,01 | 69 |

Номер формулы для $P_d/P_s$ дан тот, который имеется в настоящей книге. В оригинальной работе эта формула имеет номер (11).—*Прим. ред. перев.*

пластические деформации смятия. По теории ударений Герца (Hertz [1882,1]) можно подсчитать максимальное нормальное давление $P_d$, соответствующее той наибольшей высоте падения шара, при которой деформации остаются еще упругими, и сравнить его с давлением $P_s$, требующимся для того, чтобы шар вдавился в плиту при квазистатическом нагружении. Теория Герца для этих двух случаев дает

$$\frac{P_d}{P_s} = 40{,}4h^{1/5}R^{2/3}M^{-1/2}, \qquad (4.35)$$

где $h$ — высота падения, $R$ — радиус шара, $M$ — масса шара. В табл. 135 приведены результаты Тэйлора и Дэвиса для одного частного типа стали, где отношение $P_d/P_s$ было равно почти единице в двух опытах и 1,18 в двух остальных, подтверждая тем самым часто наблюдаемые отклонения такого рода во всех типах экспериментов.

Такие опыты указывают на то, что когда бесконечно малая скорость упругого деформирования возрастает, растет и предел упругости. Однако у Тэйлора и Дэвиса нет никаких данных в отношении роли вязкости при конечных пластических деформациях и высоких скоростях деформирования.

В 1938 г. Дональд Ш. Кларк и Детвилер (Clark and Dätwyler [1938, 1]) провели ударные опыты с использованием маятника. Впервые в этом варианте эксперимента Данна на динамометрическом стержне был прикреплен датчик сопротивления и использован осциллограф для записи кривой напряжение — время на одном конце пластически деформирующегося образца. Измерения, конечно, выполнялись на соседнем стержне, где можно было получить элементарную линейную упругость и проэкстраполировать ее на примыкающую поверхность образца. Вместо измерения всего удлинения, как это было у Данна, Кларк и Детвилер вычислили двойной интеграл от силы как функции времени, чтобы получить, как предполагалось, усредненную зависимость между удлинением и временем. В противоречии с данными Тэйлора и Квинни, полученными в том же году, предел текучести меди теперь, как и предполагалось, заметно возрос. У мягкой и нержавеющей стали выявилось обычное возрастание предела текучести, тогда как у стали SAE 6140 динамическая кривая оказалась значительно ниже квазистатической — явление, наблюдаемое чаще, чем в этом может убедить большинство обзорных работ. Алюминий не показал расположения динамической кривой выше квазистатической до тех пор, пока деформации не превысили 0,04, хотя многие экспериментаторы, проводя расширенные квазистатические ударные опыты, утверждают, что расположение динамической кривой над статической начинается от более низкого значения деформации.

В 1935 г. Манн (Mann [1935, 1]), не собиравшийся определять динамические функции, так как его интересовала только термодинамика энергетического критерия, ввел быстро вращающийся маховик для придания почти постоянной скорости одному концу растягиваемого образца. Манн надеялся с помощью этого эксперимента изучить термодинамику быстрого деформирования. По этой причине он сконцентрировал свое внимание на измерении потери энергии. Хотя вклад Манна в термопластичность был невелик, он добился успеха, обнаружив «скорость перехода» (опытное обнаружение еще в 1935 г. критической скорости Кармана 1942 г. (von Kármán [1942, 1]), выше которой поглощенная энергия деформации уменьшается. Хотя Манн не пытался определить функцию отклика при динамическом нагружении, было недалеко до того момента, когда попытались сделать это другие экспериментаторы, как, например, группа сотрудников калифорнийского Технологического института в 1938 г. и Манжуан и Надаи в 1940 г. (Manjoine and Nadai [1940, 1], Nadai and Manjoine [1941, 1]).

Среди всех экспериментов, проводившихся за последние 30 лет на основе эксперимента Данна и его гипотезы, пожалуй, самое широкое обсуждение вызвали результаты Манжуана и Надаи 1940—1941 гг. Эти результаты были опубликованы в трех частях; первая вышла в трудах Американского Общества по испытанию материалов (*Proceedings of the American Society for Testing Materials*), а

части II и III — в одной статье в журнале Прикладной механики (*Journal of Applied Mechanics*) в июне 1941 г. К 1940 г. уникальный вклад Данна 1897 г. как в экспериментальную технику, так и в сам эксперимент были совершенно забыты. Манжуан и Надаи сослались на Планка как на зачинателя эксперимента в 1912 г. [1]).

После краткого обзора результатов нескольких предшественников, которые проводили опыты такого рода, Манжуан и Надаи подробно рассмотрели опыты на кручение Игихара (Itihara [1933, 1], [1935, 1], [1936, 1]) как главного своего предшественника, поскольку он проводил эксперименты при температуре окружающей среды от —170 до 1000°С. Они справедливо критиковали Игихара за то, что в его опытах на кручение образцы были чрезвычайно короткими с отношением длины к диаметру в 1,25, что не позволяло дать осмысленное описание картины напряженно-деформированного состояния при кручении; но, что удивительно, они, очевидно, считали важным, что результаты Игихара «имели большое сходство с диаграммами по опытам на растяжение, описанными ниже» (Manjoine and Nadai [1940, 1], стр. 826).

Манжуан и Надаи проводили свои эксперименты с высокоскоростным махозиком, который был введен Манном (Mann [1935, 1]). Массивное вращающееся колесо имело приспособление, которое, будучи введенным в действие, захватывало один конец образца. Другой конец образца прикреплялся к металлическому нагружающему стержню, линейно-упругое деформирование которого записывалось оптически через щель. Верхняя кромка щели следовала за движением стержня, и удлинение записывалось лучом света, проходившим через щель шириной 0,002 дюйма и падавшим на фототрубу. У конца образца, служившего наковальней, который подвергался удару молота, связанного с колесом, второй луч света перерезался движущимся концом образца. При помощи выходного сигнала двух фототруб в виде разности потенциалов, представленных на осциллоскопе в виде движения луча в системе ортогональных координат, вычерчивалась динамическая кривая напряжение — деформация, что не требовало введения никаких вспомогательных факторов, за исключением использования гипотез Данна и выполнения калибровки двух сигналов перемещений в терминах напряжения и деформации. В своей работе Манжуан и Надаи (Manjoine and Nadai [1940, 1]) дали образцы осциллограмм на фотографических лентах шириной 35 мм. Температура окружающей среды изменялась с помощью индукционной печи.

---

[1]) То, что Планк [1912, 1], как я уже отметил выше, игнорировал работу Данна спустя всего лишь 15 лет после выполнения им первого в своем роде оригинального эксперимента, показывает нам еще раз, как вследствие ошибок в вопросе приоритета плоды выдающегося экспериментального мастерства предаются забвению до тех пор, пока их не извлечет из тьмы на свет божий почтенный седой энциклопедист.

На рис. 4.122, *а*, *б* и *в* показаны графики напряжение — деформация при трех различных скоростях деформирования соответственно: 135, 450 и 900 $с^{-1}$ и разных уровнях температуры окружающей среды, а на рис. 4.122, *г* представлены графики напряжение — деформации при комнатной температуре, но при всех трех указанных скоростях деформирования, а также и в условиях квазистатических. Испытываемый материал был чистой медью. Скорости деформирования определялись по скорости вращения колеса, которая поддерживалась почти постоянной в течение одного опыта.

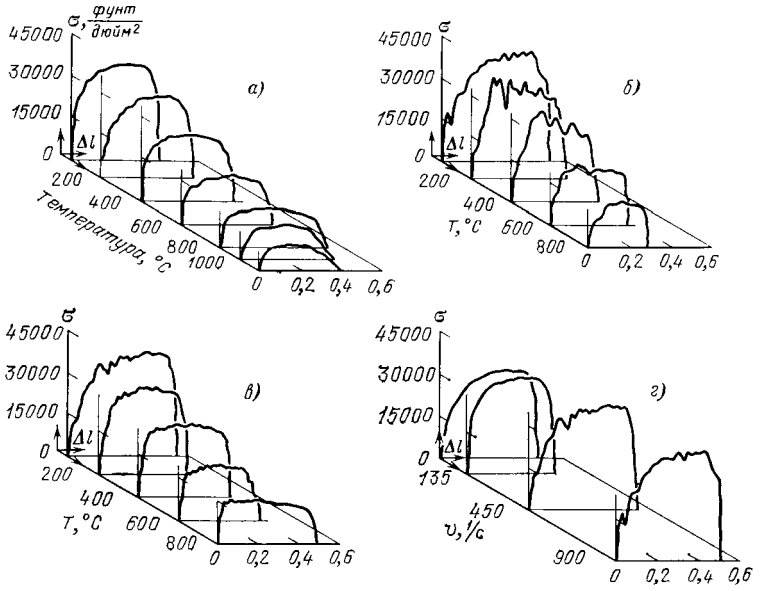



Рис. 4.122. Опыты Манжуана и Надаи (1940). Вариант эксперимента Данна с использованием в этом варианте высокоскоростного маховика. Испытание образцов из чистой меди в диапазоне температур от комнатной до высокой при трех скоростях деформирования: *а*) 135 $с^{-1}$; *б*) 450 $с^{-1}$; *в*) 900 $с^{-1}$; *г*) сравнение статической кривой напряжение — деформация с динамическими для этих трех скоростей деформирования; все опыты проводились при комнатной температуре. Напряжение σ дано всюду в фунт/дюйм², удлинение $\Delta l$ — в дюймах, скорость деформирования $v$ — в 1 /с, температура $T$ — в °С.

Главный интерес для Манжуана и Надаи представляла предельная прочность, которая, как они отметили, имела тенденцию к возрастанию при увеличении скорости деформирования. В 1966 г., представляя их данные при комнатной температуре графиками, я заметил (Bell [1966, 1]), однако, что при значениях напряжений ниже максимального кривые напряжение — деформация для больших деформаций вели себя как раз наоборот, т. е. самой высоко расположенной была кривая для скорости 135 $с^{-1}$, а самой низко расположенной — для скорости 900 $с^{-1}$. Никто из тех, кто часто ссылался на их табулированные предельные напряжения, не обратил внимания на этот факт. В промежуточной области Треска данные

Манжуана и Надаи не подтверждают гипотезу о вязко-пластическом поведении материала. Более подробно об этом будет сказано ниже, когда я подведу итоги обсуждения расширенных квазистатических экспериментов.

Часть II работы Манжуана и Надаи была продолжением этих экспериментов со сталью и алюминием, причем здесь встречались значительные трудности из-за больших колебаний.

Браун и Винцент (Brown and Vincent [1941, 1]) в 1941 г. непосредственно перед тем, как динамическая пластичность стала рассматриваться в связи с теориями распространения волн (Тэйлор (Taylor [1942, 1]), фон Кáрмáн (von Kármán [1942, 1]) Уайт и Гриффис (White and Griffis [1942, 1], [1947, 1], [1948, 1]), Рахматуллин [1945, 1]) [1]), в своем кратком историческом введении описали в пренебрежительных выражениях некоторые из множества результатов по расширенным квазистатическим и ударным экспериментам, которые предшествовали их работе. В версии ударного эксперимента Данна, принадлежащей Брауну и Винценту, сравнивалось напряжение как функция времени на одном конце образца, полученное при использовании пары пьезокристаллов, со средней деформацией, полученной с помощью щелевого устройства и фотоэлектрического элемента. Хотя они и не использовали графическое дифференцирование, все остальные допущения Данна относительно сходства между квазистатическими и ударными опытами они приняли. Вновь ударной машиной оказался маятниковый аппарат, способный вызвать скорости деформирования, достигавшие по их оценкам значения 800 $с^{-1}$. Их результаты были не более надежными, чем результаты их предшественников, что было вызвано, в частности, наблюдавшимися резкими колебаниями.

То, что в положении дел с опытами типа эксперимента Данна не был сделан заметный вклад до 1948 г., видно из экспериментов Е. Т. Хабиба (Habib [1948, 1]), который, не подозревая о существовании большого числа предшественников, совершил исторически интересный возврат к исследованиям XIX века [2]), проводившимся до Данна. Остаточная деформация медных цилиндров вновь использовалась в качестве критерия для динамического давления.

Стальные цилиндры (поршни) различной массы получали ускорение в воздушной пушке и ударяли по маленьким цилиндрам из

---

[1]) Влияние войны сказалось не только в несогласованном, раздельном изучении проблемы многими исследователями, но и в задержке на несколько лет из-за закрытости публикаций общей информации о том, что такая теория с соответствующими экспериментами, созданная Дюве, фактически существует (см. Дюве, Вуд и Кларк (Duwez, Wood and Clark [1942, 1]); фон Кáрмáн и Дюве (von Kármán and Duwez [1946, 1]); Дюве и Кларк (Duwez and Clark [1947, 1]); фон Кáрмáн и Дюве (von Kármán and Duwez [1950, 1])).

[2]) И опять, в описании этого повторения более раннего типа эксперимента, о котором существует очень большая литература XIX и XX веков, ссылки не идут дальше восьми лет, и нет ссылок на ранние варианты обсуждаемого эксперимента.

бескислородной меди, высокой электропроводимости, которая была отожжена в водородной среде при 950 °F. Температура поддерживалась в течение 2,5—3 ч, после чего образцы охлаждались в печи потоком водорода, пока температура не опускалась ниже 250 °F. Высокоскоростным фотографированием Хабиб определял скорости пистона до и после удара. Так же, как и в более ранних экспериментах, он по разности скоростей определял потерю энергии образца; эту потерянную энергию он наносил в виде графика как функцию измеренной остаточной деформации образца. Вводя обычные допущения об одномерности и т. д., Хабиб преобразовывал результаты многих опытов к предлагаемой кривой отклика при высоких скоростях деформирования.

В 1949 г. Герберт Колски (Kolsky [1949, 1]) предложил новый вариант эксперимента Данна, все еще основанный на гипотезе Данна. Использовав изящное видоизменение первоначального эксперимента Бертрама Гопкинсона (B. Hopkinson [1905, 1]) по изучению сжатия бруса, Колски провел опыт, который для некоторых технологов в течение более чем десяти лет после этого казался способным дать ответ на вековые поиски ударного эксперимента для оценки материалов. Если многие пришли к выводу, что результаты таких опытов имеют ограниченную или сомнительную ценность в фундаментальной физике, то этим мы обязаны современным экспериментам (Bell [1956, 1, 2], [1958, 1], [1960, 1, 2, 3], [1966, 1]), которые, наконец, позволили провести подробное и точное изучение нелинейного распространения волн при конечной деформации. Вариант Колски эксперимента Данна, несмотря на большую критику в его адрес, продолжал развиваться, особенно в 60-е гг. нашего века, как ударный эксперимент в технологии материалов, главным образом из-за того, что его простота способствовала широкому применению, тогда как явно более основательные эксперименты по волнам конечной амплитуды требовали, по-видимому, такого большого количества времени и уровня подготовленности экспериментаторов, что ограничивали их использование университетскими исследовательскими лабораториями. (Читатель вспомнит, что в 1897 г. Данн также придерживался мнения, что его эксперимент является слишком сложным, чтобы выйти за пределы исследовательских лабораторий!)

Эксперимент Колски (Kolsky [1949, 1]), который вскоре стал известен как опыт «с разрезанным стержнем Гопкинсона», основывался на поведении при осевом ударе длинного жесткого стержня при наличии исключительно ко откого мягкого участка — образца, названного нами «вафлей», вставленного между жесткими частями стержня. Детонатор, зажигавшийся электрическим путем, помещался на дальнем конце одного жесткого стержня, как показано на рис. 4.123, тогда как параллельно-пластинчатый конденсаторный микрофон для записи перемещений как функции времени по изменениям емкости размещался на поверхности в дальнем конце вто-

рого стержня. Цилиндрический конденсаторный микрофон [1]) располагался на некотором расстоянии от детонатора, чтобы обеспечить информацию о радиальном перемещении начальной и отраженной от вафли волн, так же, как располагался инерционный переключатель, запускавший осциллограф, в котором записывались кривые перемещения как функции времени.

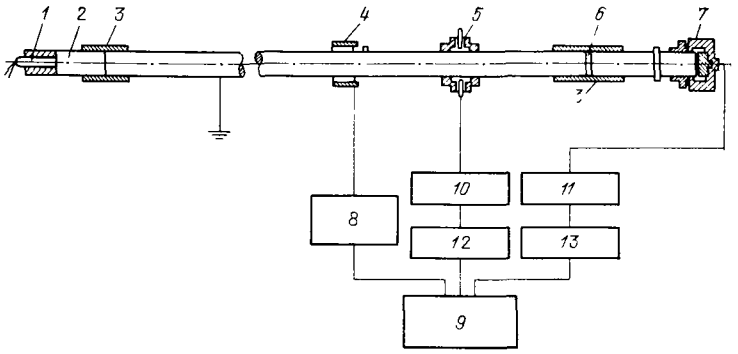



Рис. 4.123. Опыты Колски (1949). Аппарат для эксперимента с образцами имеющими вид тонкой пластины (вафли); *1* — детонатор, *2* — стержень-наковальня (стержень, непосредственно воспринимающий удар от взрыва), *3* — муфта, *4* — инерционный переключатель, *5* — цилиндрический конденсаторный микрофон, *6* — образец, *7* — параллельно-пластинчатый конденсаторный микрофон, *8* — элемент развертки, *8* — катодно-лучевой осциллограф, *10* — первый элемент питания, *11* — второй элемент питания, *12* — первый усилитель, *13* — второй усилитель.

Как это характерно для публикаций Колски, в рассматриваемой работе дано всестороннее содержательное обсуждение подробностей эксперимента, трудностей и ограничений, что, к сожалению, не типично для большинства работ тех, кто в последующем описывал модификации этого опыта. Колски сравнивал кривые перемещение — время на дальнем конце второго стержня при наличии и отсутствии короткого образца-вафли между стержнями; таким путем он построил посредством расчета кривые перемещение — время для сечений по обеим сторонам от вафли. Этот расчет, конечно, основывался на теории линейно-упругих волн при допущении, что отсутствует вязкостная или геометрическая дисперсия импульсов, бегущих вдоль жестких стержней.

Распознавание этих упомянутых кривых перемещение — время при помощи параллельно-пластинчатого конденсатора позволило получить кривые напряжение — время в начальном и других сечениях посредством использования функций скорости напряжения из линейной теории. Чтобы интерпретировать данные в терминах напряжения как функции деформации при высоких скоростях деформирования, было необходимо ввести обычным образом гипотезу Данна о том, что квазистатические условия справедливы при

[1]) Это устройство аналогично тому, которое было описано Дэвисом в предыдущем году при обсуждении экспериментов с линейными упругими волнами.

динамическом пластическом течении. Так же, как обычно, распространением нелинейных волн, отражением и взаимодействием (включая взаимодействие компонентов с малыми амплитудами и конечными амплитудами) было пренебрежено.

Полученные Колски кривые напряжение — деформация по данным опытов с полиэтиленом (*а*), натуральной резиной (*б*), плексигласом (*в*), медью (*г*) и свинцом (*д*) показаны на рис. 4.124. Экспериментальные точки даны с интервалом 2 мкс для образцов из меди

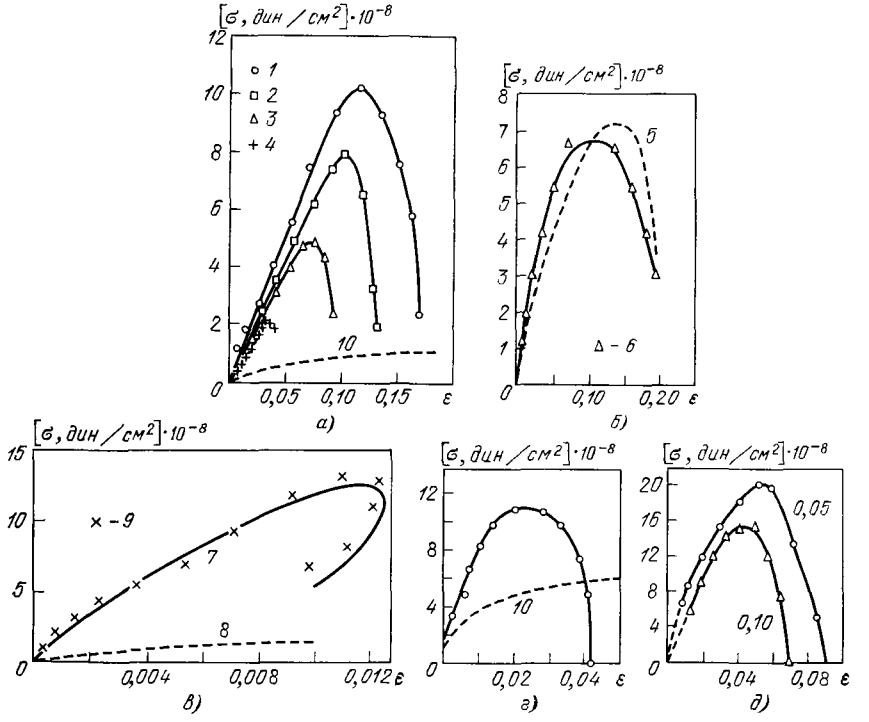



Рис. 4.124. Опыты Колски (1949). Динамические результаты для варианта эксперимента Данна, выполненного Колски. Результаты приведены для тонких вафель из нижеуказанных материалов: *а*) полиэтилен; температура 21°С; *1* — толщина 0,025 см; *2* — толщина 0,048 см; *3* — толщина 0,086 см; *4* — толщина 0,268 см; штриховая линия *10* — «статическая» кривая; *б*) натуральная резина, температура 17°С, штриховая линия *5* — теоретическая кривая; *6* — экспериментальные результаты; *в*) плексиглас, температура 20°С; сплошная линия *7* — «статическая» кривая, штриховая линия *8* — теоретическая кривая, *9* — экспериментальные результаты; *г*) медь; *10* — статическая кривая; *д*) свинец. Во всех пяти случаях по оси абсцисс отложе а деформацня, по оси ординат — напряжение в дин/см².

толщиной 0,05 см и свинца 0,05 и 0,10 см толщиной, что, как показано, привело к различным результатам.

Колски сознавал важность поверхностного трения. Однако, как он говорил в своих выводах, он установил, что введение смазки не привело к существенной разнице. Этот факт плюс то, что образцы оставались цилиндрическими и что замеренная средняя остаточная деформация у меди не отличалась существенно в своем конечном зна-

чении от средней, найденной вычитанием двух кривых перемещение — время, снятых на параллельно-пластинчатом (плоском) конденсаторе, казались достаточными в 1949 г. (как это считалось инженерами-экспериментаторами, которые применяли модификации эксперимента Колски в 60-е гг. XX века) для оправдания использования одномерной квазистатической интерпретации результатов, т. е. для оправдания гипотезы Данна.

Колски обращал особое внимание на необходимость использования весьма коротких образцов, чтобы свести к минимуму влияние взаимодействия волн. Этот вопрос, так же как и аспекты, связанные с трехмерностью проблемы, исследовались Дэвисом и Хантером (Davies, Hunter [1963, 1]) несколько лет спустя в их экспериментах, проведенных в 1963 г., с использованием методики Колски, в опытах с составным стержнем Гопкинсона. Они показали, что толщина образца-вафли не может выбираться произвольно, как это делали некоторые, надеясь изменить скорость деформирования.

В 50-е гг. XX века большинство экспериментаторов так или иначе направили свои усилия на изучение прямых или косвенных аспектов распространения волн в связи с нелинейной их теорией, которая была развита в 40-е гг. Однако, невольно направив этот шаг вперед, Хаузер, Симмонс и Дорн (Hauser, Simmons and Dorn [1961, 1]) на симпозиуме 1960 г., посвященном поведению металлов при высоких скоростях деформирования, в своей работе под любопытным названием «Влияние скорости деформирования на распространение пластических волн» (поскольку для объяснения результатов эксперимента использовались квазистатические гипотезы Данна) представили модификацию эксперимента Колски. Образец более не должен был быть очень тонкой вафлей-прослойкой, длина его могла заключаться в диапазоне от 0,1 до 1,6 дюйма, чтобы обеспечить путем изменения масштаба образца различные скорости деформирования в квазистатическом смысле при различных приложенных максимальных напряжениях. Вместо кратковременного ударного импульса Колски они ввели третий жесткий стержень, соударение которого с первым стержнем вызывало ударный импульс нагружения трапецеидальной формы, который можно было сделать любой по желанию продолжительности путем изменения длины ударяющего стержня. Этот импульс, проходя через стержень, подверженный удару, в конечном счете достигал поверхности контакта между жестким стержнем и сравнительно коротким пластически деформируемым образцом, где образовывались отраженные и рабочие волны. Первые отражались обратно в стержень, подверженный удару, а вторые вызывали конечную деформацию в образце и выходили из него, чтобы пройти через второй жесткий стержень.

Суть эксперимента заключалась в том, чтобы измерить параметры падающей и отраженной волн в первом жестком стержне и конечной рабочей волны во втором жестком стержне с помощью датчиков электрического сопротивления, исключающих влияние из-

гиба. Интерпретируя такие данные экстраполированием как напряжения, так и перемещения на каждой поверхности раздела и вводя все гипотезы Данна о тождественности квазистатических и ударных опытов, Хаузер, Симмонс и Дорн построили графики усредненных концевых нагрузок и усредненных деформаций, найденных по концевым перемещениям так, чтобы получить динамическую функцию напряжение — деформация.

В работе Хаузера, Симмонса и Дорна впервые за более чем шестьдесят лет была сделана попытка проверки эксперимента Данна в терминах отраженных пластических волн. Поскольку они использовали билинейную гипотезу Доннела (Donnell [1930, 1]) 1930 г. и, что любопытно, одну из «динамических» функций отклика, основанную на гипотезе Данна, эта первая попытка оказалась неудачной. Они пришли к заключению, что влияние распространения волн и отражения невелико. В своей докторской диссертации в 1964 г. Эндрю Конн (Conn [1964, 1], [1965, 1]), используя то же «динамическое» соотношение напряжение — деформация и усредненные данные, показал, что лучшее приближение в терминах более общей теории волн конечной амплитуды Кармана — Тэйлора, предложенной в 1942 г., привело к таким результатам по распространению волн и их отражению, которые были намного ближе к данным эксперимента: тем самым он показал, что главный источник ошибки в эксперименте Данна состоял в пренебрежении распространением и отражением нелинейных волн. Как подчеркнул далее Конн, любой волновой анализ, с использованием сложного взаимодействия коротких образцов в опытах на динамическую пластичность, требует заблаговременного знания искомого соотношения напряжение—деформация, чтобы выполнить долгие вычисления на ЭВМ.

Эксперимент Колски в модифицированном виде, описанном выше, был так прост по замыслу и интерпретации результатов в квазистатических терминах, что он быстро стал технологическим стандартным тестом для оценки материалов в 60-е гг. XX века, но без значительных противоречий в оценке правильности полученных результатов.

Например, Чиддистер и Малверн (Chiddister and Malvern [1963, 1]) в 1963 г. провели эксперимент с составным стержнем с алюминиевой вафлей в широком диапазоне температур. Дэвис и Хантер (Davies and Hunter [1963, 1]), вдобавок к интересной оценке данного результата эксперимента, получили результаты по алюминию, меди и свинцу. Линдхольм (Lindholm [1964, 1]) в серии статей описал результаты опытов с алюминием, медью, свинцом и железом при использовании метода составного стержня Гопкинсона. Линдхольм и Икли (Lindholm and Yeakley [1965, 1], [1967, 1]) получили аналогичные данные по монокристаллам в 1965 г., а в 1967 г. они модифицировали вафлю-прослойку, чтобы получить результаты для разрезанного стержня при растяжении. Тардиф и Маркиз (Tardif and Marquis [1963, 1]) в 1963 г. дополнили ранние

результаты Колски по полиэтилену, проведя опыты по методу разрезанного стержня Гопкинсона с восемью различными пластиками, включая плексиглас, нейлон и тефлон. Бейкер и Ю (Baker and Yew [1966, 1]) в 1966 г., а Конвери и Пуф (Convery and Pugh [1968, 1]) в 1968 г. провели аналогичные опыты по кручению со снятием предварительных упругих напряжений, чтобы получить начальную волну.

Экспериментальное подтверждение физической применимости вязко-пластического анализа в динамической пластичности и в меньшей степени модельного подхода в теории дислокаций зависит главным образом от того, справедливы ли гипотезы Данна. В 1966 г. в первой части статьи, содержащей описание ряда экспериментов по методу разрезанного стержня Гопкинсона, в которых впервые во время эксперимента (Bell [1966, 1]) непосредственно применена техника дифракционной решетки для измерения локальной деформации в образце-вафле в процессе деформации, я собрал с целью сравнения результаты квазистатических ударных опытов типа опытов Данна, выполненных восемью экспериментаторами за период с 1937 по 1964 г. с одним и тем же материалом — отожженной медью. На рис. 4.125 показаны квазистатические кривые напряжение — деформация для отожженной меди, полученные шестью из них.

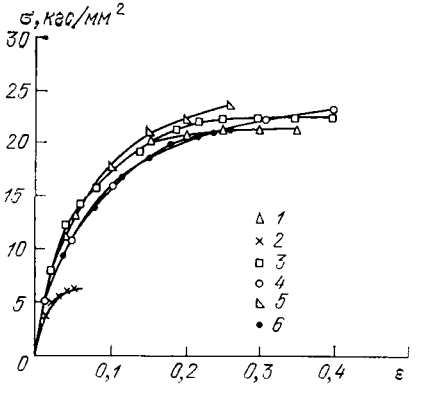



Рис. 4.125. Квазистатические опыты с отожженной медью, выполненные указанными здесь экспериментаторами для сравнения полученных ими динамических данных с данными на основе гипотезы Данна, приведенными на рис. 4.126 (см. Белл [1966, 1]); *1* — Джинс (1937), *2* — Колски (1949), *3* — Манжуан и Надаи (1940), *4* — Тэйлор (1937), *5* — Хабиб (1948), *6* — Линдхольм (1964).

За исключением опыта Колски (Kolsky [1949, 1]), который проводился с образцом-вафлей толщиной 0,05 дюйма, существовала достаточно хорошая согласованность по квазистатическим опытам всех экспериментаторов, что убеждает нас в том, что они действительно изучали большие деформации одного и того же материала.

На рис. 4.126 представлен компиляционный материал из моей статьи 1966 г. по динамическим кривым напряжение — деформация, составленной на основе результатов указанных выше авторов, полученных из опытов, которые представляют собой модификации эксперимента Данна.

Детальная проверка широкого разброса в этих опубликованных [1]) «динамических» кривых напряжение — деформация для того же твердого материала, использовавшегося в квазистатических опытах, результаты которых представлены на рис. 4.125, обнаруживает несостоятельность как эксперимента Данна, так и вообще предположения о том, что квазистатические и динамические опыты тождественны. Если отнестись к этим данным серьезно, то приходится сделать неизбежный вывод о том, что уровень расположения

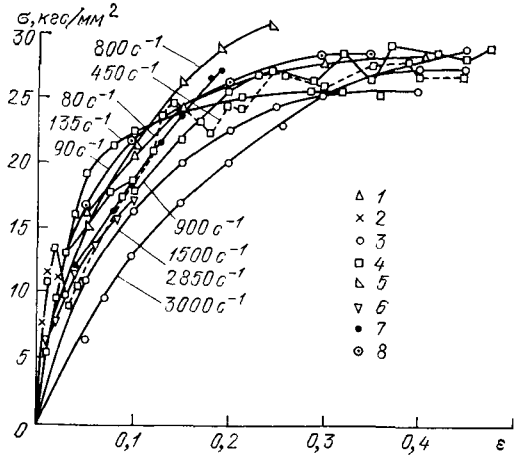



Рис. 4.126. Диаграммы напряжение — деформация, полученные в ударных расширенных квазистатнческих опытах на растяжение и сжатие с отожженной поликристаллической медью. Индивидуальное назначение скоростей деформации произведено экспериментаторами, данные которых здесь представлены. Вынесенные с графиков числа указывают скорости деформирования в 1/с. *1* — Джинс (1937), *2* — Колски (1949), *3* — Тэйлор (1937), *4* — Манжуан и Надаи (1940), *5* — Хабиб (1948), *6* — Дэвис и Хантер (1963), *7* — Линдхольм (1964), *8* — Барон (1956).

динамических кривых напряжение — деформация понижается с увеличением скорости деформирования всюду, кроме области максимальных конечных деформаций. Наибольшей скорости деформирования 3000 $с^{-1}$ у Тэйлора (Taylor [1937, 2]) отвечает наинизшая кривая, причем кривые для 1500 и 2850 $с^{-1}$ проходят выше и совпадают друг с другом. Значения напряжений, полученных в экспериментах Манжуана и Надаи (Manjoine and Nadai [1940, 1]) при скоростях деформирования 135, 450 и 900 $с^{-1}$ до тех пор, пока деформации не превышают 20%, располагаются так, что меньшей скорости соответствуют большие ординаты в графиках. Напряжениям, полученным в опытах Барона (Baron [1965, 1]) [2]) при самых

[1]) Для сравнения многие из них пришлось пересчитать обратно от истинных напряжений и истинных логарифмических деформаций к первоначальным условным напряжениям и деформациям (см. Bell [1966, 1]).

[2]) Барон проводил свои опыты, используя маятник Шарпи и образцы с надрезом. Образцы находились в маленьком приспособлении для создания растяжения. Датчики электрического сопротивления, прикрепленные к полой стальной трубке, находились на одной линии с образцом. По этим результатам, рассматривавшимся как диаграмма сила — время, находили обычным двойным интегрированием усредненную, как считалось, деформацию в функции от временн. Главной особенностью опытов было то, что они проводились при температурах, равных — 196 и —78°С, так же, как и при обычной температуре 20°С. Испытывались

низких скоростях деформирования $\dot{\varepsilon}=90\ c^{-1}$ и Джинса (Ginns [1937, 1]) при $\dot{\varepsilon}=80\ c^{-1}$ вплоть до конечных деформаций порядка 20% соответствуют самые высокие кривые напряжение — деформация.

Приведенные выше результаты при промежуточных значениях деформаций весьма типичны для сравнения расширенных квазистатических опытов, выполненных и с другими твердыми материалами как в условиях растяжения, так и сжатия. Совершенно невероятно, однако, что именно по этим данным многие заключают о важности вязкости в динамической пластичности. Главный экспериментальный факт для теоретика, заинтересованного в этих вопросах, состоит в сделанном на основе сравнений заключении, что 70 лет компромисса в экспериментах и аппроксимация, основанная на гипотезе Данна, оказались неадекватными, чтобы обосновать какие-либо физические допущения как в вязкой, так и в невязкой пластичности, не говоря уже о теориях дислокации и волнах конечной амплитуды [1]).

---

армко-железо, мягкая сталь, три более сложных стали, отожженные алюминий, медь и латуиь (39% цинка). Данные по этим расширенным квазистатическим опытам выявили по большей части более высокие динамические значения. Достаточно случайные даиные для меди, показанные на рис. 4.126, отличались гораздо больше, чем данные для латуни, которые лишь слабо возрастали при всех температурах.

[1]) Возражения против использования гипотезы Данна были общими. Дж. Гест (Guest [1930, 1]) был непревзойденным критиком в 30-е гг. нашего века. Иллюстрацией к соображениям такого рода было высказывание Дональда Шермана Кларка в 1950 г., сделанное уже после успешного построения им в 1942 г. теории волн.

«Некоторые исследователи выражают результаты ударных опытов на растяжение в терминах скоростей деформирования. Можно показать сразу же с помощью теории распространения пластических волн, что такой подход несостоятелен. В опытах такого рода скорость деформирования во всех частях образца меняется не однородно от сравнительно малого значения до почти бесконечно большого. По этим же соображениям нельзя преобразовывать диаграмму сила — время, полученную на любом конце образца в ударных опытах, в диаграмму напряжение — деформация. Эту трудность можно обойти, только избавившись от влияния распространения волн в опыте. Это условие требует проведения опыта совершенно другого рода» (Clark and Wood [1950, 1], стр. 48).

Не менее интересно более позднее высказывание Кларка, имевшее место при прочтении им лекции в память Кэмпбелла в Американском обществе металлов в 1935 г.:

«Наиболее фундаментальным проявлением сопротивления металла деформированию является соотношение напряжение — деформацня. А как получают соотношение напряжение — деформация при ударе? Многне исследователи пытались обеспечить получение таких данных, которые позволили бы установить это соотношение. До недавних пор все эти попытки давали сомнительные результаты. Такие результаты теряют свою силу, так как в процессе их получения не принимался во внимание феномен распространения волн, который играет преобладающую роль при ударе. Опыты проводнлись с замерамн силы, действующей на одном конце образца, и соответствующей деформации на некоторой выделенной длине образца. В силу сказанного здесь относительно распространения деформацин должно быть ясно теперь, что результаты ударных опытов, в которых не учитывается влияние распространения волн, будут давать лишь средние значення и не позволяют установить истннное соотношение между напряжениями и деформациями в течение ударного опыта» (Clark [1954, 1], стр. 38—39).

Что касается ударных опытов с образцами с надрезами, я оставляю технологическую применимость эксперимента Данна в любой его форме на суд тех, кто нуждается в упрощенной оценке материалов при решении настоятельных проблем инженерного проектирования. 75 лет экспериментов в этом направлении мало что дали для понимания физики твердого тела.

### 4.27. Распространение волн конечной амплитуды в отожженных поликристаллических телах: эксперименты, проводившиеся с 1942 по 1956 г.

Без сомнения слабые достижения в экспериментах с ударами до 1940 г. можно приписать тому факту, что не смогли рассмотреть проблему в терминах распространения нелинейных волн, а также недостаткам и в экспериментальной технике для изучения таких волн. Хотя метод прямого экспериментального изучения профилей волн конечной амплитуды в твердых телах не был создан до первого измерения конечной деформации с помощью дифракционной решетки (Bell [1956, 1]) в 1956 г., исходить из адекватной нелинейной теории оказалось возможным уже после 1942 г. Это была теория, которая распространяла на изохорические деформации некоторые идеи из нелинейной теории дилатационных волн в твердых телах, рассмотренной Гюгонио в 80-е гг. XIX века. Она была предложена Тэйлором в 1942 г. (Taylor [1942, 1]), фон Карманом (von Kármán [1942, 1]) в 1942 г. и в более ограниченной форме Рахматуллиным (Рахматуллин [1945, 1]) в 1945 г. и Уайтом и Гриффисом (White and Griffis [1942, 1], [1947, 1], [1948, 1]) в 1942 г.

Одномерные теории Тэйлора и фон Кармана для волн нагружения в твердом теле представляют собой специальный случай классической теории конечных упругих деформаций. Только при разгрузке с сопутствующими остаточными деформациями появляется необходимость в учете пластических деформаций как таковых. Обозначив через $\sigma$ однозначную функцию деформаций $\varepsilon$, через $x$ — лагранжеву координату вдоль оси образца, через $t$ — время и через $\rho$ — плотность массы и имея в виду, что $\partial u/\partial t = v$ представляет собой скорость частицы, а $\varepsilon = \partial u/\partial x$ — деформацию, выраженную через перемещение $u$, рассматриваемую проблему выразим следующими уравнениями:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \sigma = \sigma(\varepsilon), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \tag{4.36}$$

Л. Доннелл (Donnell [1930, 1]) в 1930 г. предложил малые волновые скорости пластического деформирования вводить из того условия, что соотношение напряжение — деформация состоит из двух линейных участков, что определяет двухволновую структуру. Предложение Тэйлора решать задачу в эйлеровых координатах и фон Кармана — в лагранжевых, сделанные в 1942 г., сняли это

произвольное ограничение, наложенное на соотношение напряжение — деформация. Функция состояния не считалась заданной априори. Напряжение считалось однозначной функцией деформации, помимо этого, функция отклика, вообще произвольная, считалась вогнутой по отношению к оси деформаций. Тэйлор и фон Карман не принимали во внимание, что пластическое волновое движение является изохорическим; поэтому они не учитывали того, что изохорическое движение одномерной волны в цилиндре сопровождается и поперечным движением и, следовательно, изменением погонной плотности и наличием радиальных ускорений. Отправляясь от первоначальной трактовки Гюгонио дилатационных волн, они рассматривали задачу об ударе с постоянной скоростью распространения волны к концу стержня, находящемуся на конечном удалении. В терминах постоянной волновой скорости они предложили интегралы, которые связывали пластическую деформацию со скоростью частицы и напряжение с деформацией. Введя обозначение $c_p(\varepsilon)$ для постоянной скорости таких волн, значение которой зависело от амплитуды деформаций или скорости частицы, они нашли:

$$c_p(\varepsilon) = \sqrt{\frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big/ \rho}, \tag{4.37}$$

скорость частицы

$$v = \int_0^{\varepsilon} c_p(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{4.38}$$

и напряжение

$$\sigma = \int_0^{\varepsilon} \rho c_p^2\, d\varepsilon. \tag{4.39}$$

Частный вид определяющего соотношения напряжение — деформация мог быть найден только опытным путем. В экспериментах такого рода должны были получаться данные для построения кривых деформация — время и скорость — время для множества точек, взятых по длине стержня.

В динамической линейной теории упругости, когда имеется в виду одномерная теория распространения волн вдоль цилиндра, нужно установить экспериментально постоянство волнового профиля прежде, чем определять численное значение $E$. Аналогично, в динамической пластичности не должно предполагаться дальнейшее развитие теории, но применимость ее должна быть установлена до того, как найдены определяющие соотношения. Более простые теории материалов, особенно те, которые предполагают некоторую симметрию материалов, как, например, изотропность, содержат определенные универсальные соотношения, не зависящие от выбора констант и, в более общем случае, функций. Если эти условия не выполнены, теория оказывается неприменимой, поэтому отпадает необходимость даже пытаться подбирать константы и функции.

Одномерная теория пластических волн в стержнях требует того, чтобы скорость частицы была функцией деформации и чтобы волновые скорости при каждой амплитуде деформации были постоянными. Когда из эксперимента видно, что эти условия выполняются для рассматриваемого твердого тела, функция отклика, определяющая динамическое деформирование, получается непосредственно. Таким образом, экспериментально найденные постоянные волновые скорости, входящие в уравнение (4.39), обеспечивают вид определяющей функции отклика.

Поскольку в течение почти 15 лет после того, как теория была предложена, оказалось невозможным определить либо $\varepsilon(x, t)$, либо $v(x, t)$ в процессе распространения волн, до 1956 г. был принят менее обоснованный подход, состоявший в том, что предположительно принималась некоторая определяющая функция отклика и сравнивались результаты вычисления, выполненные при ее использовании со вторичными эффектами, поддававшимися измерению. Вначале функцию состояния принимали в виде квазистатической функции напряжение — деформация, мало интересуясь тем, откуда она получена. Фон Карман заметил (von Kármán [1942, 1]), что поскольку функция напряжение — деформация, записанная в условных напряжении и деформации, достигает максимума при предельном напряжении, где касательная к соответствующему графику горизонтальна, что дает нулевую волновую скорость, должна существовать согласно формуле (4.38) предельная скорость $v_1$. Она теперь известна «как критическая скорость фон Кармана», при превышении которой наступает разрушение.

Так как считалось, что скорость распространения волны разгрузки более высокая и равна волновой скорости, рассматриваемой в линейной теории упругости, обсуждались две экспериментальные возможности, основанные на квазистатической кривой напряжение — деформация. В первой, осуществленной Полем Дюве (Duwez, Wood and Clark [1942, 1]) в 1942 г., ударяющая масса вызывала быстрое возрастание скорости частиц на одном конце очень длинной медной проволоки. При принятом предположительном виде функции отклика волновые скорости быстро убывали по мере возрастания деформаций. Результатом большой разницы в скоростях была неодинаковость конечных деформаций вдоль проволоки. Если через определенное время эта масса отрывала закрепленный конец проволоки, вызывая быструю волну разгрузки вдоль образца, появлялось фиксированное («замороженное») распределение остаточных деформаций, измеренные значения которых можно было сравнить с расчетными, если была известна функция отклика для конечных деформаций. В противном случае, конечно, никакого вывода сделать было нельзя.

Одна особенность эксперимента, однако, не зависела от выбора $\sigma(\varepsilon)$. Если в эксперименте скорость удара была действительно постоянной, как это считалось, то максимум деформации на весьма

пологом участке графика функции $\varepsilon(x)$ должен был бы появиться в той точке, считая от ударяемого конца, которой одновременно достигли бы скоростная волна этой частной деформации и волна скорости частиц, когда волна разгрузки распространяется в том же направлении. Это стало главным пунктом последующих обсуждений результатов Дюве.

Вторым важным экспериментом, предназначенным для рассмотрения теории пластических волн до того, как оказалось возможным экспериментально построить профили волн, был опыт, выполненный Хопманом (Hopkapп [1947, 1]) в 1947 г. Насколько мне известно, его опыт был первым и единственным, в котором эксперимент Данна использовался для получения информации, связанной с предсказанием по достоверной теории волн конечной амплитуды. Движущаяся вниз по направляющим ударной машины «гильотинного» типа длиной 80 футов, падающая масса, к которой прикреплялся образец с дополнительным грузом на противоположном конце, ударялась о наковальню, в которой было отверстие достаточной величины для того, чтобы через него мог упасть образец с дополнительным грузом. Между ударником и грузом в последовательном соединении с образцом находился стержень, снабженный датчиком сопротивления, который обеспечивал, по ставшей уже стандартной процедуре, получение кривой усилие — время. В дополнение к этому синхронное искровое записывающее устройство, генерируя сигналы и передавая их на восковую бумагу, прикрепленную к вращающемуся диску, записывало кривую перемещение — время для падающего ударника.

Как и в ранних экспериментах, описанных выше, можно было построить кривые потерянной энергии удара как функции скорости удара. Однако в опытах Хопмана эти кривые использовались для того, чтобы выяснить, уменьшалась ли быстро энергия при скоростях выше $v_1$ (критической скорости фон Кармана), как ожидалось согласно теории. По наклону касательных к квазистатическим кривым напряжение — деформация для сильно тянутого поликристалла, который он изучал, скорость $v_1$ имела значение 47,3 фут/с (15,5 м/с).

Эти эксперименты Дюве и Хопмана заслуживают более подробного рассмотрения. В опытах Дюве устройство для приостановления удара по достижении заданной деформации показано на рис. 4.127. Материал под канавкой V-образного сечения, обозначенный символом $N$, ломался, когда шайба $A$, державшая проволоку, ударяла по стержню $B$. Выбирая расстояние $D$ при известной скорости массы $H$, можно было определить длительность удара или время, в течение которого волна разгрузки проходит по проволоке, вызывая «замороженное» или фиксированное распределение деформаций, поддающихся определению. Несколько лет назад, повторяя опыты Дюве в моей лаборатории, как часть программы изучения ранее выполненных экспериментов по динамической пластичности,

я обнаружил с помощью аппарата оптического определения смещения, что продолжительность поломки шайбы менялась от опыта к опыту и что наблюдалось поддающееся измерению замедление до момента поломки.

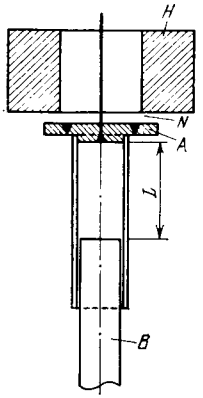



Рис. 4.127. Опыты Дюве (1942). Экспериментальное устройство, использованное для прекращения действия удара по достижении заданной деформации образца.

Для проволоки из отожженной меди длиной 100 дюймов и 0,071 дюйма в диаметре, которую изучал Дюве, взаимодействие волн нагрузки на закрепленном конце затрудняло интерпретацию результатов при ударах большей чем 1,5—2 мс продолжительности [1]). На рис. 4.128 показаны распределения остаточной деформации, измеренной после удара по наблюдениям за изменениями положений отметок на проволоке, первоначально (до деформаций) находившихся на расстоянии одного дюйма друг от друга. Также показана ударная скорость в фут/с, которая вызвала наблюдаемую деформацию. В каждом случае наблюдаемый пологий участок согласовывался с ожидаемым на основе теории волн конечной амплитуды; это поведение не зависело от частного вида функции напряжение — деформация [2]), как было отмечено выше. Для теории оказалось несущественным, была ли угаданная квазистатическая функция напряжение — деформация удачной.

На рис. 4.129 приведены экспериментальные точки (кружки) фон Кармана и Дюве (von Kármán and Duwez [1946, 1]), нанесенные на плоскость $v$—$\varepsilon$ по значениям ударной скорости как функции максимальных деформаций; эти точки сопоставлены с предсказанными значениями, полученными при использовании квазистатической

---

[1]) В статье Дюве и Кларка (Duwez and Clark [1947, 1]) были приведены результаты опытов с холоднокатаной сталью. Я обнаружил, что данные по этому предварительно напряженному твердому телу оказались непредставимыми в виде простой параболической функции напряжение — деформация, вершина графика которой расположена в начале координат.

[2]) Семнадцать лет спустя на симпозиуме по волнам напряжения в 1959 г. Э. Ли дал новое объяснение этим опытам, показав, что на первых 25% протяженности пологого участка графика Дюве могло иметь место небольшое возрастание остаточной деформации (Lee [1960, 1], стр. 221—223 и рис. 15). Л. Эфрон в 1964 г. (Efron [1964, 1]), Малверн (Malvern [1965, 1]) и Эфрон и Малверн (Efron and Malvern [1969, 1]) показали, что функция отклика, зависящая от скорости деформирования, предложенная Малверном и вызвавшая интерес у Ли, при условии, что вычисления на ЭВМ проводились достаточное количество времени, чего прежде не было, предсказывала такой же пологий участок, как и теория фон Кармана — Тэйлора, в которой эта функция считалась независимой от скорости деформирования. Таким образом, факт существования пологого участка вблизи максимальных значений напряжений в экспериментальном графике $\sigma$—$\varepsilon$ не обязательно был связан с чувствительностью теории к произвольному выбору функции напряжение — деформация.

кривой напряжение — деформация (сплошная линия); они считали согласованность удовлетворительной, принимая во внимание природу эксперимента. Поскольку эта теория была справедлива для бесконечно длинных стержней, а в опытах использовались стержни конечной длины, упруго закрепленные на одном конце, ясно, что

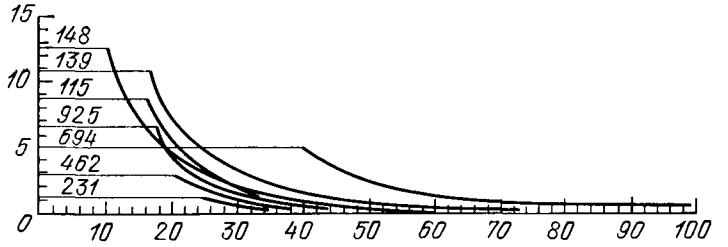



Рис. 4.128. Опыты Дюве (1942). Кривые распределения деформации по длине образцов из отожженной меди, подверженных ударам с различной скоростью (в фут/с), отмеченной на каждой кривой. По оси абсцисс отложены координаты точек образца в дюймах (в начале координат—один конец, при 100 дюймах—другой конец). По оси ординат отложена деформация в %.

пришлось иметь дело с проблемой отражения волн нагружения при ударах большей продолжительности. Попытки учесть это обобщением теории на случай закрепленного конца оказались несостоятельными, чтобы наблюдения истолковать со всей определенностью. Прошло четверть века прежде, чем изучение поверхностей взаимодействия объяснило некоторые сложности этого поведения. Развитию теории в этом направлении должно было предшествовать наличие исчерпывающей информации об определяющей функции напряжение — деформация для отожженной меди.

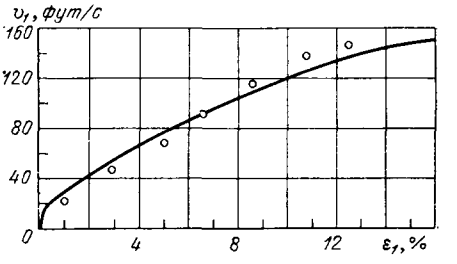



Рис. 4.129. Опыты Дюве (1946). Изменение (в процентах) максимальной остаточной деформации $\varepsilon_1$, измеренной после удара, в зависимости от скорости удара $v_1$ (кружки — результаты экспериментов) в сравнении со значениями, полученными по наклонам касательной к квазистатической кривой напряжение — деформация.

Я сравнил те ранние результаты с предсказанными кривыми скорость удара — максимальное напряжение (см. ниже раздел 4.28), полученными по параболической функции отклика (формула (4.25)), которую я предложил 15 лет спустя на основе непосредственных наблюдений волн конечной амплитуды (Bell [1961, 1], и т. д.). Предсказанные кривые скорость — деформация (сплошные линии) сравниваются с результатами Дюве (кружки) на рис. 4.130 для отожженной меди, а на рис. 4.131 для отожженной мягкой стали, которую также изучал Дюве. В данных, относящихся к меди, установ-

ленные продолжительности удара в миллисекундах, приведенные Дюве, даны в скобках. Следует отметить, что экспериментальное значение деформации в 5% соответствует наибольшей продолжительности, равной 3,37 мс. То, что деформация оказалась больше предсказанной, полностью согласуется с большим влиянием отраженных волн нагружения от заделанного конца.

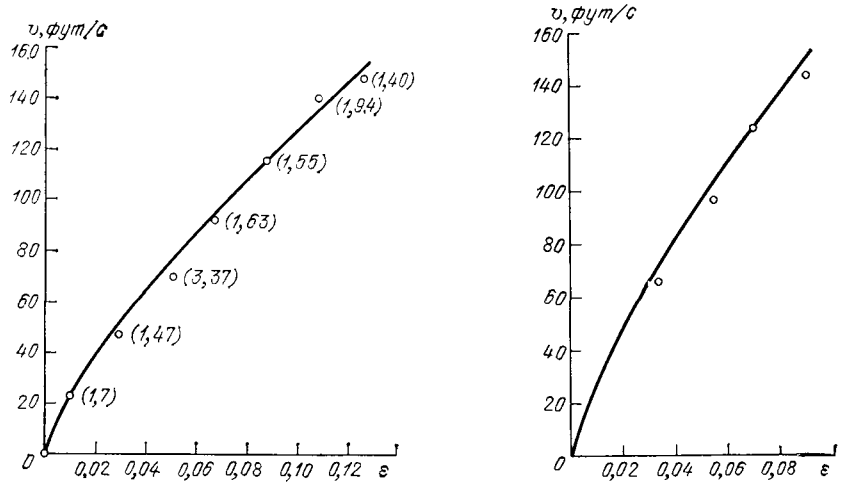



Рис. 4.130. Опыты Дюве (1942). Экспериментальные результаты: зависимость скорость удара — деформация для отожженной меди (кружки) и сопоставление их с данными, полученными на основе параболического обобщения Белла ($r=4$, $\mu(0)=5160$ кгс/мм², $T_m=1358$ К (сплошная линия)). В скобках около экспериментальных точек указана продолжительность удара в мс.

Рис. 4.131. Экспериментальные результаты Дюве (1942): зависимость скорость — деформация в отожженной мягкой стали (кружки) в сравнении с кривой, соответствующей параболическому обобщению Белла (1961) ($r=5$, $\beta=73$ кгс/мм², $\mu(0)=8660$ кгс/мм², $T=1805$ К) (сплошная линия).

На важность отыскания определяющей функции отклика на основе тщательного изучения профилей волн конечной амплитуды было обращено внимание, когда экспериментальные распределения остаточных деформаций фон Кармана и Дюве (сплошная линия на рис. 4.132) при скорости удара 92,5 фут/с и продолжительности в 0,83 мс для отожженной меди были сравнены с предсказанными путем измерения наклонов касательных к их квазистатическим кривым напряжение—деформация (штриховая линия на рис. 4.132). Окончательное распределение деформаций (которое в наше время получается на основе экспериментального очертания профиля волны конечной амплитуды), найденное путем использования параболической функции отклика, согласно формуле (4.25) (кружки на рис. 4.132), применительно к меди дало несколько лучшую согласованность с опытными данными Кармана и Дюве. Бросая ретроспективный взгляд, мы со всей очевидностью отмечаем те ограничения,

которым должны подчиняться априорно угадываемые функции напряжение — деформация в динамической пластичности.

Эксперименты Хопмана 1947 г. проводились с твердой медью (Hoppmann [1947, 1]) [1]), для которой вычисленная критическая

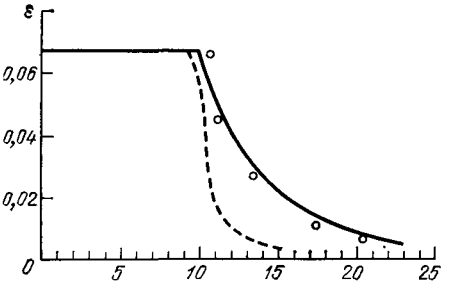



Рис. 4.132. Опыты Кармана и Дюве (1946). Экспериментальное по Дюве распределение по длине образца (сплошная линия) остаточной деформации после удара в сравнении с теоретическими результатами, полученными по наклонам касательных к квазистатической кривой напряжение — деформация (штриховая линия), и с результатами, найденными на основе параболического обобщения Белла (кружки). По оси абсцисс отложены координаты точек образца в дюймах (в начале координат — один конец, при 25 дюймах — другой конец). По оси ординат отложена деформация в процентах.

скорость фон Кармана лежит намного ниже максимальной в этих опытах скорости в 125 фут/с. Хопмановские кривые энергия — скорость удара и измеренное остаточное удлинение — скорость удара,

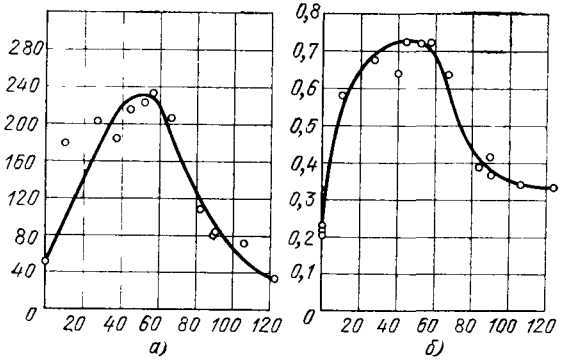



Рис. 4.133. Опыты Хопмана (1947). *а*) Изменение энергии в зависимости от скорости удара в опытах с твердой медью; *б*) изменение удлинения в зависимости от скорости удара в опытах с твердой медью. По оси абсцисс на *а*) и *б*) отложена скорость удара в фут/с; по оси ординат на *а*) — энергия в фунт·фут, на *б*) — общее удлинение в дюймах.

показанные на рис. 4.133, *а* и *б*, наглядно демонстрируют существование максимума вблизи критической скорости фон Кармана, равной 47,3 фут/с и вычисленной по наклону касательной к квазистатической кривой напряжение — деформация для исследуемого материала.

К 1947 г. экспериментальные результаты Дюве (Duwez, Wood and Clark [1942, 1]) и Хопмана (Hoppmann [1947, 1]), хотя и полу-

[1]) После этого Хопман сообщил мне, что он проводил такие опыты с отожженной медью, но более высокая критическая скорость, находившаяся между 150 и 171 фут/с согласно фон Карману и Дюве, обескуражила его, и изучение этого материала в то время было остановлено.

ченные путем экспериментального исследования вторичного явления, а не на основе детального изучения волновых профилей, создали общее убеждение в том, что адекватные теория и эксперимент, использованные совместно, создали фундамент для дальнейшего изучения невязкой динамической пластичности, вероятно, определяемой квазистатической функцией отклика.

Фон Карман и Дюве (von Kármán and Duwez [1946, 1]) наблюдали в экспериментах явление, состоявшее в том, что пластическое деформирование железа не давало остаточных деформаций до тех пор, пока скорости не превышали существенно значение, вычисленное по квазистатическому пределу упругости; явление это позволило перебросить мостик к предыдущим экспериментам и дало толчок к изучению «времени запаздывания», которое и последовало за этим. Часто цитируемое утверждение фон Кармана, что расхождения между экспериментом и предсказаниями по распределению пластической деформации, выполненными на основе квазистатической функции отклика (рис. 4.132), можно объяснить малостью влияния скорости деформирования, оказалось нелогичным ввиду того, что квазистатическая функция отклика, используемая в качестве определяющей функции напряжение — деформация, выбиралась произвольно.

Экспериментаторы сразу отреагировали на эти новые идеи в теории распространения волн серией работ, описывавших эксперименты, проведенные с образцами, для которых отношение $L/D$ было увеличено на порядок значений. Эти эксперименты были нацелены главным образом на изучение возможного увеличения предела упругости при ударном нагружении стали, следуя тому, что наблюдали фон Карман и Дюве в этом материале.

Дальнейшее следование экспериментального метода за теорией волн конечной амплитуды, происходившее еще до 1956 г., когда впервые могли быть изучены профили волн, было представлено экспериментами, выполненными независимо Кэмпбеллом (Campbell [1953, 1]) в Англии и Джонсоном, Вудом и Кларком в США (Johnson, Wood and Clark [1953, 1]). В сущности это были эксперименты Гопкинсона (B. Hopkinson [1914, 1]) 1913 г. со сжатым стержнем, проанализированные в свете существовавшей уже к 1950 г. теории волн конечной амплитуды и улучшенные введением электротензометрии с датчиками сопротивления вместо датчиков Гопкинсона, но все еще включавшие косвенные измерения при распространении волн.

Сравнительно длинный образец, предназначенный для пластического деформирования, должен был столкнуться аксиально с гораздо более длинным жестким стержнем. Поскольку при этом предел упругости материала жесткого стержня не превышался, электротензометрические датчики сопротивления обеспечивали путем применения элементарной линейно-упругой теории построение кривой напряжение — время для стержня, игравшего роль нако-

вальни. Измерения диаметров образцов до и после удара давали результаты, сопоставимые с теоретическими, в основу получения которых было положено предположение о том, что для материала мягкого стержня коэффициент Пуассона равен 1/2. Зависимости напряжение — деформация находились на основе опытных данных, полученных при испытании многих образцов, каждый из которых испытывал удар со своей собственной, отличной от других, скоростью. Максимальная скорость в жестком стержне после такого несимметричного удара вычиталась из измеренной скорости образца до удара, что давало значение максимальной скорости частицы в пластически деформирующемся образце.

Материалом образца был коммерчески чистый поликристаллический алюминий, отжигавшийся после механической обработки в течение двух часов при 670 °F. Стержень-наковальня был из фосфористой бронзы одинакового с образцом диаметра и имел длину в 88 дюймов, в противоположность образцам, которые имели длину, равную либо 23 дюймам, либо 43 дюймам. В этих опытах, так же как и в почти таких же опытах Колски и Дуча (Kolsky and Douch [1962, 1]) [1]), проведенных 9 лет спустя, общий вывод, полученный сравнением максимального напряжения в стержне-наковальне с максимальной остаточной деформацией в образце после удара при различных скоростях удара состоял в том, что распространение пластических волн в отожженных твердых телах может быть аппроксимировано кривой напряжение — деформация. В результате проведения этих опытов обнаружилось, что кривая напряжение — деформация при ударе лежит выше квазистатической кривой отклика для этого же твердого тела.

Экспериментальные результаты Джонсона, Вуда и Кларка (Johnson, Wood and Clark [1953, 1]) для зависимостей напряжение — скорость и напряжение — максимальная остаточная деформация показаны на рис. 4.134, *а* и 4.134, *б*.

Измеряя и возводя в квадрат тангенсы углов наклона касательных к кривой напряжение — скорость, изображенной на рис. 134, *а*, и вводя эти значения в уравнение

$$\varepsilon_1 = \int_0^{\sigma_1} \frac{\rho\, d\varepsilon}{(d\sigma/dv)^2},$$

авторы получали кривую $A$ напряжение — деформация, изображенную на рис. 4.135, которую можно сравнить с кривой $B$, постро-

[1]) Колски и Дуч использовали (Kolsky and Douch [1962, 1]) стержень-наковальню из стали увеличенной твердости вместо фосфористой бронзы и исследовали серию образцов с длинами в диапазоне 6—12 дюймов. Повторяя опыты Джонсона, Вуда и Кларка 1953 г., Колски и Дуч в 1962 г., помимо отожженного алюминия (изучавшегося Джонсоном, Вудом и Кларком), проводили опыты и с отожженной медью.

енной по измерениям остаточной деформации и квазистатическим кривым $C$ и $D$.

Нельзя сколь-либо обоснованно считать то, что динамическая кривая напряжение — деформация расположилась выше квазистатической вследствие применения графических способов при построении кривой $A$. Неблагоприятными воздействиями, оказываемыми на результат, были: нестрогое предположение о том, что остаточная деформация $\varepsilon(x, \infty)$, после того как волны разгрузки

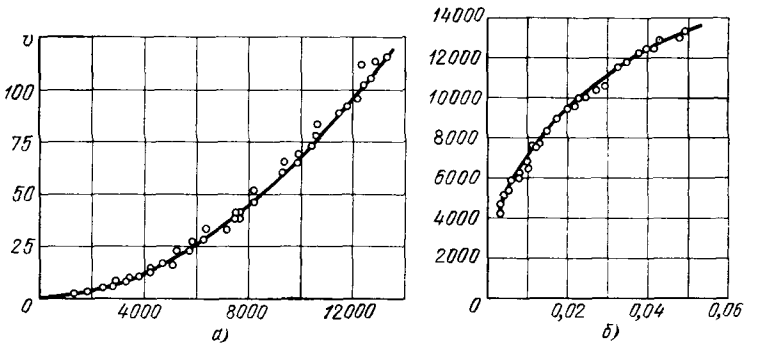



Рис. 4.134. Опыты Джонсона, Вуда и Кларка (1953). *а*) Ударное напряжение как функция скорости; по оси абсцисс отложены ударные напряжения в фунт/дюйм², по оси ординат — скорость удара в фут/с; *б*) ударное напряжение как функция максимальной остаточной деформации после удара. По оси абсцисс отложена максимальная остаточная деформация, по оси ординат — напряжение при ударе в фунт/дюйм².

прошли через образец, равнялась неизмерявшейся действительной максимальной деформации на фронте волны; допущение об отсутствии влияния эффекта трехмерности зарождавшихся волн на измеренные значения $\sigma(0, t)$ на ударной поверхности в начальной стадии удара; допущения о возможности рассмотрения результатов измерений в радиальном направлении как информации для определения продольной деформации при наличии радиального стеснения, оказываемого стержнем-наковальней на ударной поверхности, и предположение о пренебрежимости влиянием трения, имеющего место на поверхности контакта.

Понимая, что они имеют дело с образцом конечной длины, Джонсон, Вуд и Кларк выполнили графическое решение, как это было предложено ранее фон Карманом, Боненблюстом и Хайерсом (von Kármán, Bohnenblust and Hyers [1942, 2]) и Боненблюстом, Чариком и Хайерсом (Bohnenblust, Charyk and Hyers [1942, 1]). Они построили графики, показанные на рис. 4.136, в лагранжевых координатах, по которым проводилось сравнение кривых напряжение — время на ударной поверхности, полученных на основании вычислений (штриховая линия, рис. 4.137) с кривыми, интерполирующими экспериментальные точки, относящиеся к стержню-наковальне (Johnson, Wood and Clark [1953, 1]).

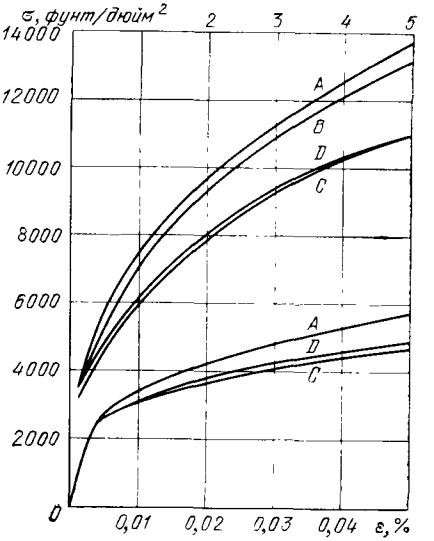



Рис. 4.135. Опыты Джоисона, Вуда и Кларка (1953). Диамические соотиошеиия напряжение — деформация, построение которых выполнено при указанных иижe условиях, в сравиении с даиными квазистатических опытов при двух скоростях деформирования. *A* — кривая иапряжение — деформация, построеииая путем использования кривой иапряжение — скорость, *B* — то же — путем использования кривой напряжение — пластическая деформация, *C* — то же по статическим измерениям, *D* — то же при скорости деформироваиия 0,040 в минуту.

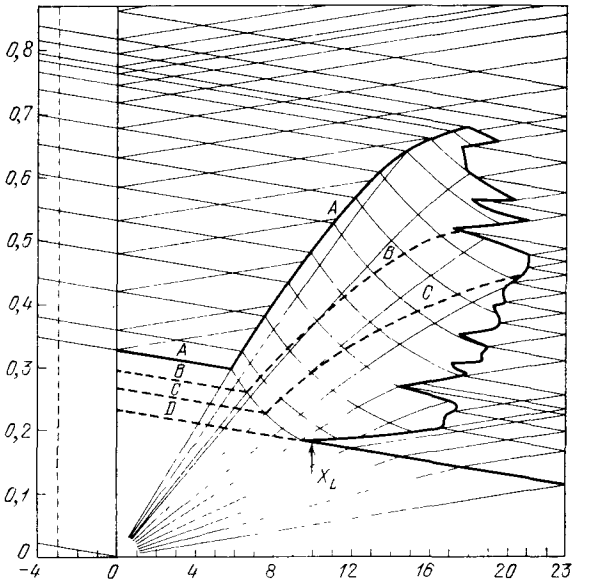
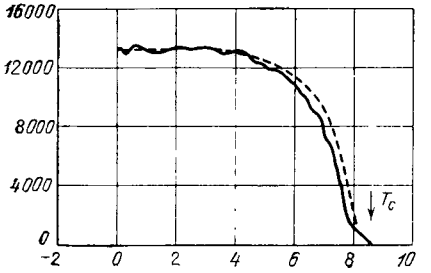



Рис. 4.136. Лагранжева диаграмма Джоисона, Вуда и Кларка (1953), осиоваиная на полученной ими динамической кривой иапряжение — деформация; $x_L$ означает положение линии полиого поглощеиия первой отраженной волиы по экспериментам Белла, выполиениым в 1961 г. и на основаиии теории Ли 1953 г. По оси абсцисс отложено расстояиие в дюймах; *A*, *B*, *C*, *D* — границы пластического гистерезиса, им соответствеиио отвечают ударные напряжения в фуит/дюйм²: 13,400; 9,500; 7,500; 3,850. По оси ординат отложеио время в мкс.

Результаты с нагружающим стержнем, показанные на рис. 4.138, были получены Колски и Дучем в 1962 г. Здесь нанесены точки для стержня-наковальни на плоскости чертежа в системе осей напряжение — остаточная деформация [1]). Сплошная линия согласуется с



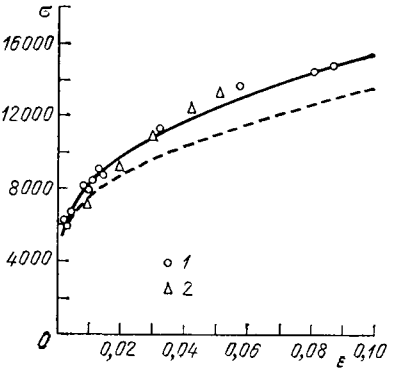




Рис. 4.137. Опыты Джонсона, Вуда и Кларка (1953). Экспериментальная кривая (сплошная линия) напряжение — время, отвечающая поверхности удара, в сравнении с предсказанной экспериментаторами расчетной, полученной согласно рис. 4.136 (штриховая линия). Добавлена продолжительность контакта, $T_C$, предсказанная Беллом в 1961 г. на основе его параболического обобщения. По оси абсцисс отложено время в мкс, по оси ординат — напряжение в фуит/дюйм$^2$.

Рис. 4.138. Опыты Колски и Дуча (1962). Результаты, относящиеся к нагружающему стержню из отожженного алюминия, сопоставленные Беллом с результатами Джонсона, Вуда и Кларка; сплошная линия — динамическая кривая, штриховая линия — статическая кривая; *1* — экспериментальные точки (Колски и Дуч (1962)), *2* — экспериментальные точки (Джонсон, Вуд и Кларк (1953)); по оси абсцисс отложена деформация $\varepsilon$, по оси ординат — напряжение $\sigma$ в фунт/дюйм$^2$.

результатами моих опытов с нагружающим стержнем, выполненных в 1960—1961 гг.

Как только определяющая функция состояния стала известной из моих прямых наблюдений профилей волн конечной амплитуды в процессе их распространения, этот опыт с нагружающим стержнем и всеми сопутствующими ему допущениями стал представлять интерес как пример несимметричного удара (Bell [1960, 3], [1961, 1, 4], [1963, 2], [1968, 2], [1969, 1]).

Первым экспериментатором, который попытался определить соотношение напряжение — деформация на основе измерения профилей волн конечной амплитуды, был Уильям Кэмпбелл (Campbell [1951, 1], [1952, 1]). В этом исследовании я обычно опускаю рассмотрение «предположительных» исследований, которые в действи-

[1]) Колски и Дуч [1962, 1] предсказывали конечное распределение деформаций на основе допущения о линейно-упругой разгрузке; следовательно, они пренебрегали поглощением волн разгрузки, предсказывавшимся теорией разгружения Ли (Lee [1953, 1]), и показанным мною опытным путем в 1961 г. (Bell [1961, 3, 4]). Анализ в терминах нелинейной теории дает для максимальных деформаций гораздо большее распространение в глубь образца, чем это получается на основе простой линейной теории (см. ниже разделы 4.29 и 4.34).

тельности являются незрелыми для опубликования результатами. Единственным и заметным исключением является опыт Кэмпбелла конца 40-х гг. XX века, представленный на заседании Общества экспериментального изучения напряжений весной 1951 г. В опыте Кэмпбелла вертикально закрепленный стержень, 0,5 дюйма в диаметре, подвергался растягивающему удару на нижнем конце с помощью падающего груза, как показано на рис. 4.139. Тензометрические датчики электрического сопротивления, исключающие влияние изгиба, наклеивались, располагаясь один от другого на расстоянии 10 дюймов в положениях *I—II* и *III—IV*.

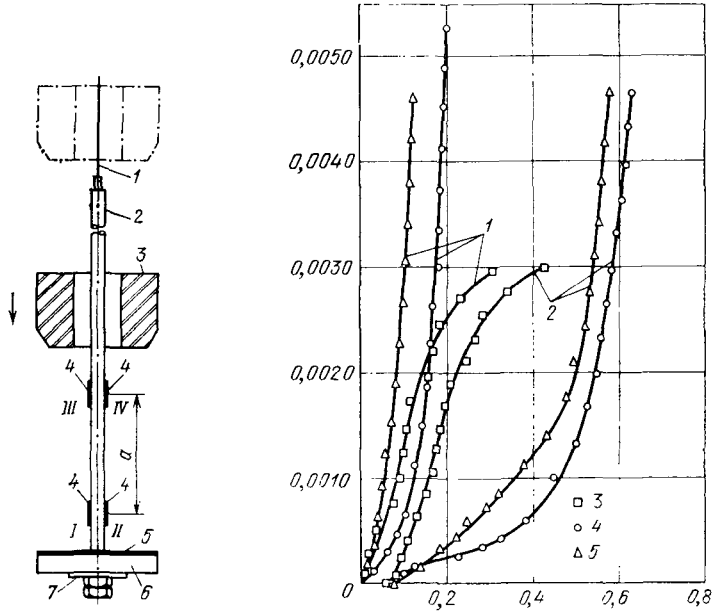



Рис. 4.139. Опыты Кэмпбелла (1951). Аппаратура: *1* — поддерживающая проволока, *2* — медный образец диаметром 0,5 дюйма, длиной 6 футов, *3* — 17-фунтовый груз, падающий с высоты 34 фута, *4* — электротензометрические датчики сопротивления SR-4 типа А-3 (*I—IV* — номера датчиков), *5* — резиновая прокладка, *6* — бакелитовая шайба, *7* — прокладка.

Рис. 4.140. Опыты Кэмпбелла (1951). Профили волн деформаций, полученные с помощью электротензометрических датчиков сопротивления при исследовании меди; *1* — датчики первый и второй, *2* — датчики третий и четвертый, *3* — твердая медь, *4* — мягкая медь, *5* — мягкая медь. Вдоль оси абсцисс отложено время в мкс, вдоль оси ординат — деформация $\varepsilon$.

Деформации в образцах из электролитически отожженной и твердой меди, которые изучал Кэмпбелл (рис. 4.140), были ограничены весьма низкими значениями 0,005 и 0,003 соответственно.

Кэмпбелл не смог оценить того факта, или, по крайней мере, оговорить его, что необходимо установить постоянство скорости волн и однозначность функциональной зависимости измеренной конечной деформации от измеренной скорости частицы, прежде чем иметь возможность определять функциональное соотношение между

конечной деформацией и напряжением. Волновые скорости, даваемые деформационными кривыми в двух положениях, не представляют большой ценности, если экспериментатор не получеат ответа на вопрос, который перед ним стоит, на основе других измерений.

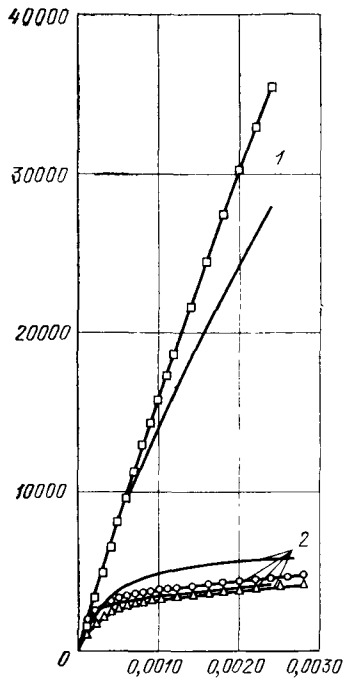



Рис. 4.141. Опыты Кэмпбелла (1951). Кривые напряжение — деформация для твердой и мягкой меди, построенные по волновым скоростям (рис. 4.140), в сравнении с квазистатическими результатами; *1* — твердая медь, *2* — мягкая медь; по оси абсцисс отложена деформация $\varepsilon$, а по оси ординат — напряжение $\sigma$ в фунт/дюйм$^2$.

Утверждая применимость теории Тэйлора — фон Кармана, Кэмпбелл использовал промежуток времени между моментами снятия показаний двух тензометрических датчиков, чтобы подставить скорость волны в формулу (4.39). Сплошные линии на рис. 4.141 представляют собой результаты квазистатических опытов его с твердыми и мягкими медными стержнями.

Кэмпбелл был смущен загадкой — намного более низким расположением динамической кривой напряжение — деформация для отожженного алюминия по сравнению с квазистатической; это наблюдаемое положение он совершенно справедливо считал крайне сомнительным. Он (Campbell [1951, 1], стр. 8) писал: «Думается, что вычисленные напряжения в этих опытах отличаются от достоверных по крайней мере на 25%».

Хотя результаты Кэмпбелла представляют только историческую ценность как первая попытка исследовать кривые конечной деформации в связи с теорией Тэйлора — фон Кармана, существует дополнительная причина, чтобы рассматривать их здесь. Все экспериментаторы после Кэмпбелла, включая меня, выполнявшего опыты в начале 50-х гг. XX века, а также Риппергера, Малверна и др., проводивших эксперименты в разное время с того момента по настоящий, пришли к выводу, что тензометрические датчики, даже те, которые работают удовлетворительно до больших деформаций в квазистатическом случае, ненадежны для изучения динамической пластичности. Это так не только из-за усреднения значений неизвестной функции на участке, имеющем сравнительно большую длину, равную базе прибора и большого разброса этих значений, но также из-за того, что такие измерения неизменно запаздывают и содержат ошибки, лежащие в интервале 5—30% в зависимости от условий и расположения приборов по длине стержня. Это положение

было четко продемонстрировано Гилличем (Gillich [1960, 1]) в 1960 г., в исследовании на соискание ученой степени магистра, описавшим свыше 30 измерений деформации, выполненных с использованием электротензометрических датчиков сопротивления при весьма малой их базе, которые он сравнил с деформациями, найденными оптически [1]) в окрестности тех же точек и на том же образце. Малверн (Malvern [1965, 1]), сравнивая данные, полученные при помощи электротензометрических датчиков сопротивления с результатами для скоростей частиц, полученными на основе магнитоиндукционной техники в исследовании 1965 г. совместно с Эфроном, пришел к такому же заключению. То, что я отверг эти измерения в начале 50-х гг. нашего века, было основано на несоответствиях, наблюдавшихся при анализе результатов большого числа экспериментов на удар, которые я проводил в то время.

Эти трудности побуждали меня продолжать в 1952 г. поиски некоторого иного метода для замеров конечных деформаций при распространении волн; я не включил в настоящий обзор рассмотрение многочисленных исследований многих экспериментаторов, которые были основаны на использовании измерений, полученных при помощи электротензометрических датчиков сопротивления в условиях более высоких скоростей деформирования при изучении динамической пластичности.

Осенью 1948 г. я задумал эксперимент [2]), который, как казалось в то время, позволит провести непосредственную экспериментальную проверку применимости квазистатической функции состояния, если нелинейная волновая теория действительно применима. Идея была чрезвычайно простой. Теория волн конечной амплитуды утверждала, что постоянные волновые скорости при заданной большой деформации определялись касательным модулем неизвестной кривой напряжение — деформация. Предварительно квазистатически напрягая длинный образец до желаемой деформации, вводя при этом продольные нарастающие волны нагружения, мы должны бы по результатам измерения волновой скорости находить искомые значения касательного модуля опытным путем. Так как могли быть

[1]) Это были опыты с применением техники дифракционных решеток из серии, которую я выполнил до того, как Гиллич провел свои опыты, используя электротензометрические датчики сопротивления (см. Bell [1960, 2]).

[2]) Может представить некоторый интерес то, что эта идея пришла ко мне во время лекции В. Кэмпбелла в Университете Джона Гопкинса осенью 1948 г., в которой он сообщил о некоторых обескураживающих обстоятельствах в описанных выше экспериментах и особенно в других экспериментах, в которых длинные алюминиевые образцы располагались вдоль желоба, образованного пятьюдесятью соединенными между собой растянутыми дверными пружинами. Будучи тогда молодым профессором, занятым лишь теоретическими проблемами в других областях, я не смог заинтересовать ни одного экспериментатора своей идеей, касающейся эксперимента с нарастающими волнами в длинном предварительно напряженном стержне; это окончилось тем, что я сам принялся за проблему, начав, таким образом, серию экспериментов, которые продолжают еще ставиться, хотя прошло уже около четверти века.

произведены измерения только в условиях волн малой амплитуды, возможно, что ошибки в показаниях электротензометрических датчиков сопротивления, имеющие место при измерении больших деформаций, могли отсутствовать. Действительно, вследствие образования упругого локального островка, на котором располагался электротензометрический датчик сопротивления, время прибытия нарастающих волн, проходивших зону больших пластических деформаций, могло быть измерено без того, чтобы в элементах электрического датчика возникали большие деформации (Bell [1951, 1]).

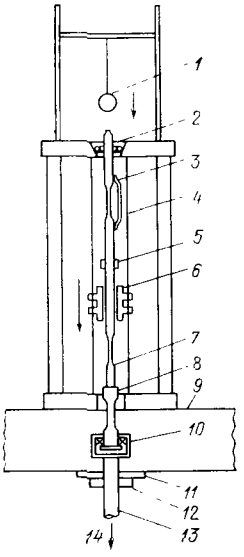



Рис. 4.142. Опыт Белла (1951). Аппарат для исследования возрастающих волн нагружения и волн разгрузки в предварительно напряженных стержнях из мягкой стали. Сила аппарата 10000 фунтов. Цилиндр предназначен для приращений нагрузки, а шар для приращения разгрузки. Предварительно напряженным состоянием было растяжение; *1* — шар, *2* — шарикоподшипник, *3* — прижимная скоба-датчик, *4* — направляющие струны, *5* — датчики деформации, *6* — цилиндр, *7* — испытываемый образец, *8* — нагружающий стержень, *9* — параллельные балки Н-образного сечения, *10* — упорный подшипник, *11* — подгоночная шайба, *12* — нагружающая гайка, *13* — нагружающий винт, *14* — к приводу переменной скорости.

На рис. 4.142 показан механизм, использованный для предварительного напряжения стержня из мягкой стали длиной 6 футов до любого желаемого уровня вплоть до разрушения.

Стальной нагружающий стержень располагается последовательно с образцом на одной с ним оси. Образец и прижимная скоба-датчик, снабженные оба электротензометрическими датчиками сопротивления, претерпевающими малые упругие деформации, обеспечивают измерение квазистатических деформаций и напряжений при предварительном напряжении. Прижимная скоба-датчик 6 дюймов в длину была откалибрована при помощи приспособления, снабженного микрометром. Растяжение стержня достигалось работой мотора с переменной скоростью вращения в совокупности с редукторной системой, причем образец поддерживался шарикоподшипником вверху и опирался на упорный подшипник специального типа внизу. Поскольку напряжения и деформации при квазистатическом предварительном напряжении записывались одновременно на отдельные карты, оказалось возможным варьировать историю нагружения

ручным управлением скоростью вращения, создаваемого приводным мотором.

Нарастающая волна нагружения создавалась полым цилиндром, показанным на рис. 4.142, он скользил по натянутым направляющим струнам и ударял по нагружающему стержню, выполненному из упрочненной стали и прикрепленному к образцу у его нижнего торца. Выдвигая образец через шарикоподшипник, расположенный у верхнего конца образца, можно было вызвать и нарастающий импульс разгрузки ударом падающего стального шара, показанного на рисунке, о верхний торец образца. Предварительно напряженным состоянием было растяжение.

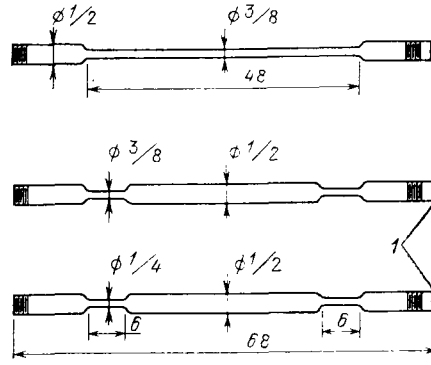



Рис. 4.143. Три из нескольких типов образцов Белла, испытывавшихся в 1951 г.; *1* — упрочненные концы. Все размеры даны в дюймах.

Первые опыты, проведенные летом 1949 г., показали, что как для волн нагружения, так и для волн разгрузки при всех значениях предварительного напряжения, доводимых почти вплоть до разрушающего образец уровня, скорость нарастающей волны была скорее такой же, как у упругого стержня, $c_0=\sqrt{E/\rho}$, а не той, которая ожидалась согласно касательному модулю определяющей кривой напряжение — деформация по теории волн конечной амплитуды.

Чтобы убедиться в том, что неожиданное экспериментальное обнаружение нарастающей высокоскоростной волны было вызвано не невидимой малой разгрузкой при квазистатическом предварительном напряжении, я провел опыты с образцами, которые претерпевали нагружение при малой скорости деформирования, когда происходил нарастающий удар. В каждом случае наблюдалась одна и та же скорость упругого стержня. Были применены различные типы образцов, включая те, которые показаны на рис. 4.143, с использованием механизма, изображенного на рис. 4.142.

То, что у образцов были две пластические области — по одной по каждую сторону от линейно-упругой зоны — «острова» и что волновые скорости измерялись расположенными посередине этой зоны электротензометрическими датчиками сопротивления, исключающими влияние изгиба на показания, сняло возможность того, что наблюдавшиеся моменты прибытия волн были как-то связаны со стальной конструкцией испытательной аппаратуры. Полученные результаты показали, не вызывая какого-либо сомнения, что нарастающая волна нагружения в предварительно пластически

напряженном стержне из мягкой стали распространялась со скоростью волны в линейно-упругом стержне независимо от того, насколько большим было предварительное напряжение.

Электротензометрические датчики сопротивления, которые записывали момент прибытия, ни разу не ставились ближе чем на метр от точки удара, так что точность в определении момента прибытия и, следовательно, скорости нарастающей волны была достигнута.

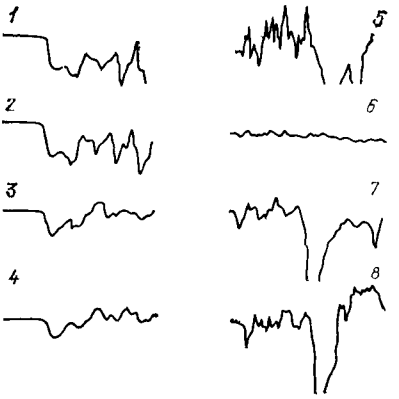



Рис. 4.144. Типичные осциллограммы, полученные Беллом между 1949 и 1951 гг. при различных скоростях удара. Начальный прямой участок давал время прибытия возрастающей волны, по которому определялась скорость волны.

| № | Резкий разгон | Слабый разгон | № |
|---|---|---|---|
| | уровень предварительного напряжения (фунт/дюйм$^2$) | | |
| 1 | 7 500 | 30 000 | 5 |
| 2 | 12 000 | 88 000 | 6 |
| 3 | 84 000 | 100 000 | 7 |
| 4 | 118 000 | 111 000 | 8 |

Хотя в 60-е гг. XX века электронные сигнально-пусковые приборы стали стандартным осциллоскопическим устройством, в 1949 г. запуск переключения в момент удара представлял еще значительные трудности. Не считая изготовления шестифутовых образцов, это была самая трудная проблема, встретившаяся в данном эксперименте. На рис. 4.144 показаны некоторые из множества осциллограмм для нарастающих волн нагружения, демонстрирующие независимость момента прибытия волны от величины предварительного напряжения.

Интересное явление, наблюдавшееся при высоких скоростях и представленное на рис. 4.144, при уровне предварительного напряжения, равном 88 000 фунт/дюйм$^2$, состояло в подавлении сложных отраженных и распространяющихся волн, которые последовали за фронтом начальной волны при данном уровне предварительного напряжения. Когда напряжение доводили до еще более высокого уровня, амплитуды пакета волн снова возросли, как это показано на рис. 4.144. Интерес представлял также сдвиг базы колебаний с возрастанием деформаций. К счастью, сложное поведение проявлялось тогда, когда желаемая информация о волновой скорости была уже записана.

Результаты этого открытия (Bell [1951, 1]), которые я описал в 1951 г., в то время казались противоречащими принятой одномерной теории пластических волн. В 1953 г. Рубин (Rubin [1953, 1],

[1954, 1]) выдвинул идею, что поведение нарастающей волны, описанное мною, согласуется с предложенной Малверном (Malvern [1951, 1]) функцией, связывающей напряжения и деформации в условиях одномерного напряженно-деформированного состояния и зависящей от скорости; идея эта, как явно показали опыты 60-х гг. нашего века, оказалась несостоятельной [1]). Результаты опытов с волнами конечной амплитуды в 50-е и 60-е гг. XX века показали, что одномерные функции отклика малверновского типа здесь не применимы. Фронт большой линейной волны, за которым, как считалось, пластическая деформация увеличивается, не наблюдался в каких-либо кристаллических телах. В 1951 г. Хан [2]), в то время студент Корнелльского университета, провел аналогичные опыты по нарастающим волнам в меди и расширил первоначальное открытие, показав, что высокая скорость нарастающей волны не была присуща мягкой стали, в которой наблюдались аномалии с пределом упругости при низких скоростях деформирования.

Карлос Рипарбелли (Riparbelli [1953, 1]) оценил важность эксперимента с нарастающими волнами для создания определяющих соотношений в динамической пластичности. Он упросил Штернгласса и Стюарта (Sternglass and Stuart [1953, 1]) из Отдела инженерных материалов Корнелльского университета, а также Дж. Бьянки (Bianchi [1953, 1]), в то время студента-выпускника, учившегося на звание магистра по инженерной механике в Корнелльском университете, продолжить изучение нарастающих волн. Бьянки в 1953 г. предпринял изучение нарастающих волн в предварительно напряженных полосах длиной в 30 футов из отожженной меди. Штернгласс и Стюарт в 1953 г. испытывали плоские полосы 0,5 дюйма шириной и 0,125 дюйма толщиной на стандартной испытательной машине, к которой были добавлены трубы, показанные на рис. 4.145, чтобы можно было исследовать образцы длиной 120 дюймов.

Молот весом 4,7 фунта падал с 8-дюймовой высоты на ударную платформу, прикрепленную к образцу; с помощью электротензометрических датчиков сопротивления Штернгласс и Стюарт на пластически-деформированном образце провели измерения на трех разных расстояниях от ударной платформы. Вначале они изучали влияние изменений веса платформы на растягивающие импульсы нагружения выше точки удара и сжимающие импульсы разгрузки ниже этой точки. Так как их интересовала также дисперсия, выражавшаяся в изменении формы нарастающего импульса, большое значение имела воспроизводимость опыта. Результаты серии измерений показаны на рис. 4.146.

[1]) Bell and Stein [1962, 7].

[2]) Информацию о неопубликованной экспериментальной работе Хана я получил во время чтения вступительной части к работе Джиованни Бьянки (Bianchi [1953, 1]) на степень магистра Корнелльского Университета, из сноски в работе Штернгласса и Стюарта (Sternglass and Stuart [1953, 1], стр. 429), а также из ссылки в работе Рипарбелли (Riparbelli [1953, 1]). Из Корнелльского Университета я не смог получить какую-либо дополнительную информацию об этой работе.

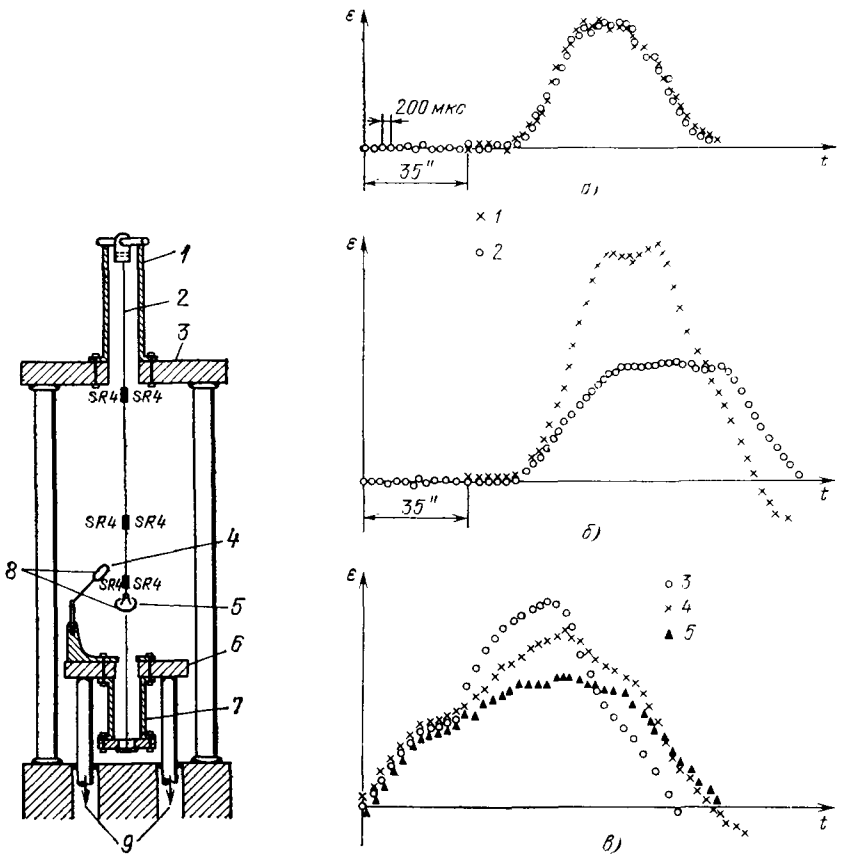



Рис. 4.145. Опыты Штернгласса и Стюарта (1953). Машина Штернгласса и Стюарта для исследования нарастающих волн; *1* — верхняя труба, увеличивающая рабочую высоту машины, *2* — образец, *3* — неподвижный траверс, *4* — молоток, *5* — ударяемая платформа, *6* — нижний подвижный траверс, *7* — нижняя труба, увеличивающая рабочую высоту машины, *8* — пусковой сигнал, *9* — к гидравлическому цилиндру; *SR*4 — марка электротензометрического датчика сопротивления.

Рис. 4.146. Опыты Штернгласса и Стюарта (1953). Результаты исследования нарастающих волн. *а*) Линейно-упругое предварительное напряжение; *1* — 2 дюйма от места удара, *2* — 37 дюймов от места удара, 35″ — расстояние между точками, в которых производились измерения; *б*) пластическое предварительное напряжение; *1* — 2 дюйма от места удара, *2* — 37 дюймов от места удара, 35″ — расстояние между точками, в которых производились измерения; *в*) три последующих положения при предварительном пластическом нагружении: *3* — 1,75 дюйма от места удара, *4* — 11,75 дюйма от места удара, *5*— 26,75 дюйма от места удара. Все записи, полученные при помощи электротензометрических датчиков сопротивления, сдвинуты до совпадения момента прихода фронта волны в сечение стержня с моментом начала импульса. Во всех трех случаях (*а*, *б*, *в*) по оси абсцисс отложено время, по оси ординат — деформация.

Результаты, изображенные на рис. 4.146, *а*, *б*, получены, когда расстояние между точками измерений на образце было равно 35 дюймам, причем первый тензометрический датчик электросопротивления был расположен в двух дюймах от точки удара. Результаты, представленные на рис. 4.146, *а*, получены при уровне предварительного напряжения, равном 9250 фунт/дюйм$^2$; импульс деформации, значение которого было около $200 \cdot 10^{-6}$, перемещался в соответствии с одномерной линейной теорией. Второй импульс был сдвинут во времени, чтобы показать малость наблюдаемой дисперсии. Результаты, изображенные на рис. 4.146, *б*, говорят о том, что там, где предварительное квазистатическое напряжение, равное 36 300 фунт/дюйм$^2$, находилось далеко в пластической области, причем деформации были больше 0,005, аналогичный нарастающий удар вызвал дисперсию, показанную на рис. 4.146, при измерении между теми же двумя точками. Вновь они сдвинули второй сигнал во времени, чтобы импульсы совпали в целях сравнения. В третьей группе результатов, также сдвинутых во времени, причем величина предварительного напряжения не была определена, они сравнили дисперсии импульсов при удалении на 1,75; 11,75 и 26,75 дюйма от точки удара.

Неизвестно, какое влияние динамические импульсы нагружения оказывают на датчики сопротивления, уже находящиеся в результате нагружения в пластической зоне, поэтому не нужно уделять слишком большое внимание количественным результатам Штернгласса и Стюарта. Что касается фиксации моментов прибытия волны, для которых действительные значения амплитуды не играют большой роли, результаты по ним не противоречили моим наблюдениям, выполненным ранее (Bell [1951, 1]) и заключавшимся в том, что в предварительно напряженном твердом теле нарастающие волны распространялись с высокими скоростями.

Результаты экспериментов Бьянки были доложены на симпозиуме по «Пластичности в науке о конструкциях» («La Plasticità nella Scienze delle Costruzioni» в Варенне (Varenna) в 1956 г. и были опубликованы в следующем году (Bianchi [1957, 1]). Этот эксперимент не отличался существенно от экспериментов Штернгласса и Стюарта (Sternglass and Stuart [1953, 1]), за исключением того, что образцы имели форму полос длиной около 8 м из отожженной меди и нагружались грузами с использованием блоков, как показано на рис. 4.147. Удар производился в месте присоединения в некоторой точке полосы, причем для измерения импульсов нагружения и разгрузки применялись электротензометрические датчики сопротивления по обеим сторонам от точки удара, как показано на рис. 4.147.

Заключения Бьянки были подобны тем, к которым пришли Штернгласс и Стюарт: имело место затухание и дисперсия импульса. Большие изменения форм волн были видны при более чем трехкратном увеличении длины образца. Наличие большой длины у полосы при предварительном напряжении позволяло изучить длинный

хвост, тянувшийся за нарастающим импульсом, поскольку отражения от концов образца происходили через гораздо большие промежутки времени.

Под влиянием серьезных вопросов, поднятых Кэмпбеллом (Campbell [1951, 1], [1952, 1]) [1]) относительно использования электротензометрических датчиков сопротивления в исследовании динамической пластичности, я затратил значительные усилия, чтобы сделать длинные образцы, упругая зона («остров») которых находилась бы в середине, так что максимальная деформация в этой части образца, где располагались датчики, не превосходила бы значения, соответствующего пределу упругости. Последующие экспериментаторы не смогли полностью исследовать этот аспект эксперимента в своих работах, и этим объясняется то, что прошло 10—15 лет, прежде чем появились надежные измерения деталей нарастающей волны нагружения.

Первым важным шагом вперед по сравнению с первоначальными опытами был эксперимент Альтера и Картиса (Alter and Curtis [1956, 1]) 1956 г. с предварительно динамически напряженным свинцом. Их свинцовые образцы длиной 13 дюймов и в диаметре 0,5 дюйма были снабжены, к сожалению, электротензометрическими датчиками сопротивления, находящимися последовательно в четырех или пяти позициях, расположенных на расстояниях от

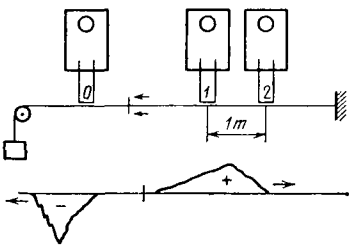



Рис. 4. 147. Опыты Бьянки (1956). Механизмы для исследования нарастающих волн и типичная кривая деформации — время, определенная датчиком (Bianchi [1953, 1], [1957, 1]).

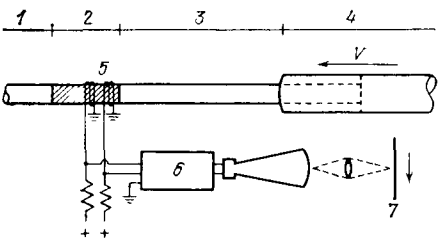



Рис. 4.148. Опыты Альтера и Картиса (1956). Схема исследования нарастающих пластических волн в свинцовых стержнях. *1* — стальной сержень-наковальня, *2* — свинцовый стержень, *3* — стальной передающий удар стержень, *4* — стальной ударяющий стержень, *5* — датчики деформации, *6* — усилитель, *7* — движущаяся пленка.

точки удара, между значениями, равными 0,25 и 3,5 дюйма. Ступенчатый стальной стержень ударял аксиально по образцу. Упругая волна в стержне после отражения от ступеньки возвращалась к образцу в виде нарастающей волны нагружения после того, как в образце образовывалось предварительное динамическое напряжение от первоначального удара. Схема установки и описанной выше процедуры Альтера и Картиса показаны на рис. 4.148.

---

[1]) Максимальные деформации в опытах Кэмпбелла имели тот же порядок значений, что и в опытах Штернгласса и Стюарта, а также Бьянки.

Ударяющий стержень и стержень-наковальня, расположенный на конце свинцового образца, противоположном ударяемому, были каждый 10 футов длиной, чтобы исключить эффекты разгрузки со свободных концов твердых стержней. На рис. 4.149, *а* можно видеть результаты экспериментов, в которых измерения производились в пяти указанных позициях при ударе, осуществляемом при помощи твердого стержня, не содержащего ступенек. Это было тогда предварительным динамическим напряжением, распространявшимся как фронт дисперсионной нелинейной волны конечной амплитуды. Штриховая линия, обозначенная $E$, была линией, наклон которой

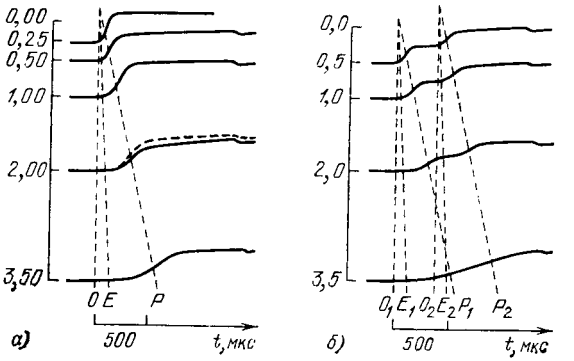



Рис. 4.149. Опыты Альтера и Картиса (1956). Запись зависимости деформация — время: *а*) при одном импульсе, *б*) при двух последовательно воздействовавших на образец импульсах. Измерения выполнялись в указанных на вертикальной оси точках образца, расстояния которых от точки удара даны в дюймах. Время прибытия упругой и пластической волн деформации показано штриховыми линиями. На горизонтальной оси время указано в мкс, цена деления 500 мкс, по оси ординат даны расстояния в дюймах от напряженного конца.

характеризовал скорость в свинцовом упругом стержне, в котором были зафиксированы очень малые начальные деформации. Для скорости, значение которой составляет примерно 15% от скорости линейной упругой волны, штриховая линия $P$ была проведена, по-видимому, через точки, соответствующие примерно средним пластическим деформациям.

На рис. 4.149, *б* показаны результаты аналогичного ударного эксперимента, в котором Альтер и Картис использовали ступенчатый ударный стержень. Хорошо видна ожидаемая двойная волна. Теория Тэйлора и фон Кармана действительно предсказывает, что протяженность площадки между максимумом первой волны и началом нарастания волны должна оставаться неизменной, когда волны конечной амплитуды распространяются вниз по стержню. То, что в эксперименте фронты двух волн соединились, указывает на бо́льшую скорость начального участка нарастания волны. Штриховые линии $E_1$ и $E_2$ указывают моменты прибытия начальных деформаций для каждой волны, хотя вторую трудно отделить от малых изменений максимума первой.

Интересно отметить, что штриховые линии $P_1$ и $P_2$, проходящие через точки, соответствующие средним значениям пластических деформаций, отчетливо показывают меньшую скорость пластических волн, свидетельствуя о том, что вследствие ограниченных возможностей измерения деформаций при помощи таких датчиков отсутствует разгрузочная часть намного меньших максимальных амплитуд импульсов Штернгласса и Стюарта, а также Бьянки. Нарастание

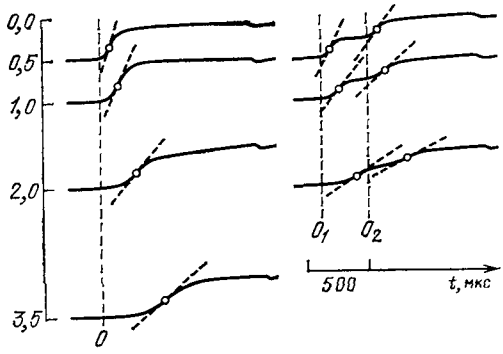



Рис. 4.150. Опыты Альтера и Картиса (1956). Сравнение средних значений наклонов касательной к графику деформация — время на указанных расстояниях от поверхности удара при наличии и при отсутствии нарастающей волны. Точки $O$ и $O_1$ представляют моменты времени удара по поверхности, $O_2$ — момент времени развития импульса на поверхности удара. По горизонтальной оси отложено время (цена деления 500 мкс), на вертикальной оси — расстояние в дюймах от ударяемого конца.

волны, происходящее за главным участком начальной волны, обладало скоростями, значения которых согласовывались со значениями, получаемыми по касательному модулю. Не наблюдалось затухания значения деформации на фронте нарастающей волны, который не разгружался сразу. Этот факт является существенным указанием на то, что в опытах Штернгласса и Стюарта, а также Бьянки имела место разгрузка со стороны, противоположной месту приложения импульса.

На рис. 4.150 сравниваются наклоны линий, соответствующих средним деформациям в опытах Альтера и Картиса при наличии и отсутствии нарастающей волны. Значение скорости волны было ограничено малостью начальной деформации; меньшие скорости волн пластической деформации влияют на деформации выше этого значения. Эти наблюдения [1]) стали главным моментом в экспериментах с нарастающими волнами в 60-х гг. XX века.

После ста лет изучения удара, начиная с середины XIX века, когда проводились опыты в стволах пушек и определялась энергия на основе разрушения цилиндрических образцов, через семь десятилетий XX века варьирования расширенных квазистатических экспериментов Данна, через опыты Дюве и Хопмана по изучению последеформационных вторичных эффектов, через опыты с нагружающим стержнем Кэмпбелла, а также Джонсона, Вуда и Клар-

[1]) Как отмечается ниже, в разделе 4.34, современные экспериментальные и теоретические исследования показали, что эффект Савара — Массона (Портвена—Ле Шателье) не может не приниматься во внимание, когда интерпретируются результаты, связанные с нарастающими волнами в отожженных поликристаллах.

ка и, наконец, вплоть до моих экспериментов с нарастающими волнами и аналогичных опытов Альтера и Картиса, не был достигнут успех в непосредственном изучении профилей волн конечной амплитуды, как того требует полноценное сравнение эксперимента с любой нелинейной теорией. Эта важная веха в изучении динамической пластичности была достигнута в 1956 г. (Bell [1956, 1, 2]).

### 4.28. О непосредственном измерении профилей волн деформаций конечной амплитуды при их распространении: Белл (1956—1972)

Использование Корню в 1869 г. интерференционных колец Ньютона и использование Грюнайзеном в 1906 г. интерферометра продемонстрировали обширные возможности применения интерференционной оптики в изучении деформаций твердых тел. При совершенно ином подходе, но также основанном на оптической интерференции, новый эксперимент в 1956 г. успешно разрешил проблему вековой давности в ударных испытаниях, позволив провести непосредственные и точные измерения профилей волн конечных деформаций в микросекундных интервалах времени (Bell [1956], 1, 2, 3).

Новый эксперимент в принципе был чрезвычайно прост. Угол дифракции разных порядков отражающей дифракционной решетки зависит от расстояния между штрихами. Если, как это происходит при деформации, это расстояние изменяется, то углы дифракции также меняются строго определенным образом. Поэтому наблюдение за угловыми изменениями дифракционных картин при монохроматическом освещении решетки, нанесенной на образце, может обеспечить непосредственное измерение конечных деформаций, когда волна с большой амплитудой проходит через твердое тело.

Этот эксперимент был задуман мною весной 1950 г. перед завершением исследования нарастающих волн. Он был прямым следствием систематического поиска такого опыта, в котором недостатки предыдущих исследований исключались бы путем изучения явления динамической пластичности непосредственно в терминах нелинейной теории, т. е. движущегося диспергирующего фронта волн. То, что понадобилось пять лет непрерывного труда, чтобы получить приемлемые экспериментальные результаты, и еще четыре года, чтобы достичь высокой точности наблюдений, объясняется в основном необходимостью спроектировать и изготовить делительное устройство для получения цилиндрической дифракционной решетки, способное наносить 30 000 линий на дюйм, и потребностью продумать и разработать регистрирующую аппаратуру, способную измерять малые угловые изменения дифракционной картины за микросекундные интервалы.

Для того чтобы получить высокую плотность штрихов на цилиндре, прецизионный станок Риве пятидесятилетнего возраста из мас-

терских университета Джона Гопкинса, первоначально спроектированный для нанесения максимум 241 риски на дюйм, был последовательными стадиями модифицирован, чтобы производить несколько тысяч штрихов на дюйм [1]). В 1954 г. число линий на дюйм, которые удалось наносить на образец, достигало 8400, что представлялось достаточным для измерения профилей волн конечной амплитуды в опытах с цилиндрическими образцами из отожженного алюминия и отожженной меди длиной несколько десятков дюймов и диаметром один дюйм. Я описал результаты первой серии опытов, проведенных с отожженным алюминием в 1956 г. К 1958 г. цилиндрическая делительная машина была дополнительно модифицирована, так что могли наноситься великолепные решетки с числом линий от 30 000 до 35 000 на дюйм (Bell [1956, 1], [1958, 1]). Начиная с этого времени, было изготовлено несколько тысяч образцов из нескольких металлов [2]) и на них нанесена штриховка с плотностью 30 720 линий на дюйм. При таком числе штрихов на дюйм, усовершенствованном методе наблюдения движущихся картин и новой процедуре калибровки, также развитых к 1958 г., точность измерений и гибкость применения метода достигли такого уровня, что экспериментальная техника оставалась после этого неизменной и, по существу, не нуждалась в улучшении в течение четырнадцати лет.

В рассматриваемом эксперименте на цилиндрическом образце на определенном расстоянии от поверхности удара наносилась штриховка при длине линий от 0,0025 до 0,0125 см (в зависимости от длины используемого образца) и плотности 30 720 линий на дюйм. Нормально падающий монохроматический свет с длиной волны 5461 Å давал отражения первых двух порядков под углами 41°18′ по обе стороны от нормали. (При этом числе линий на дюйм возникают только два первых порядка отражений.) Каждое отражение попадало через цилиндрическую линзу, исключающую смещение, в фокус — в V-образную щель, позади которой находился десятикаскадный фотоэлектронный умножитель диаметром 5 дюймов. При конечной деформации изображение двигалось в направлении вершины щели, производя изменение электрического напряжения,

---

[1]) Изматывающий труд, необходимый для создания машины для нанесения решеткн высокой плотности, никогда не преувеличивался темн редкими исследователями, которые приннмались за эту работу. Хотя и имеются некоторые пренмущества у цилиндрической машины перед возвратно-поступательной, все же остается немалое количество недостатков, так что традиционное число «семи демонов» не уменьшается. Безуспешные нанесения рисок при их колнчестве, достигавшем сотен, требовали казавшихся бесконечными модификаций, пока, наконец, не стала систематически получаться нужная штриховка.

[2]) Каждый новый металл требовал определенной затраты времени на экспериментальное определение подходящих радиального давления со стороны алмаза и скорости штрихновки и разработки соответствующих средств для полировки поверхности образца. Эта полировка, выполнявшаяся с помощью серии полировальных порошков, проводилась в осевом направленин, перпендикулярно штрихам.

связанное с изменением углов дифракции $\beta_1$ и $\beta_2$. Измерение двух изображений требовалось потому, что в дополнение к отклонению при прохождении волны, вызванному осевой деформацией, нормаль к поверхности образца испытывала еще и малое отклонение на угол $\alpha$ вследствие поперечного смещения поверхности образца с нанесенной штриховкой, вызванного прохождением волны.

Простыми расчетами получено точное выражение для тангенса этого угла и для деформации $\varepsilon$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta_1-\beta_2}{2}+\theta_0\right), \tag{4.40}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\sin\theta_0}{\sin\left(\frac{\beta_1-\beta_2}{2}+\theta_0\right)\cos\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}-\alpha\right)}, \tag{4.41}$$

где $\theta_0$ — известный угол дифракции перед деформацией.

Поскольку углы наклона поверхности (поверхностные углы) оставались малыми при деформации, меньшей чем 5%, равенства (4.40) и (4.41) можно с достаточной точностью представить в виде

$$\alpha = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}\frac{\cos\theta_0}{1+\cos\theta_0}, \tag{4.42}$$

$$\varepsilon = \frac{\beta_1-\beta_2}{2}\operatorname{ctg}\theta_0. \tag{4.43}$$

Таким образом, для определения [1]) $\alpha$ и $\varepsilon$ достаточно измерить только два угла $\beta_1$ и $\beta_2$. Оставалось связать изменение электрического напряжения с углом, т. е. произвести калибровочную процедуру, выполнявшуюся на месте перед ударом посредством поворота источника света, осуществляемого при помощи прецизионного винта, чтобы создать известный угол падения, наличие которого, а также использование нижеприводимой формулы (4.44) обеспечивало калибровку. Луч света перерезался посредством вращающегося диска, так что достигавшееся абсолютное изменение освещенности от нулевого уровня до максимального могло быть определено с использованием формулы

$$\sin\theta - \sin\alpha = n\lambda m_0, \tag{4.44}$$

где $m_0$ — начальное число линий на дюйм, $n=\pm 1$ — дифракционный порядок.

На рис. 4.151 показан вид аппаратуры для создания симметричного удара при свободном полете двух одинаковых стержней, а на рис. 4.152 — осциллографическая запись двух выходных сигналов фотоумножителя, полученных от фронта волны в полностью отож-

[1]) Насколько мне известно, это определение малого угла $\alpha$ при прохожденни волны было сделано впервые, впоследствии было установлено, что его влияние приближается к влиянию самой измеряемой деформации.

женном алюминиевом образце при максимальной деформации 2,6%. Каждое малое деление на рис. 4.152 представляет одну микросекунду.

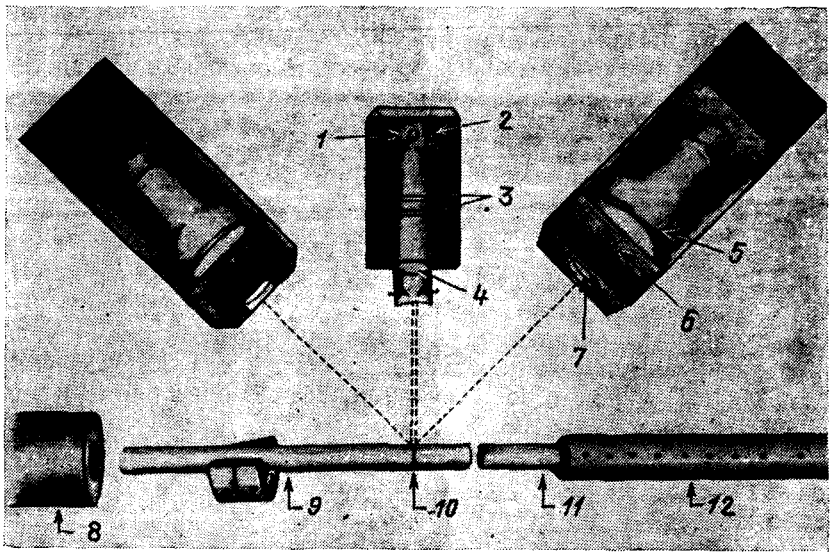



Рис. 4.151. Аппарат Белла для измерений конечных деформаций и угла поворота нормали к поверхности при свободном симметричном ударе образца на основе использования дифракционной решетки; *1* — ртутная лампа, *2* — воздушная струя, *3* — фильтры, *4* — линза, *5* — фотоэлектронный умножитель, *6* — V-образная щель, *7* — линза, исключающая смещение, *8* — тормозная улавливающая труба, *9* — образец, *10* — решетка, *11* — заземляющая щетка, *12* — насадок (с отверстиями).

Недавняя монография (Bell [1968, 1]) и некоторые более ранние работы (Bell [1956, 1, 2, 3], [1960, 1, 2], [1962, 4], [1967, 1]), к которым отсылается заинтересованный читатель, содержат много дополнительных деталей по обсуждаемой измерительной технике [1]).

[1]) Наряду с тем, что эта техника позволила впервые измерить изменения конечной деформации и угла наклона нормали к поверхности (поверхностного угла) за временные интервалы, составляющие доли микросекунды, она имела некоторые другие достоинства, о которых стоит здесь упомянуть (см. Bell [1960, 1]):

1) статические или динамические деформации от нескольких микродюймов до 10% могут измеряться при одном и том же датчике;

2) точные измерения деформаций могут быть проведены при температурах, значительно превышающих 1000°F;

3) в дополнение к измерениям деформации метод может использоваться для одновременного отыскания значения поверхностного угла, градиента деформаций и градиента поверхностного угла как в лагранжевой, так и эйлеровой системах, а также для отыскания абсолютного смещения;

4) возможны измерительные датчики длиной до 0.001 дюйма, хотя в большинстве случаев использовались базы (датчики) от 0,005 до 0,030 дюйма;

5) неизбежная погрешность может быть менее 1%;

В первоначальных опытах 1956 г. удар производился движущейся стальной массой. Хотя эти опыты в то время были пригодны для демонстрации того, что нелинейная теория волн Тэйлора и фон Кармана описывает наблюдавшееся распространение волн конечной

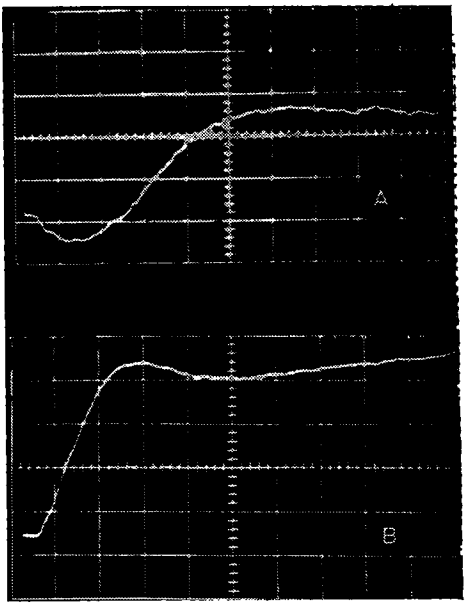



Рис. 4.152. Вывод информации в виде разности потенциалов через фотоэлектронный умножитель в одном из экспериментов Белла по симметричному свободному соударению стержней. Измерения выполнены на расстоянии 1,26 см от ударяемой поверхности алюминиевого стержня длиной 25,4 см и диаметром 2,5 см. Каждое малое деление соответствует одной микросекунде.

амплитуды, я немедленно начал другой эксперимент, который обеспечил бо́льшую возможность исследовать другие разделы теории. В этом эксперименте два идентичных образца подвергались свободному осевому соударению. На ударяемый образец наносилась дифракционная решетка. Поскольку в стержнях возникали и распространялись одинаковые волны, поверхность соударения играла роль абсолютного механического, электрического и термического барьера, не допуская никакой передачи энергии от одного образца к другому, пока не происходила разгрузка от свободных концов.

Начиная с 1960 г. во множестве работ описывались результаты свыше тысячи таких опытов по свободному соударению многих твердых тел как поликристаллических, так и монокристаллов. Обсуждение их здесь ограничивается несколькими иллюстрациями и резюме по опубликованным результатам. На рис. 4.153 можно видеть экспериментальные кривые деформация — время (Bell

6) датчик может быть прокалиброван на месте и, поскольку он неотделим от поверхности, не дает дрейфа нуля каким бы ни был интервал времени;

7) измерение деформаций в движущемся теле или элементе машины может быть выполнено без электрического контакта с движущимся элементом.

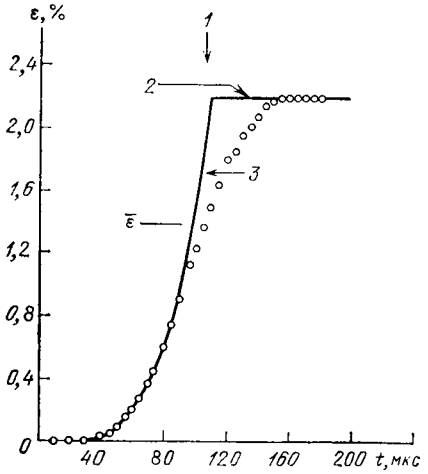



Рис. 4.153. Опыты Белла (1963). Зависимость деформаций от времени при свободном симметричном ударе при 78°F. Экспериментальные данные (кружки) (решетка на расстоянии трех дюймов от ударяемого торца, скорость $v_0$=66,5 фут/с) и расчетная кривая деформация — время (сплошная линия) при параболической зависимости между напряжениями и деформациями; *1* — момент времени возникновения максимального угла поворота нормали к поверхности, *2* — теоретическое значение $\varepsilon_{max}$, *3* — параболический закон напряжение — деформация.

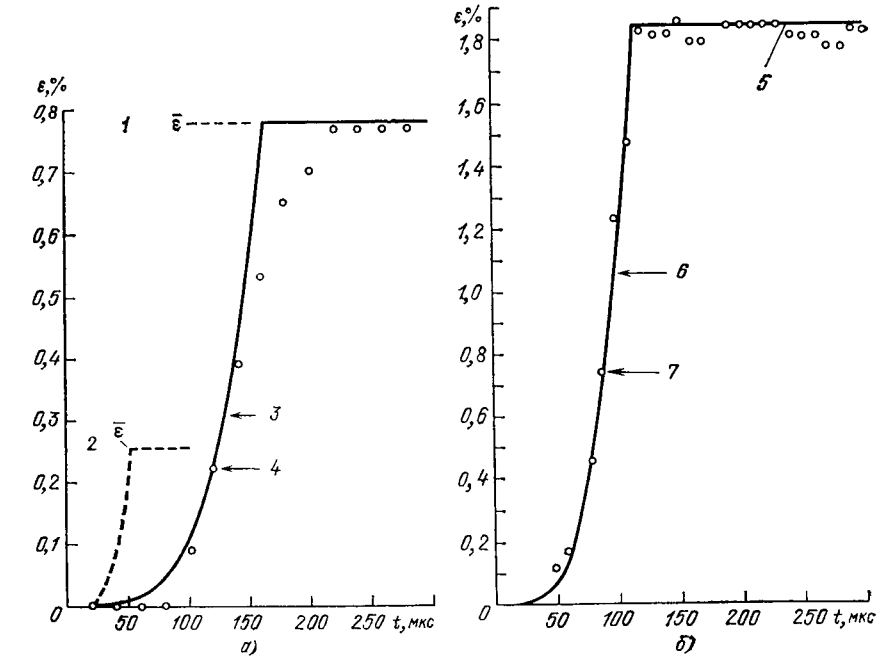



Рис. 4.154. Опыты Белла (1963). Зависимость деформации от времени согласно эксперименту при свободном симметричном ударе и сравнение с расчетными данными при параболической зависимости между напряжением и деформацией. *а*) При 1000 °F (811 К), решетка на расстоянии двух с половиной дюймов от ударяемого торца, скорость $v_0$=19 фут/с; штриховая линия — расчетные данные при комнатной температуре; *1* — теоретическая $\bar{\varepsilon}$ при 1000 °F; *2* — теоретическая $\bar{\varepsilon}$ при комнатной температуре; *3* — расчетная кривая, соответствующая параболическому закону; *4* — экспериментальная точка; *б*) при 790°F (695 К), решетка на расстоянии двух дюймов от ударяемого торца, скорость $v_0$=52,64 фут/с; *5* — теоретическая $\bar{\varepsilon}$; *6* — расчетная кривая, соответствующая параболическому закону; *7* — экспериментальная точка.

[1963, 1]) для симметричного свободного соударения образцов, изготовленных из полностью отожженного алюминия [1]) при комнатной температуре (кружки).

Аналогичное симметричное свободное соударение при температуре 811 К приводило к результатам, показанным на рис. 4.154, *а* (кружки), где штриховая линия соответствует той же скорости соударения, но при комнатной температуре; на рис. 4.154, *б* приведены аналогичные данные, соответствующие температуре 695 К.

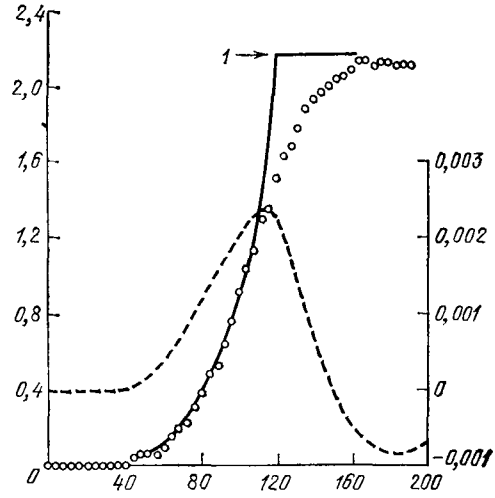



Рис. 4.155. Опыты Белла. Результаты дифракционных измерений деформаций (кружки) в зависимости от времени и углов поворота нормали к поверхности (штриховая линия), выполненных на расстоянии 5,1 см от ударяемой поверхности при симметричном свободном ударе цилиндра длиной 25,4 см и диаметром 2,5 см, и их сравнение с расчетными на основе параболического обобщения при $r=4$ (сплошная линия). Скорость удара составляла 1200 см/с. Материал образца — медь чистоты 99,9%. По оси абсцисс отложено время в мкс, на левой вертикальной оси — деформация в процентах, на правой — угол поворота нормали к поверхности в радианах; *1* — теоретический максимум.

При проведении опытов также с образцами из отожженного алюминия, изменяя другую переменную, я получал результаты при симметричных свободных соударениях, происходящих с разными скоростями, вызывавшими максимальные деформации 1,3; 3,3 и 7,5%. Соответствующие [2]) максимальные скорости частиц были 1337, 2743 и 5000 см/с. Опыты при симметричном свободном ударе образцов с использованием дифракционных измерений были проделаны и с другими материалами; результаты показаны на рис. 4.155—4.157. На рис. 4.155 даны результаты опытов с образцами из отожженной меди, на рис. 4.156 — результаты двух опытов с образцами из $\alpha$-латуни, на рис. 4.157 — результаты четырех опытов с образцами из цинка; кристаллическая структура у этого элемента иная, чем у меди и $\alpha$-бронзы, испытанных в предыдущих опытах.

---

[1]) Это был горячекатаный алюминий с чистотой 99,16%, отожженный в течение двух часов при 1100° F, охлажденный в закрытой печи и проверенный на мелкозернистость.

[2]) Поскольку максимальная скорость частицы при симметричном ударе равна половине скорости удара, начальная скорость соударения образцов равнялась удвоенным указанным значениям.

На рис. 4.156 и 4.157, в отличие от предыдущих иллюстраций, результаты изображены сплошными линиями для того, чтобы коснуться других аспектов проблемы, обсуждаемых ниже. На рис. 4.155 для медного образца штриховой линией представлены данные одновременных измерений поверхностного угла, проводившихся во всех подобных опытах.

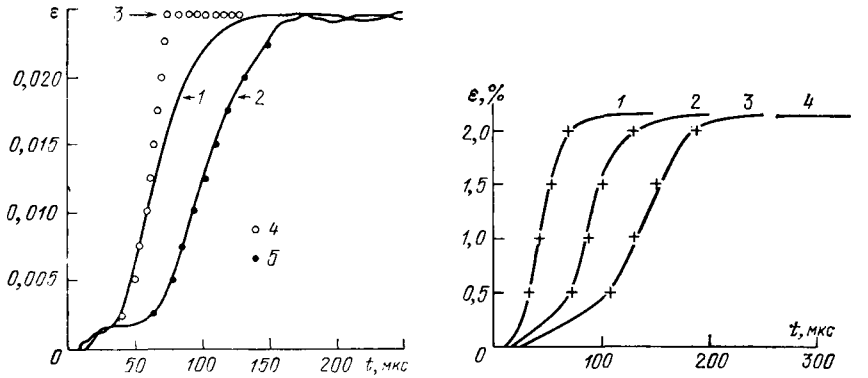



Рис. 4.156. Опыты Хартмана (1967). Продолжительность распространения деформации. Результаты двух дифракционных экспериментов с образцами из поликристаллической 70-30 α-латуни и их сравнение с результатом расчета, выполненного на основе параболической зависимости Белла (при $r=3$); *1* — опыт 1024, *2* — опыт 1046, *3* — теоретический максимум, *4* — расчетная продолжительность распространения фронта волны деформации от ударяемого торца ($x=0$) до точки, удаленной от него на расстояние 3,18 см, *5* — расчетная продолжительность распространения фронта волны деформации от точки, находящейся на расстоянии $x=3{,}18$ см от ударяемого конца, до точки, удаленной от ударяемого конца на $x=5{,}08$ см.

Рис. 4.157. Продолжительность распространения деформации (указанного на оси ординат уровня в процентах) до точки, удаленной от ударяемого торца на расстояние $x$, при ударе с начальной скоростью 1420 см/с. Результаты четырех экспериментов с образцами из отожженного поликристаллического цинка (сплошные линии) (*1* — опыт 1048, $x=1$ дюйм, *2* — опыты 1065 и 1104, $x=2$ дюйма, *3* — опыт 1106, $x=3$ дюйма) и сравнение с ними результатов теоретического предсказания (крестики) для цинка ($\mu(0)=4700$ кгс/мм²) чистоты 99,2% на основе параболической зависимости Белла при $r=2$, осуществленного по результатам для алюминия ($\mu(0)=3110$ кгс/мм²) чистоты 99,2%; *4* — предсказанный уровень $\varepsilon_{max}$.

Измерение конечной деформации в ударных опытах при постоянной скорости обеспечивает определение максимальной деформации, которую можно сопоставить с известной максимальной скоростью частицы, получаемой как половина измеренной скорости удара. Таким образом, меняя скорость соударения и замеряя соответствующие максимальные деформации, можно получить соотношение между скоростью и деформацией. (Обратное, к сожалению, невозможно; отыскание только зависимости скорости от времени — оптически или с помощью магнитной индукции — не дает значений максимальной деформации, необходимых для того, чтобы установить, соответствует ли соотношение между скоростями и деформациями тому, которого можно ожидать, исходя из замеров скоростей волн.)

В качестве дополнительного контроля соотношения между скоростью и деформацией я находил также с помощью оптической техники определения смещений, которая была создана мною в конце

50-х гг. XX века,— фактические кривые изменения скорости во времени для прямого сопоставления с профилями конечной деформации в той же точке. Позднее независимые проверки были выполнены на основе измерений скорости частиц с использованием чередующейся техники Малверном (Malvern [1965, 1]), Уильямом Дж. Гилличем и Уильямом О. Ивингом (Gillich, Ewing [1968, 1]), а также мною (Bell [1965, 1]) [1]).

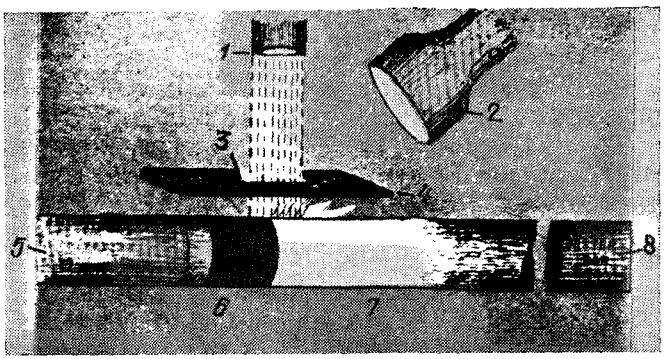



Рис. 4.158. Опыты Белла (1961). Определение перемещений на осиове оптической техники. Схема аппарата Белла 1961 г. для оптического определения перемещений частиц при распространении волны; *1* — ртутная лампа, *2* — фотоэлектронный умножитель, *3* — прямоугольная щель, *4* — светонепроницаемая заслонка, *5* — удерживающий стержень, *6* — черная краска, *7* — белая краска, *8* — ударяющий стержень.

Техника оптических измерений смещений, которую я ввел в 1960 г. для определения профилей скоростей частиц при распространении волны, показана схематически на рис. 4.158.

Одна половина образца окрашивалась неотражающей черной краской, а другая — белой. Когда образец смещался, изменялась доля рассеянного отраженного света, проходящего через показанное на рисунке прямоугольное окошко, что давало меру смещения во времени. Углы наклона касательных к этим экспериментально построенным кривым смещение — время определяли искомую зависимость скорости частицы от времени и профили волны в точке.

Изменения в интенсивности света, производимые смещениями образца, калибровались, чтобы получить зависимости смещений от

---

[1]) Статьи Малверна и моя — обе были представлены на одном и том же симпозиуме. Тот факт, что именно вторая работа, а не первая содержала сравнение между экспериментальными результатами и теоретическими, основанными на использовании установленной мною параболической зависимостн напряжение — деформация, объясняется тем, что Малверн описал свои данные в отчете, изданном ранее, а я использовал отчет, проводя эту специальную независимую проверку. Как раз в это время Малверн, как и я ранее, заключил, что измерения с помощью электротензометрических датчиков сопротивлений профилей конечных деформаций бесполезны для получения результатов, поддающихся осмысливанию.

времени, подобные тем четырем, которые показаны на рис. 4.159 (кружки). Сплошная линия, проходящая через эти точки, является графиком зависимости смещение — время, профиль волны смещения предсказан, исходя из полученных в опыте профилей волны конечных деформаций постоянной скорости.

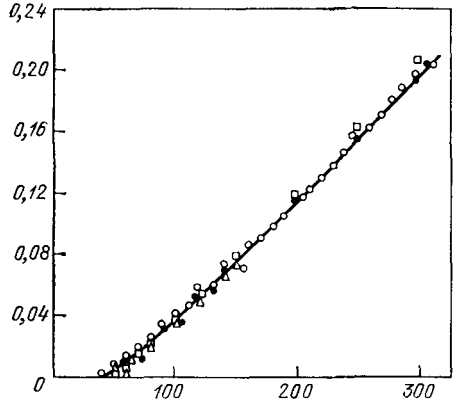



Рис. 4.159. Опыты Белла (1961). Результаты четырех опытов по установлению зависимости перемещения от времени в алюминиевом образце при скорости удара $v_0$=2030 см/с на расстоянии двух диаметров от ударяемого конца и их сравнение с расчетными данными, полученными на основе нелинейной волновой теории (сплошная линия). Вдоль оси абсцисс отложено время в мкс, вдоль оси ординат — смещение в дюймах.

Таким образом, все параметры волн конечной амплитуды, будучи замерены непосредственно, были получены без какой-либо априорной ссылки на условия нелинейной теории волн, предсказываемые решением на основе теорий Тэйлора и фон Кармана. Оба профиля — конечная деформация — время и скорость частицы — время — были получены замерами в одной и той же точке, включая и замеры максимальных значений каждой из величин. То, что скорость частицы является однозначной функцией конечной деформации $v(\varepsilon)$, а скорость волны $c_p(\varepsilon)$ постоянна для каждого значения деформации при прохождении волны в отожженных поликристаллах, было подтверждено измерением обеих величин в одной и той же точке в процессе распространения нелинейной волны. Два условия теории были даны выше в разделе 4.27 равенствами (4.38) и (4.37). После того как без предварительных допущений было показано, что теория применима, интегрирование уравнения (4.39) без дополнительных предположений давало определяющее соотношение напряжение — деформация. Было установлено, что для каждого из испытывавшихся отожженных материалов это — параболическое соотношение (4.25) при $\varepsilon_b$=0 (см. выше раздел 4.21) [1].

[1]) Соотношение (4.25) раздела 4.21 было дано, исходя из анализа квазистатических функций отклика в тех же отожженных металлах. Однако, как это было отмечено выше, исторически последовательность получения результатов была такой: сначала я открыл эту параболическую функцию на основе экспериментов по распространению волн, последующими же исследованиями я показал, что она описывает также и квазистатические зависимости напряжение — деформация при гораздо меньших (от 10 000 до более чем в 100 000 000 раз) скоростях деформаций.

В 1957 г. Вальтер Рамберг и Ирвин (Rumberg, Irwin [1957, 1]) предложили метод измерения временной зависимости скорости с помощью электромагнитного преобразователя. Эта техника была использована в 1960 г. Бьянки (Bianchi [1960,1]) в новой серии экспериментов по нарастающим волнам (раздел 4.34) и Риппергером и Л. М. Икли (Ripperger and Yeakley [1963, 1]) в 1963 г. в опытах по малым деформациям при распространении линейно-упругой волны. В 1964 г. Л. Эфрон (Efron [1964, 1]), докторант Малверна в университете штата Мичиган, в 1965 г. Малверн (Malvern [1965, 1], Efron, Malvern [1969, 1]), а в 1968 г. Гиллич и Ивинг (Gillich, Ewing [1968, 1]) использовали эту технику для проведения независимой проверки моих предыдущих оптических наблюдений за профилями скорость — время при распространении волны конечной деформации в отожженных поликристаллах.

В опыте Малверна и Эфрона образцы в четырех разных местах обвивались изолированной проволокой. В ней индуцировалось напряжение, когда при прохождении фронта волны скорости частиц образца вызывали движение в калиброванных магнитных полях. Малверн и Эфрон не провели опыта по симметричному свободному соударению, поскольку ударяющий стержень был сделан из стали, в то время как образцы, с которыми выполнялись опыты,— из алюминия технической чистоты; они представляли собой стержни диаметром 1/2 дюйма и длиной 58 дюймов. В отличие от полностью отожженного алюминия, использовавшегося в моих опытах (отжиг в течение двух часов при 1100°F и охлаждение в печи), для которого предел упругости был $Y=1100$ фунт/дюйм$^2$, их образцы отжигались один час при значительно меньшей температуре, равной

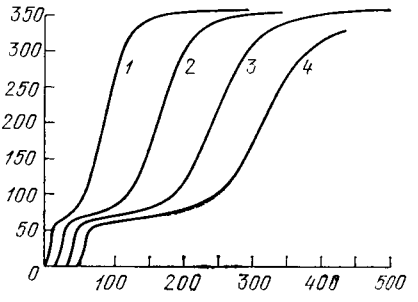



Рис. 4.160. Опыты Малверна и Эфрона (1964). Данные по индукционным измерениям скоростей частиц тела в образцах из алюминия. Типичные графики зависимости скоростей частиц от времени в различных позициях по длине образца, определяемых расстоянием $x$ от ударяемого торца; *1* — $x=3{,}000$ дюйма, *2* — $x=6{,}250$ дюйма, *3* — $x=9{,}575$ дюйма, *4* — $x=12{,}725$ дюйма. По оси абсцисс отложено время в мкс, по оси ординат — скорость частицы тела в дюйм/с.

650°F, и также охлаждались в печи. Получаемый в результате предел упругости был гораздо выше ($Y\approx3800$ фунт/дюйм$^2$). Их первый датчик находился в трех дюймах (шести диаметрах) от ударяемой поверхности. Последующие датчики располагались примерно через 3,25 дюйма. Малверн и Эфрон в каждом испытании получали четыре профиля скорости, показанные на рис. 4.160.

Из наблюдавшегося постоянства скорости волны в этой области, существенно удаленной за пределы участка, длина которого, изме-

ряемая от ударяемой поверхности, равна длине диаметра (последний замер проводился на расстоянии 25 диаметров от поверхности удара), они путем усреднения результатов многих испытаний определили зависимость скорости волны от скорости частиц, график которой (сплошная линия) показан на рис. 4.161.

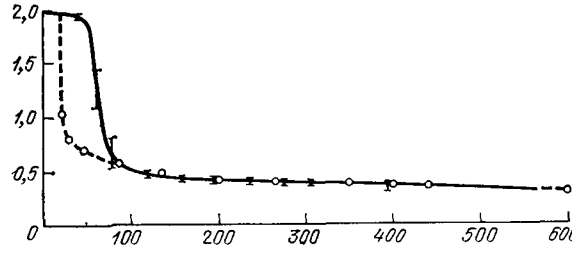
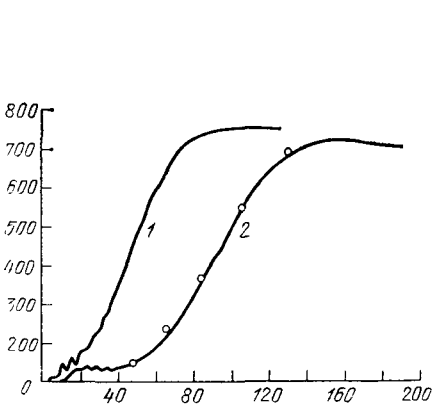



Рис. 4.161. Опыты Эфрона и Малверна (1964). Зависимость волновой скорости от скоростей частиц, полученная на основе индукционной техники (сплошная линия, динамический предел упругости 3200 фунт/дюйм²), и сравнение с расчетными значениями по данным дифракционных измерений деформаций, выполненных Беллом (кружки и штриховая линия; динамический предел упругости 1100 фунт/дюйм²). По оси абсцисс отложена скорость частиц образца в дюйм/с, по оси ординат — волновая скорость $[c_p$, дюйм/с$] \cdot 10^{-5}$.

Как указано выше, по одному лишь профилю скорости частицы можно проверить только постоянство скорости волны при использовании теории волн конечной амплитуды. Без одновременного измерения деформации второе условие теории, а именно, что скорость частицы является функцией деформации, установлено быть не может, не говоря уже о том, что не может быть найден и вид этой функции. В данном случае, однако, для отожженного алюминия мною были ранее получены и профиль скорости частиц, и профиль волны конечной деформации, и потому новые данные можно было обсудить в терминах нелинейной теории. Малверн и Эфрон не сравнивали свои результаты с моими измерениями и отметили только, что действительно, как было обнаружено мной еще в 1956 г., скорость волны в отожженном алюминии постоянна. Такое сравнение я провел в 1965 г. (Bell [1965, 1]). Темные кружки на рис. 4.161 отражают предсказанные значения скорости волны при разных скоростях частицы, полученные, исходя из моих предыдущих измерений смещений, проводившихся с помощью дифракционных решеток и оптической техники. Эти значения согласуются с получаемыми для отожженного алюминия при комнатной температуре согласно параболической функции отклика (4.25).

Этот независимый контроль моей ранней работы представлял дополнительный интерес ввиду обнаружения примерно четырехкратного увеличения предела упругости, что для отожженного алюминия свидетельствовало об отсутствии влияния на распространение пластической волны значительных изменений в амплитуде упругого предвестника. Дополнительный независимый контроль обеспечили и аналогичные измерения скоростей частиц с помощью

электромагнитных датчиков, выполненные в 1968 г. Гилличем и Ивингом (Gillich, Ewing [1968, 1]) в баллистической исследовательской лаборатории (Aberdin Proving Ground, Maryland) в опытах с образцами из полностью отожженного алюминия и химически чистого свинца. Ввиду намерения использовать некоторые из результатов, которые я получил десятилетием раньше, их опыты выполнялись на полностью отожженном горячекатаном алюминии и свинце при



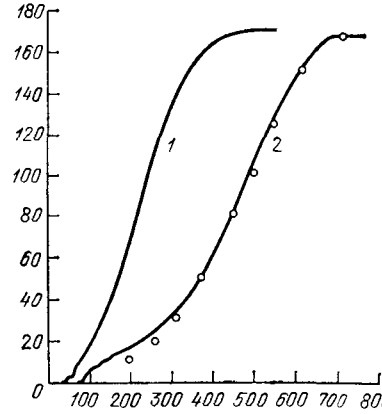




Рис. 4.162. Опыт 51 Гиллича и Ивинга (1968). Зависимости скоростей частиц от времени, полученные в образце из алюминия 1100 при 300 К в двух указанных позициях, определяемых расстоянием $x_1$ от ударяемого торца до точки, в которой наблюдается скорость (сплошные линии). Кружки на второй кривой соответствуют результатам расчетов, выполненных Беллом с использованием его параболической зависимости напряжений от деформаций применительно к отожженному алюминию при $r=2$; *1* — $x_1=1{,}5$ дюйма, *2* — $x_1=3{,}16$ дюйма. По оси абсцисс отложено время в мкс, по оси ординат — скорость частиц тела в дюйм/с.

Рис. 4.163. Опыт 13 Гиллича и Ивинга (1968) с образцом из химически чистого свинца при 300 К. Экспериментальные зависимости скоростей частиц от времени (сплошные линии) в двух указанных позициях, определяемых расстоянием $x_1$ от ударяемого торца до точки, в которой наблюдается скорость (сплошные линии), и их сравнение с результатами расчетов, выполненных Беллом (кружки) с использованием параболической зависимости напряжений от деформаций при $r=4$; *1* — $x_1=1{,}5$ дюйма, *2* — $x_1=3{,}16$ дюйма. По оси абсцисс отложено время в мкс, по оси ординат — скорость частиц тела в дюйм/с.

свободном симметричном соударении. На рис. 4.162 показаны два графика зависимости скорости от времени для отожженного алюминия (сплошные линии). Кружки, добавленные мной соответственно второму графику, отмечают продолжительности пробега волны от первой до второй позиции, полученные на основе моего исследования профиля волны в том же материале с помощью соотношения (4.25) для параболической функции отклика при комнатной температуре.

Аналогично, на рис. 4.163 можно видеть столь же близкое соответствие экспериментально найденной зависимости скорости от времени при комнатной температуре расчетным значениям, полученным с использованием параболической зависимости напряжение — деформация для свинца. В данном случае использованы эксперименты Сперраза ((Sperrazza [1961, 1]) также (Sperrazza [1962,

1]) и Белл (Bell [1963, 1])), выполненные со свинцом при использовании дифракционной решетки в его докторской диссертации в 1961 г. По-прежнему сплошные линии представляют экспериментальные результаты в опытах с образцами из свинца, а кружки я добавил, чтобы показать те моменты времени прихода волны во вторую позицию, которые предсказываются с использованием уравнения (4.25), при $r=4$ на основе измеренных данных (профилей волн) для первой позиции в том же материале.

Конечно, эти результаты Малверна с Эфроном и Гиллича с Ивингом лишь подтверждали предшествовавшие опыты по измерениям скоростей частиц, но техника магнитной индукции была предпочтительнее, чем оптический метод измерения смещений, поскольку она определяла скорость частиц непосредственно, и тем самым исключались ошибки, вызываемые дифференцированием функций смещение — время, представленных при помощи графика. Все измерения скоростей частиц в точках, расположенных вдоль образца до опытов Гиллича и Ивинга, выполнялись на поверхности образца. Эти авторы обеспечивали важное расширение предыдущих работ путем сравнения профилей скоростей для проволок, помещенных на поверхности, с усредненными профилями, полученными для проволок, размещенных вдоль диаметра образца. Они добились этого, поместив проволоки в каналы малого диаметра, просверленные в образце.

Мои первые эксперименты, выполненные с образцами из поликристаллического алюминия чистотой 99,16%, отожженного в течение двух часов при 1100 °F, охлажденного в печи и проверенного на размер зерна, позволили обнаружить, что скорость волны постоянна для каждой деформации (Bell [1960, 2]) [1]). Поскольку требовалось находить профили конечной деформации для большого числа позиций вдоль цилиндрических образцов для каждой из многих скоростей соударения и для образцов различных диаметров, были выполнены сотни опытов, чтобы установить этот наиболее важный факт, что с точностью до долей процента при каждом значении рассматривавшейся скорости деформаций скорость волны действительно была постоянной.

Еще на ранних стадиях исследования, измеряя скорости деформаций и скорости частиц, я наблюдал, что в области протяженностью, равной длине диаметра и примыкавшей к ударяемому торцу образца, распространение волны не было одномерным. Поэтому для любого изучения скоростей волн было существенно проводить измерения, как минимум в трех точках вне участка, примыкавшего к ударяемому торцу и имевшего длину вдоль образца, равную длине

[1]) В 1956 г. (Bell [1956, 1]) опыты на удар при помощи стального ударника были также выполнены с образцами из отожженного алюминия с помощью дифракционной решетки, имевшей 8300 линий на дюйм. Эксперименты, проведенные в 1960 г., были выполнены в условиях симметричного свободного соударения при использовании решетки с 30 720 линиями на дюйм.

его диаметра, поскольку полностью фронт волны формировался вовсе не одномерной резкой ступенью на поверхности удара, как обычно предполагалось; другими словами, фронт на расстоянии, равном длине диаметра, искажался самим процессом инициирования. Для того чтобы установить определяющее соотношение с точностью до трех или большего количества значащих цифр вне участка длиною, равной диаметру, использовалось число точек для измерений, значительно большее чем три. После моих опытов с образцами полностью из отожженного алюминия подобные результаты были получены мной и моими аспирантами в опытах с образцами из отожженной меди, отожженного цинка, свинца, магния, поликристаллической α-бронзы, а также из алюминиевых и медных монокристаллов с известными ориентациями кристаллографических осей относительно направления удара.

Профили волн при заданных значениях деформаций в моих экспериментах с использованием дифракционных решеток охватывали три порядка скорости деформаций и во всей указанной области скоростей это функциональное соотношение оставалось неизменным. Отсюда становилось очевидно, что влияние вязкости было действительно ничтожным. Это заключение выражает собой важный экспериментальный факт (иногда незамечаемый теми, кто мыслит лишь в терминах скоростей волн), состоящий в том, что мера согласованности значений измеренной максимальной деформации с измеренной максимальной скоростью частиц (обе сравнительные величины получены использованием измеренных скоростей волн) является чувствительной мерой несущественности вязкости.

Вследствие постоянства скоростей волн при наличии информации об их значениях, а также и независимого измерения напряжений и скоростей частиц, каждый из параметров в интеграле соотношения (4.38) может быть проверен по формуле

$$v = \int_0^{\varepsilon} c_p(\varepsilon)\, d\varepsilon. \qquad (4.38)\ \text{(повторно)}$$

Как уже отмечалось, соотношение между скоростью и деформацией совместно с постоянством скоростей волн

$$c_p(\varepsilon) = \sqrt{\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\Big/\rho} = \text{const} \qquad (4.45)$$

свидетельствуют о том, что нелинейная теория может использоваться для описания динамической пластичности данного твердого тела без каких-либо предварительных допущений о виде функции отклика.

Поскольку было установлено, что эти два условия применимы к указанным отожженным металлам, появилась возможность, возведя в квадрат и проинтегрировав (4.45), получить прямо из опы-

тов определяющую функцию отклика для конечной деформации

$$\sigma = \int_0^{\varepsilon} \rho c_p^2 \, d\varepsilon. \qquad (4.39) \text{ (повторно)}$$

В каждом из изучавшихся металлов при всех рассмотренных уровнях температуры окружающей среды я обнаружил, как теперь хорошо известно, что экспериментально найденная определяющая функция напряжение — деформация является параболической, имеющей вид $\sigma = \beta\varepsilon^{1/2}$. Возможно, менее известен факт, что также экспериментально я смог разрешить последний остававшийся вопрос, а именно, было ли явление действительно одномерным и изохорическим. Я достиг этого, используя записи изменения во времени поверхностного угла, получавшиеся одновременно в каждом из опытов с дифракционными решетками. Серии из 59 ударных испытаний, выполнявшихся с начала 60-х гг. XX века при одной и той же максимальной скорости частиц 2030 см/с, с использованием решеток, расположенных на четырех разных расстояниях от поверхности удара, показаны на рис. 4.164. Число опытов, по результатам

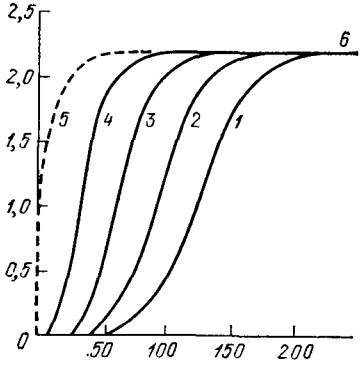



Рис. 4.164. Усредненные данные зависимости деформации от времени, полученные на основе 59 опытов Белла, проведенных в 1960 г., с образцами из полностью отожженного алюминия при скорости удара $v_0 = 2030$ см/с и температуре 300 K (Bell [1967, 2], [1968, 1] и [1960, 2]). Образцы имели длину 25,4 см и диаметр $D = 2{,}50$ см; $x$ обозначает расстояние от ударяемого конца до точки, в которой производились измерения; *1* — $x/D = 4$ (5 опытов), *2* — $x/D = 3$ (7 опытов), *3* — $x/D = 2$ (36 опытов), *4* — $x/D = 1$ (11 опытов), *5* — $x/D = 0$ (экстраполяция по 59 опытам), *6* — уровень максимальной деформации ($\varepsilon_{max}$), найденный теоретически с использованием параболического закона Белла напряжение — деформация при $r = 2$. По оси абсцисс отложено время в мкс, по оси ординат — деформация в процентах.

которых проводилось усреднение, указано в подрисуночной подписи для каждого из представленных графиков. Я отметил, что это — характерные примеры экспериментов с образцами из отожженного алюминия при симметричном свободном соударении. Во всех этих опытах было продемонстрировано постоянство скоростей волны и одинаковый максимум деформации в каждой из точек, расположенных на разных расстояниях от поверхности удара, но за пределами участка, длина которого равна длине диаметра образца.

Мой анализ был следующим. Приняв изохоричность движения, имеем до и после деформации

$$\pi R_0^2 = \pi (R_0 + u_r)^2 (1 - \varepsilon), \qquad (4.46)$$

откуда

$$u_r = \frac{R_0}{(1-\varepsilon)^{1/2}} - R_0. \qquad (4.47)$$

Поверхностный угол (угол поворота нормали к поверхности)

$$\alpha = \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{\partial u_r}{\partial x},$$

где $u_r$ — радиальное смещение поверхности. Дифференцируя $u_r$ в (4.47) по $x$ и подставляя в формулу для $\alpha$, получаем

$$\alpha = \frac{R_0}{2(1-\varepsilon)^{5/2}}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \tag{4.48}$$

где, согласно условию совместности $\partial v/\partial x = \partial \varepsilon/\partial t$ при $v = v(\varepsilon)$,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\Big/\frac{dv}{d\varepsilon}, \tag{4.49}$$

следовательно, окончательно

$$\alpha = \frac{R_0\dot{\varepsilon}}{2(1-\varepsilon)^{5/2}\, dv/d\varepsilon}. \tag{4.50}$$

Поскольку $dv/d\varepsilon$ было определено экспериментально и каждая из прочих величин в этом соотношении также измерялась, включая $\alpha(t)$, обеспечивалась экспериментальная проверка одномерности и изохоричности движения в каждой из многих рассматривавшихся точек. Согласно (4.38) равенство (4.50) можно представить так [1]:

$$\alpha = \frac{R_0\dot{\varepsilon}}{2(1-\varepsilon)^{5/2} c_p(\varepsilon)}, \tag{4.51}$$

т. е. в терминах известной скорости волны.

Поверхностный угол представляет собой угол поворота нормали к поверхности, возникающий при чисто осевом ударе (рис. 4.165).

Для того чтобы исключить ошибки, связанные с малыми отклонениями от осевой симметрии в некоторых ударных испытаниях, данные усреднялись по многим опытам (Bell [1972, 1]). Результаты

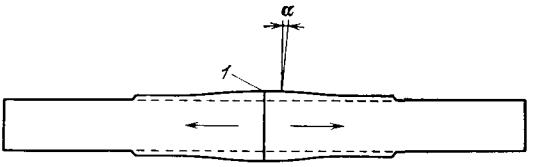



Рис. 4.165. Опыты Белла (1971). Схематический чертеж, показывающий изменение $\alpha$ — угла наклона нормали к поверхности образца в процессе распространения волны. *1* — ударяемая поверхность.

50 усредненных измерений в указанных позициях на образцах из отожженного алюминия приведены на рис. 4.166. Результаты отдельных опытов по установлению границы между упругой и пластической областями в условиях тщательно проконтролированной осесимметричности удара показаны на рис. 4.167. На рис. 4.168 дано

сравнение значений углов поворота нормали к поверхности образца, предсказанных теоретически (кружки) и измеренных в опытах (сплошная линия) по симметричному свободному соударению образцов из цинка с чистотой 99,2%. Эти данные ясно демонстрируют одномерность и изохоричность движения независимо от примененной теории распространения волны[1]).

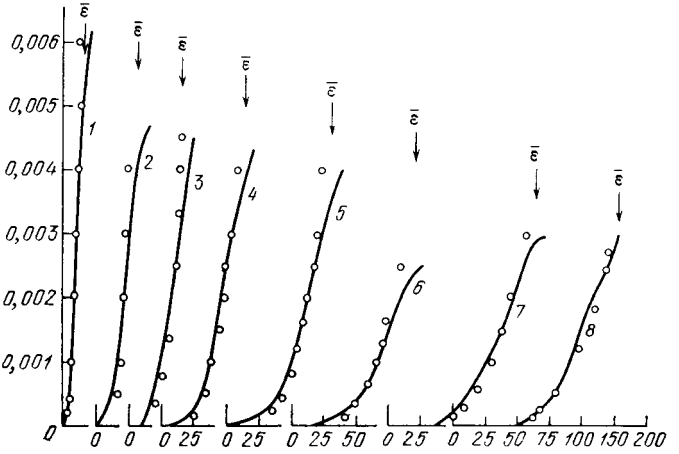



Рис. 4.166. Опыты Белла (1971). Усредненные экспериментальные данные (сплошные линии для $\alpha$ — углов поворота нормали к поверхности образцов из отожженного алюминия и их сравнение с расчетом по формуле (4.51) (кружки); $x$ — расстояние от ударяемого торца до сечения, на уровне которого производился замер угла $\alpha$; *1* — $x=1{,}27$ см (5 опытов), *2* — $x=2{,}54$ см (5 опытов), *3* — $x=3{,}81$ см (3 опыта), *4* — $x=5{,}08$ см (22 опыта), *5* — $x=6{,}35$ см (4 опыта), *6* — $x=7{,}62$ см (6 опытов), *7* — $x=8{,}89$ см (2 опыта), *8* — $x=10{,}16$ см (3 опыта). По оси абсцисс отложено время в мкс, по оси ординат — угол $\alpha$ в радианах.

В 1959 г. я сконструировал ударную аппаратуру, которая включала печь как для ударяющего образца, так и для первоначально неподвижного ударяемого образца, что позволяло измерять конечные динамические деформации и углы поворота нормали к поверхности с помощью дифракционной решетки через кварцевые окна при всех температурах окружающей среды вплоть до температур, отстоящих на несколько градусов от точки плавления. Детали этого исследования, которое значительно расширяло проблематику ударных испытаний с помощью дифракционной техники, были описаны в публикации 1962 г. (Bell [1962, 4]). Результаты высокотемпературных испытаний образцов из полностью отожженного алюминия позволили обнаружить, что при каждом из заданных уровней температуры вплоть до температуры, отстоящей на несколько градусов от точки плавления, применима теория волн конечных амплитуд, сфор-

[1]) Я распространил эту независимую демонстрацию одномерности и изохоричности движения, основанную на измерении поверхностных углов, на динамическую пластичность поликристаллов при высоких температурах, монокристаллов меди, $\alpha$-бронзы и др.

мулированная Тэйлором (Taylor [1942, 1]) и фон Карманом (von Kármán [1942, 1]), и что функция отклика, которая получалась из наблюдений, оказывалась параболической. На основе первых 63 опытов с образцами из отожженного алюминия при восьми разных

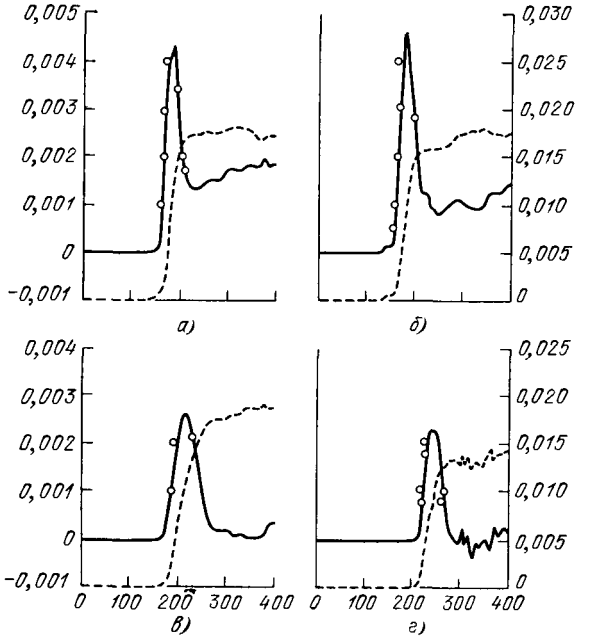



Рис. 4.167. Опыты Белла (1968). Графики зависимости угол поворота нормали к поверхности — время, построенные на основе использования техники дифракционной решетки в опытах с образцами из отожженного алюминия (сплошная линия) по упруго-пластическому осевому удару и сравнение их результатов с результатами расчета (кружки) по формуле (4.51). Штриховой линией показаны графики зависимости деформаций от времени, построенные на основании одновременно произведенных измерений. *а*) Опыт 937; *б*) опыт 1163; *в*) опыт 1165; *г*) опыт 1184, по оси абсцисс отложено время в мкс, по оси ординат — угол $\alpha$ в радианах (левая шкала) и деформация (правая шкала).

уровнях температуры, превышающих комнатную, были получены коэффициенты параболы, оказавшиеся линейными функциями от $T/T_m$, где $T_m$ — температура плавления. Таким образом, как я показал в 1963 г. (Bell [1963, 1]), функция отклика при одноосной деформации, вызываемой в этом материале волной конечной амплитуды, описывается соотношением

$$\sigma = \beta(0)(1 - T/T_m)\varepsilon^{1/2}, \qquad (4.52)$$

где $\sigma$ и $\varepsilon$ — условные напряжение и деформация; $\beta(0)$ — значение функции $\beta$ при абсолютном нуле, предсказываемое по формуле (4.53); $T$ — температура окружающей среды; $T_m$ — температура плавления (обе в градусах Кельвина). Результаты таких экспериментов, проводившихся с 1959 по 1963 г., показаны на рис. 4.169,

где нанесена зависимость значений коэффициента параболы, полученных из опытов с волнами конечной амплитуды, от температуры окружающей среды (кружки). Это — усредненные экспериментальные данные.

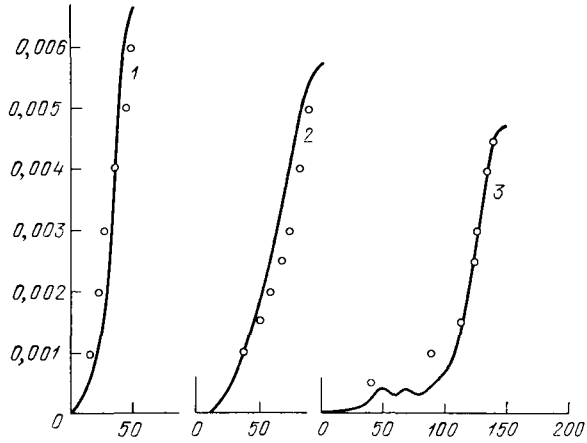



Рис. 4.168. Опыты Белла (1971). Графики зависимости угол поворота иормалн к поверхиости ($\alpha$) — время, построеиные иа осиове использования техиики дифракционной решетки (сплошные линии) в опытах с образцами из цинка (металла с гексагоиальиой атомной решеткой), в точках, расположеиных иа расстояиях от ударяемой поверхности, равиых одной, двум, трем длинам диаметра, и их сравиеине с результатами, полученными на осиоваиии расчета (кружки) по формуле (4.51); *1* — опыт 1064, циик низкой чистоты, решетка иа расстоянии 1 дюйма от ударяемого торца образца, начальная скорость $v_0$=1295 см/с; *2* — опыт 1141, циик высокой чистоты, решетка иа расстояиии 2 дюймов от ударяемого конца, $v_0$=1060 см/с; *3* — опыт 1051, цинк иизкой чистоты, решетка иа расстоянии 3 дюймов от ударяемого торца, $v_0$= =1430 см/с. По оси абсцисс отложено время в мкс, по оси ординат — угол $\alpha$ в радианах [2].

К 1962 г. опыты по свободному соударению, в которых измерялись конечные деформации и углы поворота нормали к поверхности, были выполнены с образцами из алюминия, меди, свинца и магния. Последующие эксперименты дали результаты для цинка и гораздо

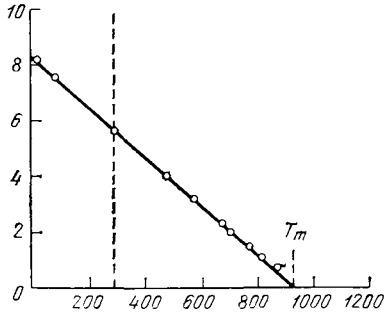



Рис. 4.169. Экспериментальные значеиия коэффициента параболической зависимости как функции абсолютной температуры, полученные Беллом в 1963 г. по результатам 63 опытов с образцами из поликристаллического технически чистого алюминия в условиях свободного удара при уровнях температуры выше комнатной. Вертикальной штриховой линией отмечена комиатная температура. По оси абсцисс отложена абсолютиая температура, по оси ординат — зиачение коэффициента $\beta \cdot 10^{-4}$.

позже для $\alpha$-бронзы. Ранние опыты с образцами из меди, эксперименты с образцами из свинца и магния и позднейшие испытания образцов из $\alpha$-бронзы проводились на одной и той же аппаратуре, с использованием того же делительного механизма для получения

дифракционной штриховки и были частью исследований, выполнявшихся в это время рядом моих аспирантов. Опыты с образцами из меди были выполнены У. Мидом Вернером (Werner [1960, 1]) (магистрская работа); см. (Bell and Werner [1962, 5]), с образцами из свинца — Джозефом Сперраза (Sperrazza [1961, 1], [1962, 1]), с образцами из магния — Эндрю Конном (Conn [1959, 1]), с образцами из α-бронзы — Уильямом Франсисом Хартманом (Hartman [1967, 1], [1969, 1, 2]). Изучение кривых конечная деформация — время, полученных в 25—35 испытаниях этих отожженных металлов при симметричном свободном соударении, показало, что в каждом случае скорость частиц была однозначной функцией деформации, и скорость волны при каждом значении деформации была постоянна. Следовательно, устанавливалась применимость нелинейной теории волн Тэйлора и фон Кармана, и в результате могла быть найдена функция отклика.

Сравнив большое число данных для этих материалов с данными для алюминия, я открыл в 1961 г. (Bell [1961, 1]), что в каждом из изучавшихся случаев функция отклика была параболической и представлялась формулой (4.52). Поскольку значения $\beta(0)$ изменялись от материала к материалу и отличались для образцов из отожженного алюминия низкой и высокой чистоты, интенсивный и систематический поиск эмпирической зависимости, которая позволяла бы находить значения $\beta(0)$, привел меня к открытию (Bell [1962, 4], [1963, 1], [1965, 2]) в период с 1962 по 1965 г., что все известные данные по распространению волн охватываются следующей формулой для $\beta(0)$:

$$\beta(0) = \left(\frac{2}{3}\right)^{r/2} \mu(0)\, B_0, \tag{4.53}$$

где $r = 1, 2, 3, \ldots$; $\mu(0)$ — модуль сдвига при нулевой температуре (шкала Кельвина) для рассматриваемого изотропного тела; $B_0 = 0{,}0280$ — универсальная единая безразмерная постоянная. Таким образом, функция отклика для конечной деформации при распространении волны дается экспериментально установленной нами формулой

$$\sigma = \left(\frac{2}{3}\right)^{r/2} \mu(0)\, B_0 (1 - T/T_m)\, \varepsilon^{1/2}. \tag{4.54}$$

Квазистатические опыты по одноосному растяжению и сжатию, выполнявшиеся в это же время в моей лаборатории с полностью отожженными образцами из тех же материалов, в которых детально исследовались волны, позволили обнаружить, как было показано выше в разделе 4.21, что получаемые функции отклика при медленном нагружении мертвой нагрузкой также представимы в виде (4.54). При заданной температуре окружающей среды $T$ достаточно иметь экспериментально найденные значения $\mu(0)$, $T_m$ и значение целочисленного показателя степени $r$ (индекс формы), чтобы описать отклик заданного материала при любой скорости деформаций.

Возможность описать конечную деформацию широкого класса отожженных кристаллических тел с помощью единого определяющего соотношения непосредственно вытекала из принятой мною большой программы испытаний при медленном нагружении и широкого анализа литературы, описанного в разделе 3.44 для модуля сдвига при нулевой температуре, в разделе 4.18 — для III стадии деформирования монокристаллов с кубической кристаллической решеткой и в разделе 4.21 — для одноосных статических испытаний при нагружении мертвой нагрузкой образцов из отожженных поликристаллических тел. В течение шести лет, с 1962 по 1968 г., по мере выполнения этого исследования я представил ряд статей с описанием различных деталей. В монографии *The Physics of Large Deformation of Cristalline Solids*, изданных в 1968 г., я дал полное обобщение в виде выборки и сопоставления особенностей результатов более, чем 2000 отдельных опытов, выполненных в основном в моей лаборатории, и свыше 700 опытов, описанных в предыдущие полвека в литературе по физике металлов. Открытие того, что функция отклика при конечной деформации 19 элементов и 8 бинарных из них соединений, представляющих 27 кристаллических твердых тел пяти различных кристаллических структур, всегда описывается единой параболической функцией, сопоставимо в экспериментальном отношении с исчерпывающим анализом Вертгейма 1844 г., который открыл — также для динамического и квазистатического нагружения,— что все представители одного и того же класса элементов и бинарные из них соединения имеют линейные функции отклика при инфинитезимальных деформациях.

Данное исследование позволило для всего этого класса тел обнаружить закономерность, далеко выходящую за рамки простого наблюдения того факта, что аналитическая форма функции отклика для инфинитезимальных и для конечных деформаций оказывается во всех случаях одинаковой. Открытая закономерность состояла и в том, что как постоянные упругости при бесконечно малых деформациях, так и коэффициенты параболы, являющейся функцией отклика, при конечных деформациях всех изучавшихся тел этого класса оказались единым образом связанным набором квантованных значений. Как для постоянных упругости, так и для коэффициентов параболы эти специфические распределения связывали между собой различные материалы, а также — в терминах переходов второго рода — различные состояния одного и того же твердого тела.

Соотношение упругих постоянных для элементов дано равенством (3.28) в разделе 3.44, а для их переходов второго рода в данном теле, которые я назвал «мультиупругими»,— равенством (3.29) в разделе 3.44. Подобное квантованное распределение значений коэффициента параболы для определяющей конечной деформации и при переходе второго рода в монокристаллах было опи-

сано в разделе 4.18; для конечной деформации поликристаллов при одноосном нагружении — формулой (4.25) в разделе 4.21 и для поликристаллических тел при чистом кручении — равенством (4.29) в разделе 4.22.

Таким образом, с экспериментальной точки зрения деформации, малые и большие, отожженных кристаллов качественно и количественно объединены. Как и при любых подобных достижениях в физике, взаимосвязанные дополняющие друг друга открытия, такие, например, как квантованное распределение значений коэффициента и переход второго рода, создают стимул для экспериментальных и теоретических исследований в направлениях, о которых дотоле не подозревали.

И, наконец, что следовало бы отметить здесь. Закон Гука, как известно, может быть представлен как совершенно общая система определяющих уравнений, связывающих все компоненты напряжений со всеми компонентами деформаций. В разделе 4.35 этой книги я опишу недавние эксперименты, которые обеспечили базу для получения мною аналогично обобщенных определяющих соотношений в терминах параболической функции отклика при конечных деформациях.

### 4.29. Экспериментальное изучение волн разгрузки в условиях динамической пластичности: Белл (1961)

Результаты нелинейной теории для пластических волн нагружения, которые были подтверждены экспериментами для отожженных кристаллических тел, ничем не отличаются от результатов, относящихся к нелинейной упругости. Если не учитывать выделения тепла при прохождении волны, то основной признак того факта, что волны имеют пластическую природу, обнаруживается лишь после прихода волн разгрузки. При медленных нагружениях, согласно обильным опытным доказательствам, данным Тэйлором и Фарреном (Taylor and Farren [1925, 2]), Тэйлором и Квини (Taylor, Quinney [1934, 2]) и Диллоном (Dillon [1962, 1, 2], [1966, 2]), примерно 95% энергии, затрачиваемой на деформирование, рассеивается в виде тепла. Многие эксперименты в XIX веке показали, что функция отклика при разгрузке в условиях квазистатического испытания примерно линейна, с углом наклона касательной, много меньшим, чем перед появлением остаточных деформаций, но все же того же порядка величины.

Какой вид будет иметь функция отклика при разгрузке, когда предшествующее нагружение происходило лишь микросекундами раньше, является вопросом, ответ на который может дать лишь эксперимент. Несмотря на интерес, пробужденный усилиями таких теоретиков, как Боненблюст (Bohnenblust [1942, 1, 2]), Рахматуллин ([1945, 1]) и особенно Ли (Lee [1953, 1]), описать волны разгрузки, никаких экспериментальных исследований фронтов

волн разгрузки не проводилось до моих опытов (Bell [1961, 3, 4]), выполненных в 1961 г. Боненблюст (Bohnenblust [1942, 2]) и Боненблюст, Чарик и Хайерс (Bohnenblust, Charyk, Hyers [1942, 1]) в 1942 г. заинтересовались ведением поправок в анализ «замороженного» распределения деформаций в эксперименте Дюве (Duwez, Wood, Clark [1942, 1]). Однако описание разгрузки в форме, пригодной для экспериментального изучения, появилось только в 1953 г., когда было дано такое приемлемое представление, основанное на том же допущении о линейности соотношения для разгрузки, которое к тому времени стало известно, как «соотношение Боненблюста». Когда пластическая волна, образованная прямым ударом, распространяется к свободному торцу стержня, она в конце концов встречается с волнами разгрузки, распространяющимися в противоположном направлении, порожденными отраженными от свободного торца частями падающей волны, движущимися более быстро. Упругий предвестник, имеющий амплитуду динамического предела упругости $Y$, является наиболее быстрой частью фронта падающей волны, которая первая взаимодействует с фронтом волны разгрузки.

Теория Ли, использующая метод характеристик для изучения количества движения взаимодействующих фронтов волн, требовала не только значения $Y$, но также точной формы функции отклика конечной деформации, определяющей начальную волну нагружения. Используя квазистатическую функцию отклика для одномерной задачи, Ли (Lee [1953, 1]) нашел, что отраженная волна нагружения поглощается по мере проникновения в диспергирующую пластическую волну. Обозначив символом $\Delta\sigma$ величину этого приращения разгрузки, через $\sigma$ — напряжение волны нагружения перед взаимодействием волн и через $v$ — соответствующую скорость частиц, Ли нашел, что

$$\Delta\sigma = Y - \frac{1}{2}(\rho c_0 v - \sigma), \tag{4.55}$$

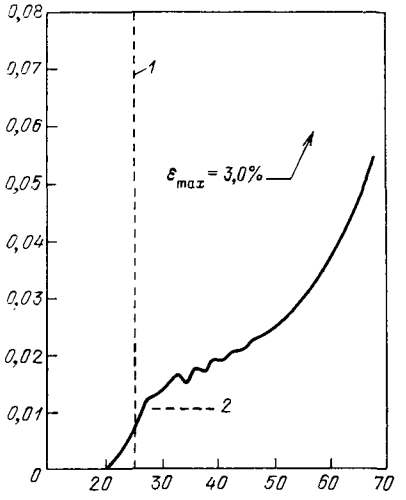
где $c_0 = \sqrt{E/\rho}$, $\rho$ — плотность.

Этот фронт волны разгрузки полностью поглощался бы, если бы $Y$ было достаточно мало по сравнению с максимальным напряжением в волне нагружения, поскольку $v$ возрастало быстрее, чем $\sigma$.

Располагая к 1961 г. функциями отклика нагружения для динамической пластичности отожженного алюминия и отожженной меди (Bell [1961, 1]), полученными с помощью техники дифракционных решеток, я воспользовался этим для проверки указанного положения в теории Ли (Bell [1961, 3, 4]). Прежде всего для использования в расчете необходимо было установить экспериментально значение динамического предела упругости $Y$. Я достиг этого, изучив начальные участки волн в экспериментах по свободному соударению. Результат одного из таких измерений представлен на рис. 4.170. Эти исследования позволили обнаружить,

что в полностью отожженном алюминии низкой чистоты квазистатический и динамический пределы упругости одинаковы [1]). Оба они имели значение $Y=0{,}774$ кгс/мм² (1100 фунт/дюйм²). Поскольку $E=7180$ кгс/мм² ($10{,}2\times$ $\times 10^6$ фунт/дюйм²), деформация при напряжении $Y$ приобретает значение $\varepsilon_y=108\cdot10^{-6}$.

Введя это экспериментально найденное значение предела упру-



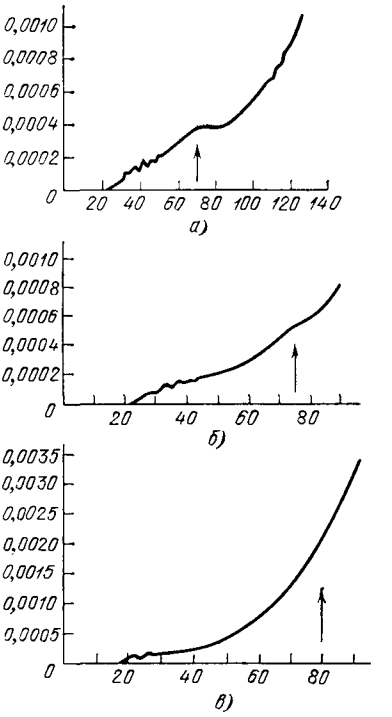




Рис. 4.170. Опыты Белла (1961). Экспериментальные данные по упругой и пластической составляющим падающей волны с конечной амплитудой (максимальное ее значение $\varepsilon_{max}=3{,}0\%$) показывающие, что максимум упругой составляющей соответствует скорее квазистатическому значению, чем амплитудному значению, вытекающему из гипотезы Соколовского — Малверна о вязкости. Материал — полностью отожженный алюминий; *1* — гипотетический фронт, предсказываемый в соответствии с линейной упругостью ($\varepsilon_{max}=0{,}5\%$ при $v_0=1000$ дюйм/с, $c_0=\sqrt{E/\rho}$); эксперимент при $v_0=1000$ дюйм/с дал значение $\varepsilon_{max}=3{,}0\%$; *2* — деформация $\varepsilon_Y$ при квазистатическом пределе упругости $Y$. По оси абсцисс отложено время в мкс, по оси ординат — деформация $\varepsilon$ в процентах.

Рис. 4.171. Опыты Белла (1961). Графики экспериментальных зависимостей деформаций от времени, полученные с использованием электротензометрических датчиков сопротивления. Длина образца $L=10$ дюймов, вертикальные стрелки отмечают расчетное время прибытия отраженной волны разгрузки при пределе текучести $\sigma_Y=1100$ фунт/дюйм² (0,774 кгс/мм²). Заметим, что при $x=4D=0{,}4L$ волна была полностью поглощена в соответствии с расчетами на основе теории волны разгрузки Ли. В точку, расположенную на расстоянии $0{,}6\ L$ (*а*), $0{,}5\ L$ (*б*) от ударяемого торца, волна разгрузки приходит соответственно через 70 мкс и 75 мкс от момента начала удара. Через 80 мкс волна разгрузки достигает точки, удаленной от ударяемого торца на расстояние $0{,}43L$ (*в*). По оси абсцисс отложено время в мкс, по оси ординат — деформация $\varepsilon$.

[1]) Эти опыты уже в 1960 г. дали дополнительное экспериментальное доказательство того, что вязкопластические функции напряжение — деформация типа Малверна (Malvern [1951, 1]), содержащие модуль упругости $E$, не могут управлять динамической пластичностью этого материала, поскольку высокий фронт упругой волны, рассеивающийся в пластическую деформацию, просто не наблюдался (Bell [1960, 2], [1961, 3]).

гости $Y$ и мою параболическую функцию отклика для волны нагружения, я по формуле (4.55) подсчитал, что полное поглощение отраженной волны будет происходить на расстоянии $0{,}43L$ от поверхности удара, где $L$ — длина образца. На рис. 4.171, *а* — *в* показаны результаты измерений малых деформаций от отраженной волны разгрузки на расстояниях $0{,}6L$, $0{,}5L$ и $0{,}4L$, выполненных при помощи электротензометрических датчиков сопротивления. В алюминии упругая волна пробегает один дюйм за 5 мкс. Волна разгрузки при длине образца $L$, равной 10 дюймам, пришла в точку $0{,}6L$, как и было предсказано, через 70 мкс (рис. 4.171, *а*); в точку $0{,}5L$, будучи уже уменьшенной, она пришла через предсказанные 75 мкс (рис. 4.171, *б*); а в точке $0{,}4L$ она была бы зафиксирована через 80 мкс, если бы до этого на расстоянии $0{,}43L$ не происходило ее поглощение (рис. 4.171, *в*). То, что на расстоянии $0{,}4L$ отсутствовали какие-либо признаки наличия волны разгрузки через 80 мкс, внушает доверие и к теории Ли [1]), и к допущению о линейности функции отклика разгрузки и равенстве ее производной модулю упругости $E$.

Эксперимент и теория оказались, наконец, согласованными в рамках действительно динамической пластичности, поскольку учитывались волны нагружения и взаимодействие с ними волн разгрузки. В дополнение была найдена общая продолжительность контакта $T_c$ в опытах по симметричному свободному соударению образцов, а также определена конечная скорость каждого образца по завершении их взаимодействия. Поскольку начальные скорости были также известны, измерение конечной скорости давало экспериментальный коэффициент восстановления $e$ для пластически деформирующихся образцов при их столкновении. Наконец-то проблема, впервые поставленная Ходкинсоном в 30-х гг. XIX века, с перерывами изучавшаяся с незначительным успехом в течение 130 лет, могла быть описана экспериментально во всех деталях.

Поместив соударяющиеся поверхности между источником однородного светового поля с одной стороны и трубкой фотоэлектронного умножителя с противоположной стороны, после надлежащей калибровки я определил коэффициент восстановления и продолжительность контакта при ударе по относительным наклонам касательных к графикам функций, характеризующих изменение во времени интенсивности света до и после удара, и по продолжительности полного прекращения поступления света в трубку фо-

---

[1]) В экспериментах Колски и Дуча (Kolsky, Douch [1962, 1]), которые были повторением опытов по жесткому нагружению стержней Джонсона, Вуда и Кларка (Johnson, Wood, Clark [1953, 1]), а также Дж. Д. Кэмпбелла (Campbell [1953, 1]), не учитывались как поглощение волны разгрузки, описанное в теории Ли (Lee [1953, 1]), так и мои опыты, выполненные в предыдущем году (Bell [1961, 3, 4] в предположении, что максимальная протяженность проникновения деформации такова, как она определяется в линейной упругости приходом неуменьшенного фронта волны упругой разгрузки.

тоэлектронного умножителя (Bell [1961, 3, 4]). В дополнение, поместив источник света и трубу фотоэлектронного умножителя у свободного конца ударяемого образца, я получил функцию смещение — время, наклоны касательных к графику которой давали описание зависимости скорости перемещения свободного конца от времени как в процессе удара, так и после отделения ударяющего стержня от образца. Эта скорость могла быть проконтролирована опять-таки замерами продолжительности прохождения торцом образца тщательно измеренного расстояния между двумя тонкими проволоками, с которыми он последовательно входил в контакт. Такое измерение скорости с помощью электронного хронографа проводилось почти в каждом из более чем тысячи опытов по симметричному свободному соударению, выполненных в моей лаборатории со всеми изучавшимися материалами.

На рис. 4.172, *а* — *в* показаны некоторые из результатов моих измерений смещений у поверхности взаимодействия и у свободного конца образца, полученных с использованием оптической техники. Приведены данные замеров продолжительности контакта (*а*), коэффициента восстановления (*б*) при разных скоростях соударения; зависимость смещение — время (*в*) у свободного конца образца, длиной 25 см при скорости частиц 2032 см/с. В каждом случае материалом образца был полностью отожженный алюминий с чистотой 99,16%, для которого индекс формы в формуле (4.54) был $r=2$, что давало для функции отклика при одноосной деформации коэффициент параболы $\beta=39{,}4$ кгс/мм$^2$.

Экспериментальные результаты (кружки) на рис. 4.172 сопоставлены со значениями (сплошные линии), предсказанными на основе эмпирической формулы (4.56), которая, как я установил, описывала процесс во всех подобных опытах. Продолжительность контакта $T_c$ в образцах любой длины $L$, изготовленных из полностью отожженных алюминия или меди, при всех скоростях соударения до 15 000 см/с, дается простой формулой

$$T_c = L/c_p^* + L/c_0, \tag{4.56}$$

где $c_p^*=c_p(\sigma_{max}/2)$ — скорость волны при напряжении, равном половине максимального, найденного в соответствии с параболическим законом для рассматривавшихся отожженных материалов; $c_0=\sqrt{E/\rho}$ — скорость линейно-упругой волны в стержне.

Эмпирическая формула для коэффициента восстановления имеет вид

$$e = \frac{\sigma c_0}{2Ev_0} + \frac{v_e - v_p}{v}. \tag{4.57}$$

Здесь было признано необходимым включить в расчет поправку на малую скорость частицы на фронте начальной упругой волны (см. Bell [1961, 3, 4]). Поправка проявляется в учете разности между упругой скоростью $v_e$ и скоростью $v_p$, определяемой в соответствии

с параболическим законом в точке при очень малых деформациях, где пересекаются графики линейной и параболической функций отклика. При комнатной температуре для полностью отожженного

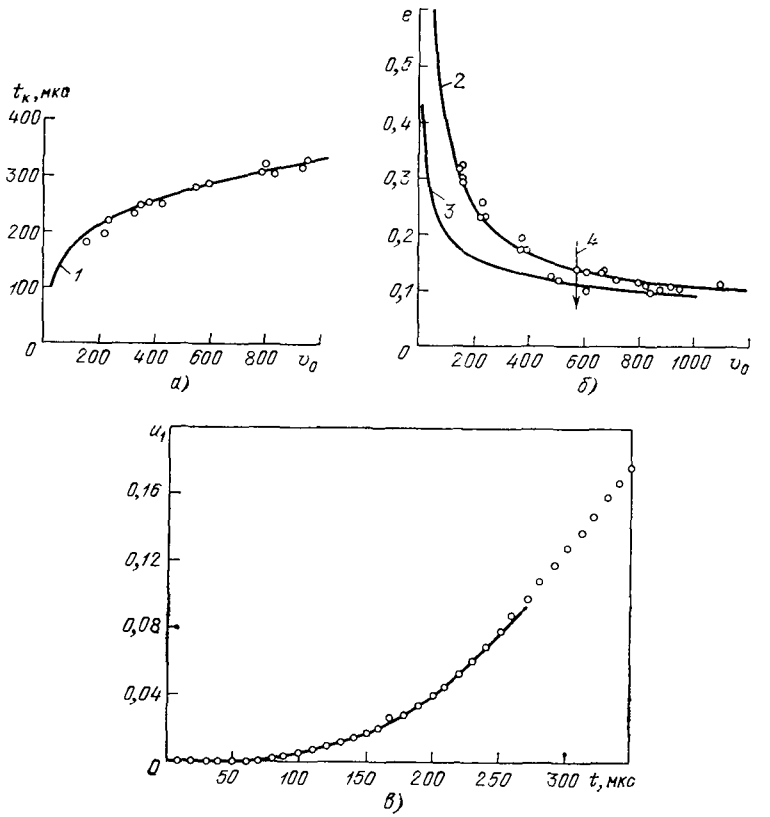



Рис. 4.172. Опыты Белла (1961). Результаты экспериментов, полученные при помощи оптической техники (кружки). Материал — полностью отожженный алюминий. *а*) Зависимость продолжительности контакта $T_c$ мкс от скорости удара $v_0$ дюйм/с; б) коэффициент восстановления $e$ в зависимости от скорости удара $v_0$ дюйм/с; *в*) зависимость перемещения $u_1$ в дюймах свободного торца образца от времени в мкс и ее сравнение с результатом расчета по эмпирическим формулам (сплошная линия); *1* — продолжительность контакта, определенная теоретически с использованием параболической зависимости напряжение — деформация; *2* — коэффициент восстановления $e$, определенный теоретически с использованием параболической зависимости напряжение — деформация и с учетом корректировки на упругость; *3* — коэффициент восстановления $e$, определенный теоретически с использованием параболической зависимости напряжение — деформация без корректировки на упругость. Корректировка на упругость коэффициента восстановления связана с рассмотрением малых скоростей $v_Y$ упругого предвестника; *4* — критическая скорость по Карману.

алюминия $v_e - v_p = 17$ дюйм/с независимо от значения максимальной скорости частицы волны конечной амплитуды.

В историческом контексте, вероятно, наиболее интересным результатом, полученным из наблюдений, имевших место при проведении этой серии опытов, было следующее: по заданным скоро-

стям частиц, распределению в образце пластических деформаций во все моменты времени как в течение, так и после удара и известному значению кинетической энергии в первый момент удара можно получить энергетический баланс в любой момент времени после удара. В 1961 г. я описал (Bell [1961, 3, 4]) два таких энергетических баланса для полностью отожженных алюминиевых поликристаллических цилиндров диаметром 2,5 см и длиной 25,4 см. Один баланс соответствовал моменту времени по истечению 50 мкс после начала удара, когда линейный упругий предвестник как раз достигал свободного конца, а второй — моменту времени по прошествии 310 мкс после начала удара, т. е. моменту времени, когда разгруженные образцы отделялись один от другого. Оба расчета, детали которых описаны в одной из двух моих работ в 1961 г. по влиянию разгрузки (Bell [1961, 3, 4]), дали энергетический баланс с расхождением менее чем 2%. Предположения, высказанные Киком (Kick [1875, 1]) в 70-х гг. XIX века и Гестом (Guest [1930, 1]) в 1930-х гг., и в некоторых трудах других исследователей XIX и XX веков были подтверждены. Однако они не выходили за рамки лишь предположений, поскольку проблема удара просто не могла быть интерпретирована в квазистатических терминах, которыми были ограничены их эксперименты.

При недавней перепроверке всех аспектов разгрузки, для которых я получил экспериментальные данные в 1961 г., Кристеску и я (Cristescu and Bell [1970, 1]) выполнили детальные расчеты на компьютере для симметричного соударения двух стержней. После использования найденной мной параболической функции отклика как в нелинейной теории Тэйлора и фон Кармана, так и в теории разгрузки Ли, мы на основе расчета получили распределения деформаций и скоростей частиц во всем стержне (включая свободный торец), продолжительность контакта $T_c$, коэффициент восстановления $e$ и максимальное напряжение как функцию скорости удара за весь период контакта образцов, пока не происходила полная разгрузка. Мы изучили три разных начальных условия, пытаясь воспроизвести нарастание волны в непосредственной близости от поверхности удара, где, как показали эксперименты, допущение об одномерности явлений было неприменимо (Bell [1960, 3], [1960, 4], [1961, 1], [1962, 6], [1963, 2], [1967, 2]).

Было наглядно продемонстрировано, что все основные черты волн нагружения и разгрузки при динамической пластичности отожженных поликристаллов понимаются достаточно глубоко, чтобы обеспечить согласие между экспериментом и нелинейной теорией. Некоторые расхождения, такие, как тот факт, что эксперименты дали бóльшую протяженность распространения максимальной деформации в образце, чем расчет, и что максимальные деформации в непосредственной близости от свободного конца были немного меньше, чем вычисленные, объясняются частично ограниченностью предпринятого численного расчета на ЭВМ, а частично

Таблица 136

**Кристеску и Белл (1970)**

| | $Y$ | $\sigma_{max}$ | $\varepsilon_{max}$ | $V$ | $e$ | $v_f$ | $T_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Расчет | 77,34 | 594,12 | 0,022491 | 40,74 | от 0,116 до 0,1262 | от 22,74 до 22,94 | от 307,5 до 320 |
| Эксперимент | 77,34 | 583,57 | 0,0219 | 40,64 | 0,1235 | 22,63 | 310,8 |

Здесь $Y$ — предел упругости (кгс/см$^2$), найденный экспериментально, $\sigma_{max}$ — максимальное нагружающее напряжение (кгс/см$^2$), $\varepsilon_{max}$ — максимальная деформация при нагружении, $V$ — начальная скорость ударяющего образца (м/с), $e$ — коэффициент восстановления, $v_f$ — конечная скорость ударяемого образца после удара (м/с), $T_c$ — продолжительность контакта образцов (мкс).

неполной изученностью явления и связанной с нею необходимостью дальнейшего изучения динамики малых деформаций в переходной области за пределом упругости.

Отсылая читателя ко многим деталям, описанным в статье 1970 г., и к моим ранним работам, относящимся к 1961 г. и отражающим эксперименты, на которых она основывалась, я привел в табл. 136 порядок вычисленных значений при трех принимавшихся начальных условиях в сравнении с экспериментальными результатами. Экспериментальные данные представляют средние значения по нескольким сотням отдельных испытаний полностью отожженных алюминиевых образцов при скорости соударения их, во всех случаях равной 40,64 м/с.

### 4.30. Динамический предел упругости

По-видимому, наиболее важным аспектом динамической пластичности для инженера-практика — технолога или проектировщика является мера обоснованности предположения о том, что для тех конкретных материалов, которые его интересуют, при ударном нагружении конструкции предел упругости выше, чем при квазистатическом нагружении. Если же это имеет место, то важно знать, в чем состоят особенности протекания пластической деформации, если напряжения превышают этот предел упругости.

Ряд экспериментов, выполненных, в частности, Дэвисом и Тэйлором (Taylor [1946, 1]) или Бертрамом Гопкинсоном (B. Hopkinson [1905, 1]) в 1905 г. и кратко описанных выше, позволил установить, что, по крайней мере, для некоторых материалов такое повышение по той или иной причине может иметь место. В других экспериментах с материалами типа отожженного алюминия при

изучении фронтов начальных волн не было отмечено такого повышения при высоких скоростях деформаций. В данном контексте вопрос о том: окажет ли возрастание предела упругости какой-либо поддающийся измерению эффект на динамическую пластичность, имеющую место, если напряжения превышают предел упругости, является совершенно отдельным.

Я рассматривал два метода изучения этого вопроса. Первый метод заключался в исследовании распространения волн конечной амплитуды в заданном теле при различии в значениях квазистатического предела упругости, обусловленного предварительными термической обработкой и деформированием. Второй метод, видимо, более важный, сводился к изучению распространения волн конечной амплитуды в материале, для которого динамический предел упругости, определенный по амплитудам деформаций вблизи фронта начальной волны с помощью дифракционных решеток, был значительно выше квазистатического в этом же материале.

Экспериментально полученная параболическая функция отклика (см. формулу (4.54)) не позволяет обнаружить наличие или отсутствие малой линейной упругой области. Экспериментально доказано проведенными мною опытами по анализу волн конечной амплитуды наличие для ряда изученных материалов следующего факта: вне зависимости от значения динамического предела упругости волна нагружения конечной амплитуды, если напряжения во фронте превосходят предел упругости, распространяется так, как будто никакой начальной линейной области не существовало. На основании параболической функции, описывающей зависимости напряжений от деформаций, могут быть получены следующие соотношения для скоростей волн $c_p$ и скорости частицы в зависимости от конечной деформации, выраженные через интегралы теории волн конечной амплитуды:

$$c_p = \frac{\beta}{(2\rho\sigma)^{1/2}}, \tag{4.58}$$

$$v = \left(\frac{8}{9}\frac{\sigma^3}{\rho\beta^2}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad v = \left(\frac{8}{9}\frac{\beta}{\rho}\right)^{1/2}\varepsilon^{3/4}. \tag{4.59}$$

Если бы имело место нарастание предела упругости $Y$, сопровождающееся соответствующим возрастанием напряжений при заданной пластической деформации и уменьшением скорости частицы в пластической доле волны, то на основании формул (4.58) и (4.59) следовало бы ожидать более низких скоростей распространения волн при заданной конечной деформации и изменения максимального значения пластических деформаций при заданной скорости удара. Две иллюстрации, демонстрирующие то, что эти изменения не были обнаружены при проведении эксперимента с образцами из отожженного поликристаллического материала, приведены на рис. 4.173 и 4.174 (Bell [1972, 6]).

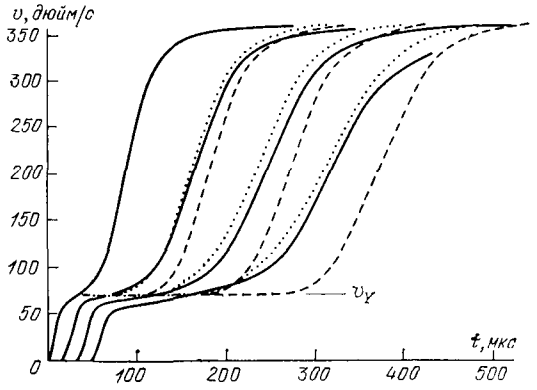



Рис. 4.173. Графики зависимости скорость частицы — время, полученные Малверном (сплошные линии), которые сопоставлены Беллом с продолжительностями перехода от первой позиции к каждой из трех других позиций, полученными расчетно на основании следующих предположений: $Y=0$ (пунктирные линии), $Y=3500$ фунт/дюйм² (штриховые линии), согласующихся со скоростью частиц $v_Y$ упругого предвестника. Материал — частично отожженный алюминий низкой чистоты.

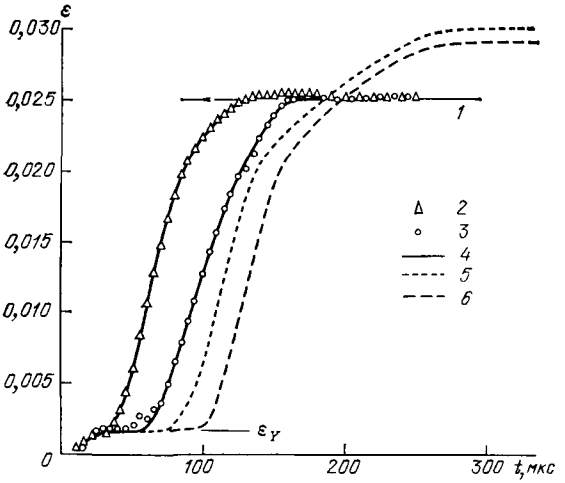



Рис. 4.174. Графики зависимости деформация — время, построенные по результатам опытов Хартмана с образцами из 70-30α-латуни, выполненных при помощи двух дифракционных решеток. Я добавил вычисленные значения продолжительностн прохождения волны (от ударяемого торца до сечения, отстоящего от него на расстоянии $x$) и теоретические значения наибольших деформацнй при $Y=0$ (сплошная лнння), при $Y=14\,000$ фунт/дюйм² (эксперментально найденный квазистатический предел упругости) и при $Y=27\,700$ фунт/дюйм² (динамический предел упругости, найденный по экспериментальному значенню $\varepsilon_Y$); *1* — теоретическое значение $\varepsilon_{max}$, полученное с нспользованием параболической зависнмости $\sigma-\varepsilon$ Белла при $r=3$ и $Y=0$; *2* — опыт 1024, $x=3{,}18$ см; *3* — опыт 1046, $x=5{,}08$ см; *4* — $Y=0$; *5* — $Y=14\,000$ фунт/дюйм² (квазистатика); *6* — $Y=27\,700$ фунт/дюйм² (динамика).

На рис. 4.173 приведены графики изменения скорости частиц, полученные Эфроном и Малверном (Efron and Malvern [1969, 1], а также Efron [1964, 1] и Malvern [1965, 1]) (см. раздел 4.28) в образцах из алюминия, для которого более низкие температуры отжига обеспечили получение предела упругости, равного примерно 3800 фунт/дюйм² вместо 1100 фунт/дюйм² для моего полностью отожженного материала. На основании этих графиков проводилось сравнение данных опыта и расчетов, при выполнении которых учитывалось предполагаемое влияние на скорости волн более высокого значения квазистатического предела упругости. То, что такого уменьшения скорости распространения волн не было обнаружено, становится немедленно очевидным.

Ближе к существу физической проблемы, рассмотренной Дэвисом и Гопкинсоном, были результаты опытов, проводившихся в условиях симметричного свободного удара, показанные на рис. 4.174. Часть докторской диссертации Хартмана (Hartman [1967, 1], [1969, 1]) посвящена измерению динамических деформаций с помощью дифракционных решеток в поликристаллах отожженной $\alpha$-латуни. Измеренный квазистатический предел упругости этой отожженной латуни составил $Y=14\,500$ фунт/дюйм² (10,2 кгс/мм²). Значение динамического предела упругости, определенное по фронту начальной волны с помощью измерений профилей волны деформаций двумя дифракционными решетками, изображенных на рис. 4.174, было равно $Y=27\,700$ фунт/дюйм² (19,5 кгс/мм²); увеличение произошло почти в два раза. Путем сопоставления результатов эксперимента (сплошные линии) с расчетными, основанными на снижении скоростей волн и наибольших деформаций, выраженных через предел упругости $Y$, я установил, что поведение образцов не описывается правильно ни квазистатическим значением 10,2 кгс/мм², ни более высоким динамическим значением 19,5 кгс/мм². Скорости распространения волн и наибольшие деформации, по экспериментальным наблюдениям, как и в любых твердых деформируемых телах, для которых рассматривались профили волн конечных деформаций, соответствовали пределу упругости $Y=0$. На рис. 4.175 продолжительность перемещения (темные кружки) от одной позиции до другой и максимальные деформации для обеих позиций согласуются с полученными на основании расчета, в котором использована параболическая аппроксимация при $r=3$. Таким образом, приходим к типу поведения материала, который характеризуется графиком, показанным на рис. 4.176. Эксперименты с образцами поликристаллического магния, для которого легко добиться существенного изменения предела упругости $Y$, дали результаты (Bell [1968, 1]), идентичные с полученными для образцов из алюминия и $\alpha$-латуни.

Имеющиеся экспериментальные результаты для отожженных кристаллических тел свидетельствуют о том, что значение предела

упругости, даже возросшее в связи с высокой скоростью деформации в линейно-упругом предвестнике, не влияет на следующую за ним волну нагружения. Мы, однако, заметили уже в предыдущем разделе, что значение $Y$ играет существенную роль в процессе

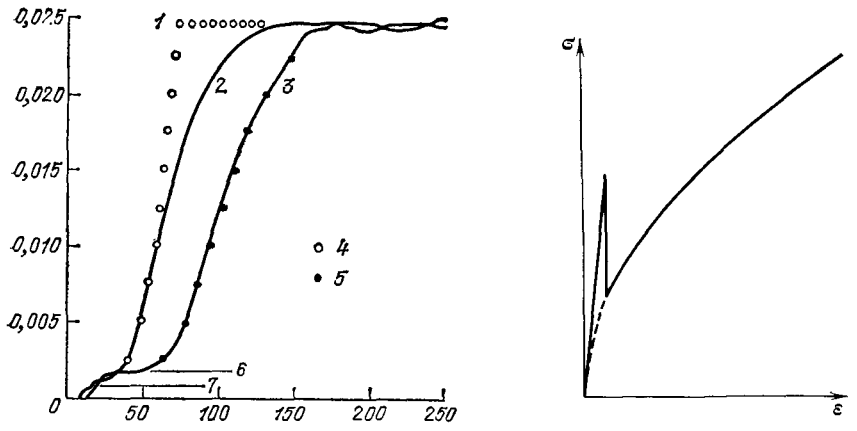



Рис. 4.175. Графики зависимости деформация — время, построенные по результатам опытов Хартмана с образцами из поликристаллической $\alpha$-латуни, измеренне конечных деформацнй в которых выполиено при помощи дифракционных решеток. Графнки показывают, что фронт пластической волны не изменяется при повышенин $Y_{\text{дин}}$ — днпамнческого предела упругости относительно квазистатического значения $Y_{\text{статич}}$. Светлые кружкн соответствуют значениям, предсказанным для бесконечно быстро прнложеннои ударной нагрузки, темные — соответствуют расчетным продолжительностям перехода от первой позицни ко второй; *1* — теоретический максимум, *2* — опыт 1024 ($x$=3,18 см), *3* — опыт 1046 ($x$=5,08 см), *4* — продолжнтельность прохождения волны деформации от ударяемого торца ($x$=0) до сечения с $x$=3,18 см, найденная теоретически с использованием параболической зависимости Белла напряжение — деформация при $r$=3, *5* — продолжительность прохождения волны деформации от сечения с $x$=3,18 см до сечения с $x$=5,08 см, найденная теоретически с использованнем параболической зависимости Белла напряжение — деформация прн $r$=3, *6* — $Y_{\text{дин}}$, *7* — $Y_{\text{статич}}$; по оси абсцисс отложено время в мкс, по оси ординат — деформация.

Рис. 4.176. Схематическая диаграмма днпамических напряжений и деформаций, основанная на замеченной связи скоростей распространения волн и нанбольшнх деформацнй при использованнн расчета, основанного на предположеннн, что $Y$=0.

разгрузки. Применимо ли такое заключение к закаленным, известным лишь узкому кругу лиц материалам, практически используемым в промышленности, судить пока не представляется возможным; экспериментальные же исследования с помощью дифракционных решеток начали проводиться для анализа волн конечной амплитуды и в таких телах только в последнее время.

Хотя характеристики поверхностей течения при простом и сложном квазистатических нагруженияx изучались интенсивно, начиная от Баушингера и Геста и до настоящего времени, подобные исследования в области динамики пластических деформаций все еще находятся в зародышевом состоянии.

## 4.31. Прерывистость конечной деформации: эффект Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье)

После классических экспериментов, проведенных в 1813 г., Дюло (Duleau [1813, 1]), впервые описавшим нерегулярности, наблюдаемые при измерении деформаций в процессе испытаний с помощью мертвой нагрузки, едва ли не каждое десятилетие приносило новые данные о явлении прерывистости деформирования.

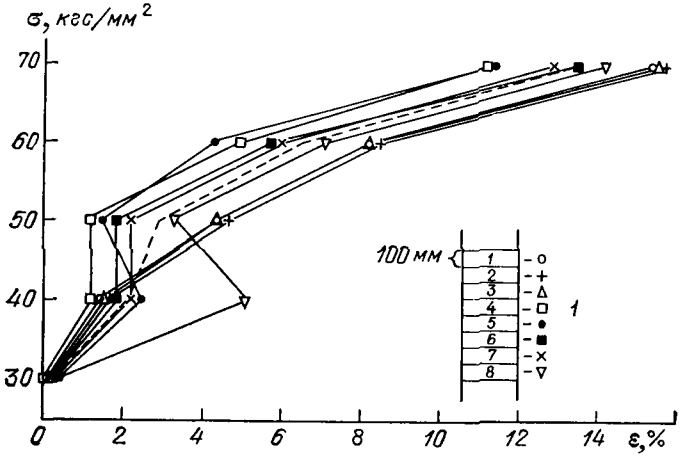



Рис. 4.177. Ранние опыты (Савар, 1837) по растяжению медных образцов в виде полос длиною 0,8 м, показывающие и неоднородность деформации, и ступенчатую прерывистость в диаграмме σ—ε (эффект Савара — Массона). Каждый график относится к одному из восьми поперечных сечений, рассматривавшихся по длине образца (одно сечение на каждом десятисантиметровом участке длины образца); *1* — условные обозначения сечений.

Если нагружение производится мертвой нагрузкой, эта прерывистость проявляется в виде ступенек в графике функции отклика, что при описании поведения образца привело к использованию термина «феномен ступенек». Трактовки явления менялись, начиная от данной Массоном (Masson [1841, 1]), ссылавшимся на то, что в 1837 г. Савар (Savart [1837, 1]) рассматривал явление как фундаментальное свойство стабильности материала и до Вертгейма (Wertheim [1844, 1(a)]), предположившего, что соответствующий выбор условий опыта позволит исключить эффект. Поскольку «жесткие» испытательные машины, созданные в конце XIX века, могли скрыть это явление и, за исключением особых обстоятельств, обеспечивали гладкие кривые, удобные для промышленности, в основном решили, что прерывистость была связана с несовершенством испытательных машин и имеет малое или во всяком случае не фундаментальное значение.

Ссылаясь на работы Савара 1837 г. и Массона 1841 г. как на первоисточники в экспериментальном изучении этого явления, я рассматривал результаты опытов первого из них по растяжению

медных полос длиной 0,8 м, приведенные на рис. 4.177 (оригинальные данные были табулированы) и комментарии второго при описании опытов Савара, которые, как я показал в разделе 2.11, Массон сравнивал со своими собственными более поздними опытами с такими же образцами. В своем показательном опыте (рис. 4.177) Савар измерял деформации в восьми различных сечениях образца, получив при этом данные, свидетельствовавшие о неоднородности и прерывистости. Поскольку меня интересовала функция отклика всего образца в целом, я начертил усредненные результаты этого опыта, изображая опытные данные в системе осей координат $\sigma^2$ и $\varepsilon$ (рис. 4.178). Параболический характер функции отклика,

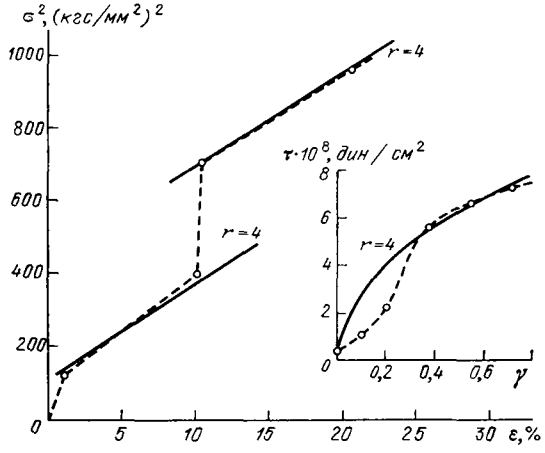



Рис. 4.178. График зависимости $\sigma^2$ от $\varepsilon$ для усредненных данных опыта с медной проволокой, показывающий связь между результатом, соответствующим формуле (4.25), и первым наблюдением прерывистости по Савару — Массону (1837) при нагружении мертвой нагрузкой. На вставке (правый график) показана подобная прерывистость при испытании монокристалла меди, выполненном Элам в 1926 г.

полученной в этом опыте, выполненном 135 лет назад, соответствует индексу формы $r=4$ в формуле (4.25), что хорошо описывает, по моим наблюдениям, результаты почти каждого экспериментатора, изучавшего конечные деформации образцов из поликристаллической отожженной меди при комнатной температуре. В рис. 4.178 я включил вставку с результатами опытов при сдвиге для монокристалла меди — зависимость определяющего касательного напряжения $\tau$ от $\gamma$, полученную Элам (Elam [1926, 1], см. также Taylor [1934, 3]) в 1926 г., которая при использовании параболической аппроксимации Белла с индексом формы $r=4$ также демонстрирует ту же прерывистость деформации, что и в опытах, проведенных Саваром с поликристаллической медью на 89 лет раньше.

Савара интересовала возможность объяснения на основании квазистатических опытов смещений в положении узлов, которые он наблюдал при колебаниях таких тел. Это было продолжением работ Хладни (Chladni [1787, 1]), которым Савар был поглощен большую часть жизни. Мне пришлось с большим сожалением опустить в настоящем сочинении описания его, а также Хладни, интенсивного и замечательного экспериментального изучения коле-

баний тел, так же как и более поздние работы лорда Рэлея в этой области. Среди необычайно большого числа статей, опубликованных Саваром, я не смог найти результатов опытов, на которые Массон ссылался, когда он приписывал Савару утверждение о том, что наблюдавшиеся явления прерывистости были фундаментальным свойством при деформировании и что дальнейшее изучение их важно для понимания физики твердого тела.

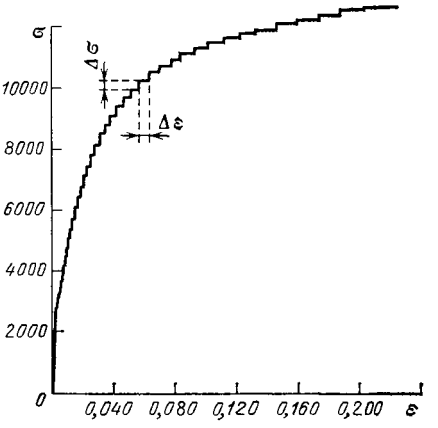



Рис. 4.179. Опыт Белла № 1219 (1968). Типичное проявление эффекта Савара — Массона при растяжении поликристаллического отожженного алюминиевого образца с постоянной скоростью изменения напряжений.

В 1912 г. В. Розенхайн и С. Л. Арчбут (Rosenhain and Archbutt [1912, 1]), вопреки превалировавшему мнению того времени, описали флуктуации в напряжениях, которые в действительности являются формой проявления прерывистости в условиях применения жестких испытательных машин, как свойство, имеющее место при конечной деформации некоторых не содержащих железа сплавов. Портвен и Ле Шателье (Portevin et Le Chatelier [1923, 1]) предприняли в 1923 г. первую попытку изучения прерывистости, рассматривая его как основную цель работы, и это через 86 лет после утверждения Савара о том, что указанный вопрос имеет фундаментальное значение. Портвен и Ле Шателье не ссылались на Савара или на Массона. В своих опытах со сплавами: алюминий + +4,5% меди и алюминий + 4,5% меди + 0,5% магния, используя «жесткую» испытательную машину при скорости деформирования 8% в минуту, они заметили появление отметок на образце и эпизодически возникавшие внятные звуки, связанные с появлением каждой ступени прерывистости.

«Жесткая» испытательная машина, в которой задана история деформирования, а нагрузка является регистрируемой переменной, приводит к появлению прерывистостей, имеющих форму, показанную Элам (Elam [1938, 1]) для обычного медленного нагружения алюминиевого сплава (см. рис. 4.119, раздел 4.24). Для (мягкого) нагружения с помощью мертвой нагрузки, когда задана история нагружения, а деформация — регистрируемая переменная, прерывистости проявляются в форме, которую я иллюстрировал на основании одного из моих собственных экспериментов с алюминием низкой чистоты при испытании на растяжения с постоянной скоростью нагружения (рис. 4.179) или на основании опытов на кручение образцов из того же материала при медленном

нагружении, проведенных Диллоном (Dillon [1963, 1], а также [1964, 1], [1966, 1], [1967, 2]) и Кенигом и Диллоном (Kenig and Dillon [1966, 1]), в условиях последовательного, очень малого приращения нагрузки (рис. 4.180).

Скорее обнаруживаются ступени в графике зависимости напряжение — деформация при использовании машин с нагружением мертвой нагрузкой, чем зубчатость в графике этой зависимости при

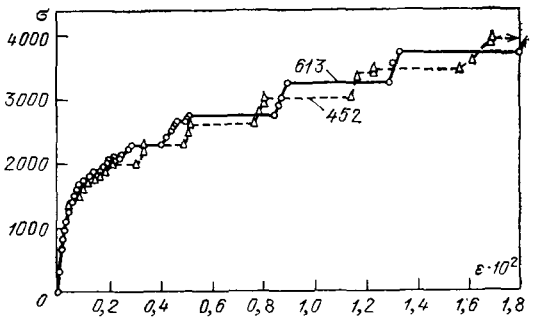



Рис. 4.180. Опыты Диллона (1963). Типичное проявление эффекта Савара — Массона при прерывистом нагруженнн в условиях кручения трубчатых образцов из отожженного поликристаллического алюмнння. По оси ординат отложено напряженне в фунт/дюйм², по оси абсцнсс — деформацня ($\varepsilon \cdot 10^2$).

использовании жесткой испытательной машины; это делает «машины» первого типа более подходящими для изучения прерывистости в протекании деформации образца. Поскольку известны ускорения, которые возникают на каждой ступени $\Delta\varepsilon$, влияние характеристики машины может быть точно определено и при этом показана его пренебрежимая малость. Относительно продолжительное время, требующееся для реализации вертикальной части ступени $\Delta\sigma$, и в случае постоянной скорости непрерывного нагружения, и в случае приращения нагрузки с малым шагом, позволяет точно определить значение малого приращения нагрузки, необходимого для осуществления шага при заданном значении полной конечной деформации.

В двадцатом столетии первым экспериментальным исследованием прерывистых шагов при (мягком) нагружении мертвой нагрузкой была работа Хансона и Уилера (Hanson and Wheeler [1931, 1]), выполненная в 1931 г. и все еще продолжающая быть одной из наиболее важных. На протяжении примерно полутора лет (573 дней) они добавляли с интервалами во времени очень малые грузы к растягиваемому образцу из поликристаллического алюминия, получая результаты, показанные на рис. 2.16 в гл. II раздел 2.11. Числа на рис. 2.16 показывают количество дней в пределах каждого интервала. В одном из случаев в течение 153 дней образец, ранее испытывавший ползучесть при постоянной нагрузке, оставался в условиях постоянной деформации.

Томия Сутоки (Sutoki [1941, 1]) в 1941 г. выполнил ряд опытов с углеродистой сталью разного состава, дюралюминием, медью, латунью, никелем, алюминием, цинком и монокристаллами железа. Поскольку он использовал «жесткую» испытательную машину, невозможно отделить влияние машины от проявления свойств материала, так что его результаты, как и результаты Портвена и Ле Шателье и Элам, были только качественными. Температура окружающей среды колебалась от температуры жидкого азота до температуры красного каления испытываемого материала. Сутоки выполнял опыты на стандартной пятитонной испытательной машине со скоростями удлинения в диапазоне от 0,01% в минуту до 0,1% в минуту. Он обнаружил, что предшествовавшая термическая история наряду с уровнем температуры среды влияла на амплитуды зубцов. В последнем случае зубцы иногда были видны только в определенном диапазоне температур, и на сам этот диапазон влияла предшествовавшая термическая история.

Плодотворнее, чем описание более или менее случайных наблюдений зубцов, выполненных Сутоки, является проверка результатов первого глубокого научного исследования эффекта Савара — Массона, проведенного Эндрю А. МакРейнольдсом [1]) в 1949 г. (McReynolds [1949, 1]). Опыты МакРейнольдса с использованием машины с мягким нагружением мертвой нагрузкой проводились при различной температуре окружающей среды. Его опыты послужили моделью для большей части интенсивно проводившихся в 60-х гг. исследований феномена ступенек. Большинство основных свойств прерывистости конечной деформации было обнаружено впервые МакРейнольдсом, включая его фундаментальное открытие медленной волны, которая сопутствует прерывистому деформированию и теперь носит его имя.

МакРейнольдс в своих первых опытах проверял влияние чистоты материала на саму возможность обнаружения прерывистых шагов, а в случае наличия таковой на их величину при комнатной температуре. Результаты двух опытов с алюминием низкой чистоты (2S) и с алюминием высокой чистоты приведены на рис. 4.181. Для алюминия высокой чистоты ступеньки были видны только тогда, когда нагрузка на каждом уровне ее значений оставалась постоянной в течение 15 минут. Это, конечно, соответствует эффекту, открытому для стали Тарстоном в 1873 г. (Thurston [1873, 1]). Оба эксперимента МакРейнольдса были проведены в условиях простого растяжения с (мягким) нагружением мертвой нагрузкой при одинаковой постоянной скорости повышения напряжений 120 (фунт/дюйм$^2$)/мин.

---

[1]) Если бы следовало присвоить этому эффекту имя ученого XX века и забыть о Саваре и Массоне, то определенно нужно было бы выбрать имя МакРейнольдса в соответствии с его четким анализом или Хансона и Уилера в соответствии с их приоритетом в опытах с (мягким) нагружением мертвой нагрузкой.

Во второй серии опытов МакРейнольдс проверял влияние температуры окружающей среды на эффект Савара — Массона в поликристаллическом алюминии низкой чистоты также при растяжении с той же постоянной скоростью повышения уровня напряжений. Он установил, что в опытах с алюминием возможность

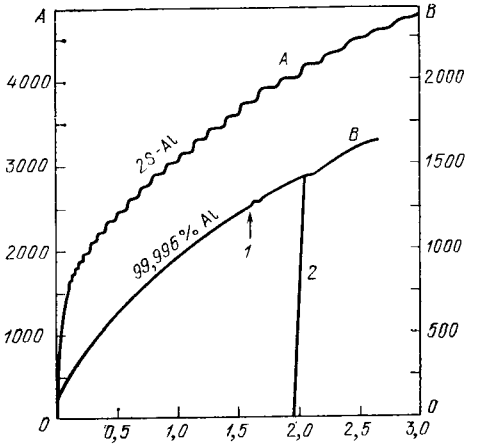



Рис. 4.181. Сравнение прерывистости деформации для алюминия низкой и высокой чистоты по МакРейнольдсу (1949). Скорость нагружения была постоянной — равной 120 (фунт/дюйм²)/мин. По оси абсцисс отложена деформация в процентах. По оси ординат — напряжение в фунт/дюйм². Шкала *A* (для алюминия 2S-Al — график *A*) — напряжение в фунт/дюйм²; шкала *B* (для алюминия чистоты 99,996% — график *B*) — напряжение в фунт/дюйм²; *1* — на уровне, соответствующем этой точке, постоянная нагрузка выдерживалась в течение 15 мин, *2* — разгрузка. (В оригинале книги для шкалы *B* ошибочно указано — деформации в %.— *А. Ф.*)

обнаружения ступенек (т. е. их визуальная различимость при (мягком) нагружении мертвой нагрузкой зависит от температуры окружающей среды так же, как это показал ранее Сутоки для

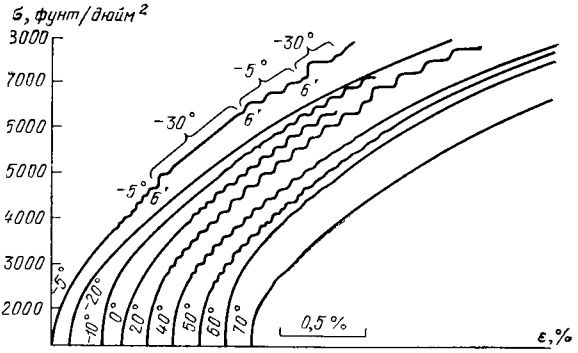



Рис. 4.182. Демонстрация зависимости прерывистости деформации от температуры окружающей среды для алюминия низкой чистоты по МакРейнольдсу (1949).

ряда других металлов по «зубчатости» диаграмм, полученных на «жесткой» испытательной машине. Результаты МакРейнольдса приведены на рис. 4.182.

МакРейнольдс изучал также эффект внезапного ступенчатого изменения скорости нагружения при четырех уровнях постоянных значений скорости в диапазоне от 44 фут/мин до 257 фут/мин и

влияние старения, осуществляющегося путем выдерживания образца в течение 20 ч при 1000° F. Во всех случаях он обнаружил, что различия в проявлении ступенчатости для алюминия низкой частоты пренебрежимо малы.

Главное открытие в работе МакРейнольдса было получено на основании одновременного наблюдения за показаниями четырех электротензометрических датчиков сопротивления, расположенных на равных расстояниях вдоль образца. При одновременной записи выходных данных этих приборов, в условиях постоянной скорости нагружения с помощью мертвой нагрузки, он наблюдал поведение образца, показанное на рис. 4.183. Эти данные продемонстрировали то, что горизонтальная площадка ступеньки $\Delta\varepsilon$ возникла в первой точке расположения датчика и перемещалась вдоль образца со скоростями, которые от одной ступеньки до другой изменялись в диапазоне от 0,5 до 80 см/с.

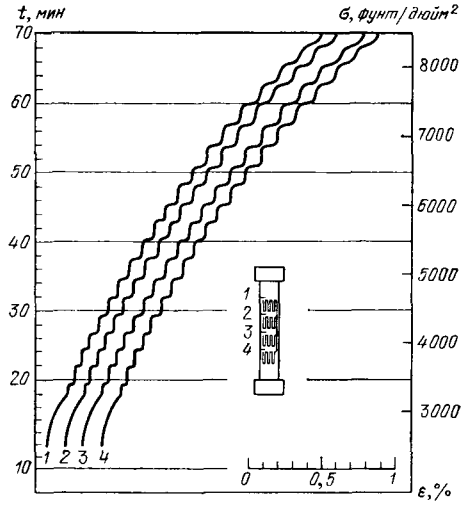



Рис. 4.183. Результаты выполненных МакРейнольдсом (1949) измерений параметров, позволяющих обнаружить проявление прерывистости деформации в указанных позициях по длине образца. На основании этих данных были открыты медленные волны МакРейнольдса. Номера кривых (*1—4*) соответствуют номерам сечений (*1—4*) на образце.

Было высказано много объяснений прерывистого поведения, включая: гипотезу диффузии — вакансий растворенных атомов, предложенную Коттреллом в 1953 г. (Cottrell [1953, 1]); предположение о нестабильности скорости деформирования, высказанное в исследовании Лемприера, который в 1962 г. (Lempriere [1962, 1]), возвращаясь к прошедшим десятилетиям, пришел к следующему заключению: «Представляется, что эффект Портвена — Ле Шателье обязан своим происхождением явлению нестабильности характеристик скорости деформирования определенных материалов, что допускает колебания испытательной машины» (стр. 183); предположение о наличии аналога трения по Кулону, сформулированное Саулом Боднером и Розеном в 1967 г. (Bodner and Rosen [1967, 1]), согласно которому «приостановление движения» зависит от наличия отрицательной скорости деформации и гипотезу волнового движения частиц, предложенную Эдвином Р. Фитцджеральдом в 1966 г. (E. R. Fitzgerald [1966, 1]). По той или иной причине ни одно из этих предложенных объяснений не совпадает с большей частью известных физических фактов. На рис. 4.184 показаны графики

значений приращений напряжения и деформации в зависимости от уровня напряжения, при котором имеет место ступенька. При сопоставлении экспериментальных данных МакРейнольдса (McReinolds [1949, 1]) с результатами опытов, выполненных позднее, следует напомнить, что вследствие ограниченности характеристик использованных им электротензометрических датчиков сопротивления ему удавалось измерить при комнатной температуре наибольшие деформации, которые были только около 3%, а при 170°C «полезный диапазон деформаций составлял только 1—1,5%» (McReynolds [1949, 1], стр. 35). Так же как и другие исследователи до него, МакРейнольдс отметил, что вместе с прерывистостью деформирования на образце появляются следы.

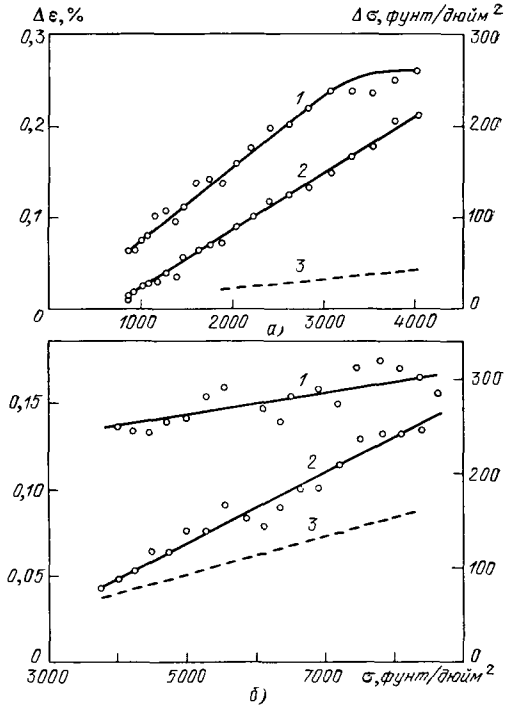



Рис. 4.184. Графики МакРейнольдса (1949) зависимости параметров ступенек $\Delta\sigma$ и $\Delta\varepsilon$ от $\sigma$: *а*) для сплава алюминия с 0,5% меди и *б*) для алюминия низкой чистоты (2S-Al); *1* — напряжения, *2* — деформации, *3* — упругие деформации. По оси абсцисс отложены напряжения в фунт/дюйм².

В опытах МакРейнольдса значения деформаций усреднялись в пределах малых областей образца. В отличие от него, Уильям Н. Шарп (Sharpe [1966, 1]) и я (Bell [1968, 1]) в опытах, выполненных на семнадцать лет позднее, измеряли конечные деформации в значительно большей зоне при помощи прижимного тензометра-скобы и получили воспроизводимые от опыта к опыту результаты.

В своей докторской диссертации 1966 г. Шарп сравнивал результаты, полученные при использовании прижимных тензометров-скоб для трех опытов с поликристаллическим алюминием низкой чистоты марки 1100 F-H 18, который был отожжен в течение двух часов при температуре 1100 °F и охлаждался вместе с печью. Результаты трех опытов по растяжению образцов длиной 4 дюйма и диаметром 0,5; 0,375 и 0,25 дюйма, полученные при использовании прижимных тензометров-скоб при постоянной скорости нагружения ($\dot{\sigma}=5$ (фунт/дюйм$^2$)/с), показаны на рис. 4.185. Опыты не только продемонстрировали воспроизводимость результатов, но, помимо этого, при изменении диаметров образцов наглядно показали, что прерывистость происходит не вследствие взаимодействия между образцами и испытательной машиной.

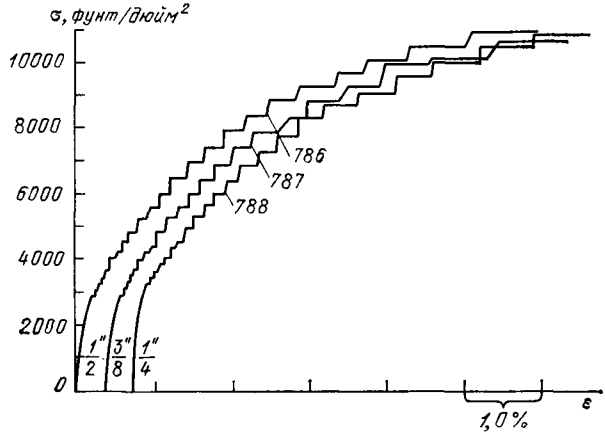



Рис. 4.185. Результаты опытов Шарпа (1966) на растяжение (при нагружении мертвой нагрузкой) образцов из алюминия низкой чистоты, имеющих три различных диаметра. Результаты опытов в силу их воспроизводимости указывают на отсутствие зависимости прерывистости деформации от размеров поперечного сечения образца и от испытательной машины; $\frac{1''}{2}$, $\frac{3''}{8}$ и $\frac{1''}{4}$ указывают на размер диаметра образца, к которому относится соответствующий график.

В двух статьях, переданных в редакцию «Журнала Института металлов», с интервалом в восемь дней — Крупника и Хью Форда (Krupnik and Ford [1953, 1]) а также В. А. Филлипса, Свейна и Эборелла (V. A. Phillips, Swain and Eborall [1953, 1]), авторы сообщают об исследованиях, выполненных по методике МакРейнольдса при помощи мягкого нагружения мертвой нагрузкой образцов из алюминиевых сплавов и сплавов алюминия и магния соответственно. Крупник и Форд рассматривали поликристаллы дюралюминия, сплавы алюминия: содержащего 1,35% меди или содержащего 3,83% меди, и, наконец, 65% алюминия и 35% магния. Измерения проводились при помощи индикатора с круговой шкалой и ходом до 1 $^5/_{32}$ дюйма, и в этих условиях удлинения образца могли

соответствовать деформации, равной 10%, что значительно превышало максимальные деформации в опытах МакРейнольдса, которые, как отмечалось выше, были в диапазоне 1,5—3%, с другой стороны, считывание показаний об удлинении по циферблату индикатора «каждые 5 или 10 с в зависимости от скорости нагружения» (см. Krupnik and Ford, стр. 602) также являлось фактором, ограничивающим точность в новых опытах.

Оборудование было оснащено рычажной системой, как и в опытах МакРейнольдса, и таким же образом, с помощью наливания воды в емкость, Крупник и Форд добивались постоянной скорости нагружения. Для более высоких скоростей нагружения показания циферблата индикатора и секундомера снимались на кинопленку, их показания связывались с постоянной скоростью наполнения емкости водой, чтобы обеспечить синхронность регистрации напряжений и деформаций.

В этом повторении опыта МакРейнольдса, но для других материалов, единственным новым результатом наблюдений являлось то, что при повышении уровня постоянной скорости нагружения в 46 раз от 0,027 до 1,235 (тс/дюйм²)/с (а соответственно и скоростей деформирования), Крупник и Форд для сплава алюминия с 1,5% меди обнаружили отсутствие заметных изменений в ступеньках и в самой зависимости σ — ε, на которую накладывались ступеньки,

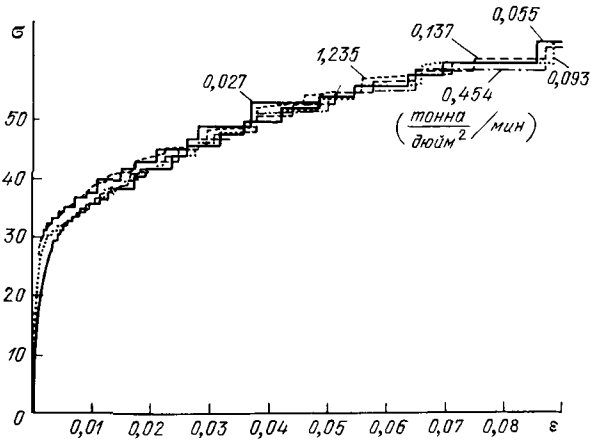



Рис. 4.186. Опыты Крупника и Форда (1953) по растяжению при помощи мертвой нагрузки поликристаллических образцов из сплава алюминия с 1,35% меди, показывающие воспроизводимость, полученную в условиях широкого изменения уровня постоянной скорости нагружения. По оси абсцисс отложена условная деформация ε, по оси ординат σ — условное напряжение в кгс/мм².

как это видно на рис. 4.186. Для ряда других материалов при увеличении скорости нагружения высота ступенек уменьшалась вплоть до того, что функции отклика соответствовал гладкий график.

Столь же интересным является итог моего наблюдения при повторном рассмотрении этих результатов. Нанося информацию на

плоскость в осях $\sigma^2$ и $\varepsilon$ в виде линии (см. кружки на рис. 4.187), проведенной через нижние точки ступенек, можно показать (это теперь твердо установленный факт), что ступеньки эффекта Савара — Массона при мягком нагружении мертвой нагрузкой соответствуют отклонению вверх от графика $\sigma^2$—$\varepsilon$ (сплошная линия) моей параболической функции $\sigma$ — $\varepsilon$ (см. формулу (4.25)) и возвращению к этому же графику. Для этого сплава переход второго порядка происходит при всех скоростях деформирования от индекса формы $r=3$ к $r=4$, вблизи значения деформаций второго перехода, определяемого по формуле (4.26) при $N=13$.

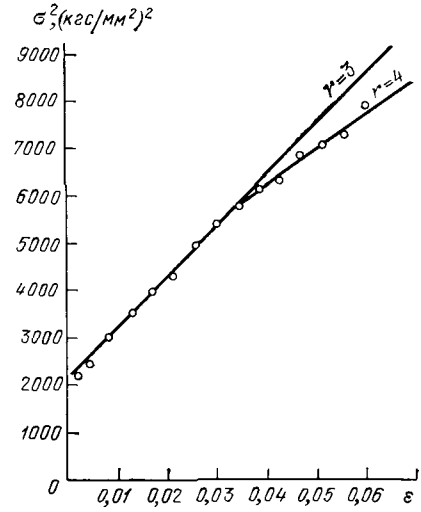


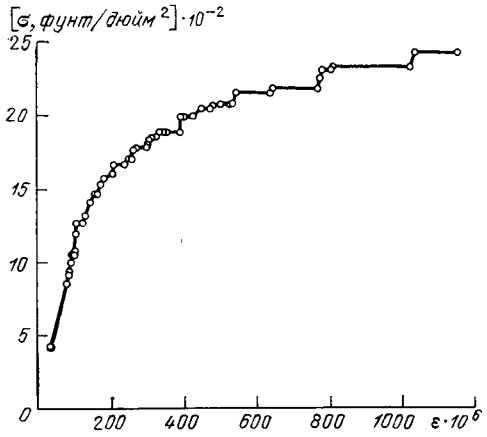

Рис. 4.187. Общая огибающая для результатов опытов (кружки) Крупника и Форда с поликристаллическими образцами из сплава алюминия с 1,35% меди (рис. 4.186) в координатах $\sigma^2$—$\varepsilon$, сравниваемая с предсказываемой (сплошная линия) на основании параболической обобщенной функции отклика Белла (условное напряжение — условная деформация (формула (4.25)). По оси абсцисс отложена номинальная деформация, по оси ординат — квадрат номинального напряжения в $(кгс/мм^2)^2$.

В статье В. А. Филлипса, Свейна и Эборелла (V. A. Phillips, Swain and Eborell [1953, 1]) рассматривался другой аспект эксперимента МакРейнольдса, а именно — возникновение на поверхности образцов из алюминиевых сплавов следов, сопровождавшее появление прерывистости. Они различали два типа следов на поверхности образцов, имеющих форму полос и изготовленных из алюминиево-магниевого сплава с содержанием магния 3,5%.

При мягком нагружении мертвой нагрузкой в условиях увеличения нагрузки малыми порциями, происходящего через регулярные или нерегулярные интервалы времени, наибольшая часть времени при проявлении лестничного очертания графика зависимости напряжения — деформации расходуется на преодоление вертикальной части ступеньки высотой $\Delta\sigma$. Когда происходит продвижение по горизонтальному участку длиной $\Delta\varepsilon$, постепенное увеличение деформаций имеет место при постоянном напряжении, сначала это увеличение быстрое и в конце наблюдается медленное приближение к соответствующей точке параболического графика

функции отклика, причем после этого за периоды наблюдения, продолжающиеся много часов или дней, дальнейшего увеличения деформаций не обнаруживается.

Впервые изучение временно́го изменения деформаций в аспекте поведения величины $\Delta\varepsilon$ было изучено Беллом и Штейном в 1962 г. (Bell and Stein [1962, 7]). В этих опытах впервые наблюдался эффект Савара — Массона при сжатии. Они проводились на рычажных испытательных машинах при мягком нагружении мертвой нагрузкой в течение пяти дней с приращением напряжений на 0,006 кгс/мм² через интервалы времени порядка 30 мин. Для одной из ступеней опыта, результат которого показан на рис. 4.188, была описана картина изменения деформации во времени (рис. 4.189). Какой бы ни была природа механизма, который вызывает вертикальные отклонения от графика параболической зависимости напряжение — деформация, возвращение к этой основной кривой



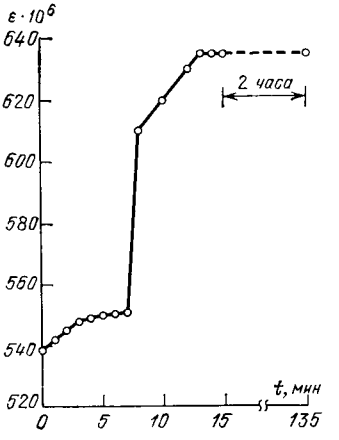




Рис. 4.188. Опыты Белла и Штейна (1962) по сжатию образцов из отожженного поликристаллического алюминия на машине с нагружением мертвой нагрузкой. Испытания в полиом объеме проводились в течение пяти дней, а на рисунке показаны результаты только первого опыта при наибольшей деформации, равной 1200 мкдюйм/дюйм. Приращения нагрузки осуществлялись с большими интервалами и составляли 9 фунт/дюйм². Те несколько приращений напряжений, которые, складываясь, образовывали одиу вертикальную ступень, не показаны. Изображена лишь точка, соответствующая сумме этих приращений.

Рис. 4.189. Опыты Белла и Штейна (1962). Зависимость изменения деформаций во времени при постоянном напряжении для горизонтальной части типичной ступени кривой напряжение — деформация, изображениой на рис. 4.188.

путем приращения $\Delta\varepsilon$ при постоянном $\sigma$, как показано, происходит во времени совсем не просто. В дальнейших исследованиях, которые будут коротко описаны ниже, максимальный угол наклона графика зависимости приращений деформаций от времени, т. е. наибольшая скорость этих приращений, в противоположность обычно анализируемой средней скорости деформации, оказался зависящим, как мне удалось обнаружить в 1968 г., от значений напряжений.

Изучение нарастающих волн, проводившееся Беллом и Штейном, которое также было частью нашего исследования 1962 г., и мои последующие опыты 1971 г. выявили связь между наивысшей скоростью нарастающих волн (раздел 4.34) и эффектом Савара — Массона, даже когда динамическое предварительное напряжение оставалось постоянным в течение такого короткого промежутка, как 10 мкс. При проведении квазистатических опытов продолжительность нарастания деформаций была значительно большей, как это продемонстрировали измерения приращений $\Delta\varepsilon$ во времени,

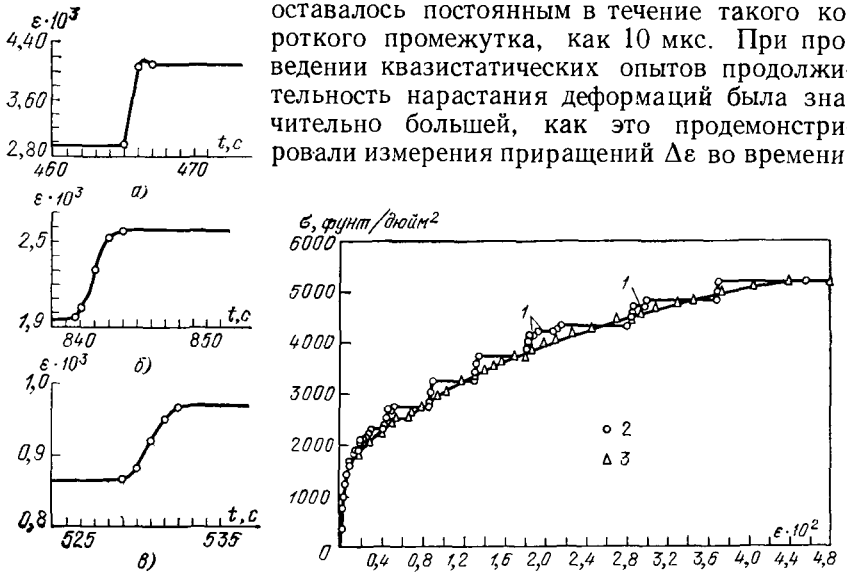



Рис. 4.190. Опыты Диллона (1963). Типичный характер зависимости скачков деформаций от времени. Время регистрировалось, начиная от момента окончания последнего приращения нагрузки. Образец подвергался кручению. *а*) $\tau=2280$ фунт/дюйм², $\Delta\gamma=1{,}22\cdot10^{-3}$; *б*) $\tau=2050$ фунт/дюйм², $\Delta\gamma=0{,}19\cdot10^{-3}$; *в*) $\tau=1670$ фунт/дюйм², $\Delta\gamma=0{,}13\cdot10^{-3}$.

Рис. 4.191. Опыты Диллона (1963). Очень медленное и умеренно медленное нагружение скручиваемых полых трубчатых образцов из алюминия низкой чистоты; из этих данных были получены фрагменты для рис. 4.190; *1* — ползучесть, *2* — очень медленное нагружение (на протяжении трех недель), *3* — умеренно медленное нагружение.

выполненные Диллоном в 1963 г. (Dillon [1963, 1]) в опытах на кручение. Результаты Диллона, полученные в опытах с полностью отожженным алюминием низкой чистоты, показаны на рис. 4.190 при приращениях типа изображенных на рис. 4.191 в условиях очень медленного нагружения (продолжительностью в 3 недели) и умеренно медленного нагружения. Нагрузка, которую он прикладывал с интервалами во времени, состояла из насыпаемой в емкость свинцовой дроби.

В 1964 г. Диллон опубликовал результаты детального изучения «медленной волны», открытой МакРейнольдсом пятнадцатью годами ранее. Диллон (Dillon [1964, 1]) использовал 5 электротензометрических датчиков сопротивления, расположенных с шагом, равным 3,81 см, вдоль трубки диаметром 1,27 см со стенками толщиной 0,149 см, изготовленной из полностью отожженного алю-

минии. Датчики, последовательно расположенные от одного конца образца до другого, имели обозначения $G_1$, . . ., $G_5$. В качестве примера на рис. 4.192 показаны результаты одного из опытов с медленными волнами, выполненного Диллоном при предварительном напряжении, равном 4300 фунт/дюйм².

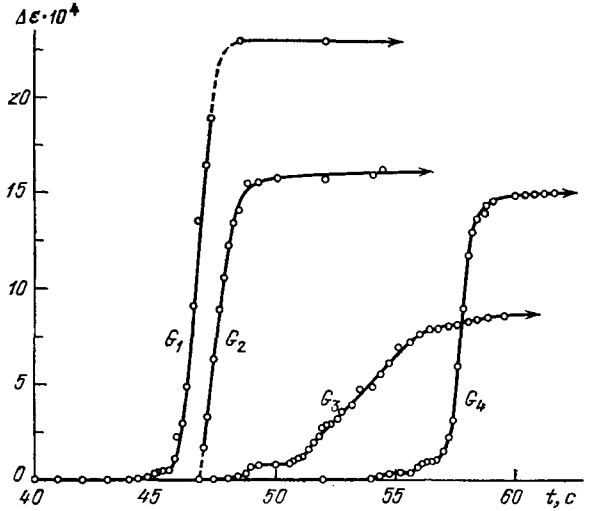



Рис. 4.192. Опыты Диллона (1964). Изменение деформаций во времени в четырех сечениях образца, демонстрирующее детали медленной волны МакРейнольдса на участке одной ступени прерывистой диаграммы σ—ε. Просверленная трубка (655); напряжение — 4300 фунт/дюйм²; средняя деформация изменялась от 0,0240 до 0,0257. По оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат — изменение деформации ·10⁴.

Результаты дополнительных экспериментальных исследований этого важного явления были сообщены Диллоном (Dillon [1966, 1]) и Кенигом и Диллоном (Kenig and Dillon [1966, 1]) в том же году. Они показали порядок обнаруженных ими малых скоростей (несколько см/с) волн и возможность генерирования таких волн в одной точке и распространения их в любом направлении; в немногих случаях они могут быть поглощены на участке между позициями, в которых производятся измерения.

Феномен ступенчатости или эффект Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье) при мягком нагружении мертвой нагрузкой для любого монокристалла или поликристаллического тела состоит в отклонении от графика основной параболической функции отклика посредством вертикального шага $\Delta\sigma$ и возвращения к графику этой зависимости горизонтальным смещением $\Delta\varepsilon$. Все результаты, изображенные на рис. 4.95, приведенном выше, в разделе 4.21, относящихся к опытам с отожженным алюминием, в которых деформация изменялась, начиная от нуля вплоть до значения 0,0414, отвечающего переходу второго порядка, соответствовали единому значению индекса формы $r=3$ параболической

зависимости напряжение — деформация. Тем не менее для тех же самых опытов, как показано на рис. 4.193, на основании моих данных (Bell [1968, 1]) и данных Шарпа (Sharpe [1966, 1, 2]) наибольший пик имеет место при первой деформации перехода $\varepsilon_N=0{,}015$, хотя никакого перехода второго порядка от одного значения индекса формы к другому в параболической зависимости напряжение — деформация не встречается. Очевидно, что наличие этого значительного пика при деформации первого перехода при отсутствии соответствующего перехода второго порядка у параболической функции отклика очень важно для понимания этих переходов.

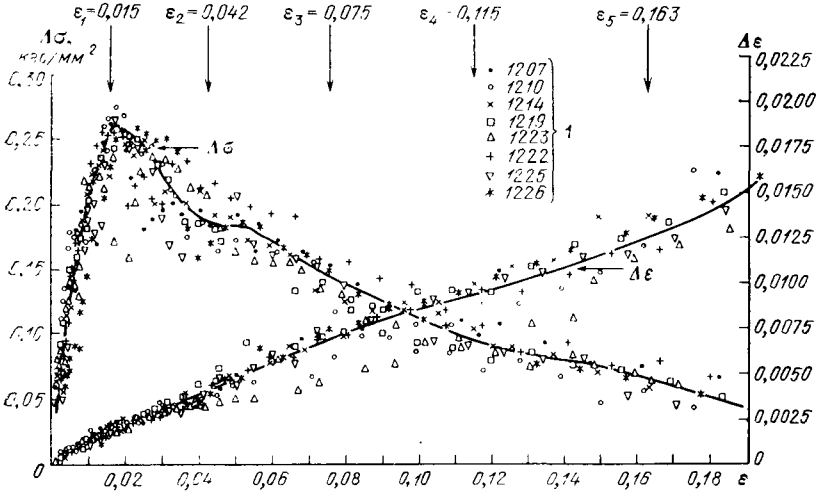



**Рис. 4.193.** Опыты Белла (1968). Графики зависимостей $\Delta\sigma$ и $\Delta\varepsilon$ от $\varepsilon$ (скачки в условиях прерывистой деформации) для поликристаллического отожженного алюминия чистоты 99,16% при 300 К. Заметен пик при деформации перехода первого порядка, равной 0,015 ($N=18$), хотя при этом переход второго порядка не имеет места вплоть до деформации перехода второго порядка, равной 0,0414 (см. рис. 4.59); *1* — номера опытов.

Кроме того, приращение деформации $\Delta\varepsilon$ изменялось приблизительно линейно в зависимости от деформации; соответствующий график претерпевает изменение угла наклона касательной к нему при той же деформации перехода первого порядка $\varepsilon_N=0{,}015$ (где $N=18$). Линейное соотношение $\Delta\varepsilon=K\varepsilon+C$, отмеченное Шарпом для алюминия, было установлено также для меди и для $\alpha$-латуни. Приращение напряжения $\Delta\sigma$ как функция полной деформации заметно изменяется при переходе от одного материала к другому.

То, что ступенчатая диаграмма $\sigma-\varepsilon$ Савара — Массона накладывалась на график моей теоретической параболической зависимости $\sigma-\varepsilon$ при III стадии работы материала и индексе формы $r=6$, было показано в моем эксперименте (результаты изображены на рис. 4.194, *а*) по сжатию монокристалла алюминия с чистотой 99,99%, проводившемся в условиях (мягкого) нагружения

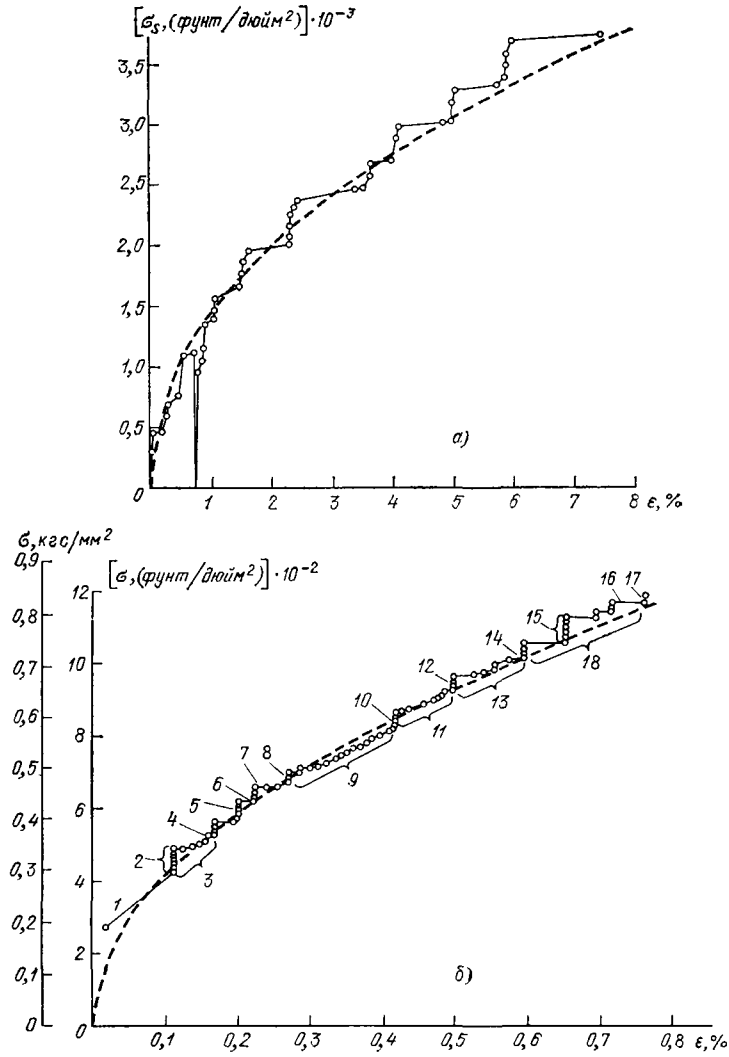



Рис. 4.194. *а*) График (ступенчатая сплошная линия) зависимости напряжений от деформаций при нагружении образца из монокристалла алюминия чистоты 99,99% (опыт 16) постепенно увеличивающимся мертвым грузом при 323 К; сравнение с параболической зависимостью с предполагаемым индексом формы $r=6$ (график этой зависимости изображен штриховой линией); *б*) график, построенный по данным эксперимента (кружки и сплошная линия) с образцом из монокристалла алюминия высокой чистоты (99,99%) в условиях воздействия последовательно нарастающей в течение 357 ч (с 18 апреля по 3 мая 1962 г.) сжимающей силы (83 приращения напряжения по 0,0067 кгс/мм²; 386 инструментальных наблюдений), иллюстрирующий эффект Савара — Массона при $\dot{\varepsilon}_{\text{средн}}=6\cdot10^{-8}$ с$^{-1}$, штриховая линия — теоретическое предсказание согласно параболической зависимости Белла (при индексе формы $r=6$, $\beta_{r0}=4{,}82$ кгс/см²); *1* — 4 ч, *2* — 3 ч, 6 измерений, *3* — 13 приращений с интервалом 0,5 ч, *4* — 11 ч при зафиксированном напряжении, *5* — 20 ч при зафиксированном напряжении, *6* — 66 ч при зафиксированном напряжении, *7* — 15 с ($\dot{\varepsilon}=2{,}25\cdot10^{-6}$ с$^{-1}$), *8* — 17 ч, *9* — 16 приращений за 7 ч, $\dot{\varepsilon}=5{,}5\cdot10^{-8}$ с$^{-1}$, *10* — 16 часов при зафиксированном напряжении, *11* — 11 приращений за 8 ч, *12* — 96 ч при зафиксированном напряжении, *13* — 9 приращений за 8 ч, *14* — 16 часов при зафиксированном напряжении, *15* — 7 ч при зафиксированном напряжении, *16* — ползучесть в течение 60 мин, *17* — 25 ч при зафиксированном напряжении, *18* — 15 приращений за 12,5 ч.

мертвой нагрузкой при комнатной температуре и при 323 К. На рис. 4.194, *б* представлены результаты шестнадцатидневного эксперимента по сжатию при комнатной температуре, проведенного мною в 1962 г. также с монокристаллом алюминия чистоты 99,99%, из которых видно, что при средней скорости деформирования $\dot{\varepsilon}=6\cdot10^{-9}$ $с^{-1}$, ступенчатая диаграмма $\sigma$ — $\varepsilon$ оказывается близкой к графику моей параболической функции отклика $\sigma$ — $\varepsilon$ при обычном для этой температуры значении индекса формы $r=6$. (Стоит подчеркнуть, что коэффициент в параболической функции отклика при средней скорости деформирования $\dot{\varepsilon}=6\cdot10^{-9}$ $с^{-1}$ был получен первоначально по профилям волн конечной деформации в условиях прохождения фронта волны со скоростями деформации $10^3$ и $10^4$ $с^{-1}$, показывая тем самым, что диапазон применимости для этой параболической функции отклика составляет тринадцать десятичных порядков!)

Шарп показал в своей работе, что вообще уровень плотности ступеней быстро возрастает при увеличении суммарной площади границ зерен в единице объема материала. Эффект Савара — Массона может проявляться и в виде двух или трех значительно отличающихся серий ступеней. Для двух типов ступеней в случае поликристаллического алюминия Шарп описал способ, с помощью которого можно их сравнивать, переходя от одного образца к

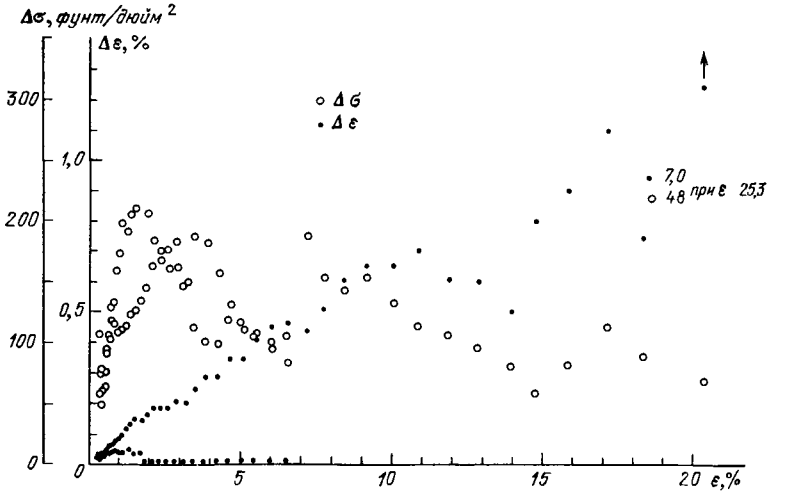



Рис. 4.195. Опыты Шарпа (1966). Данные опытов с образцами из алюминия низкой чистоты при прерывистом нагружении мертвой нагрузкой; две системы ступенек, зависимости высоты ступенек $\Delta\sigma$ и горизонтального размера ступенек $\Delta\varepsilon$ от уровня деформаций. Данные за пределами рисунка: при $\varepsilon=20{,}2\%$, $\Delta\varepsilon=3{,}0\%$; при $\varepsilon=25{,}3\%$, $\Delta\sigma=48$ фунт/дюйм², $\Delta\varepsilon=7{,}0\%$.

другому. На рис. 4.195 изображен пример двух картин ступеней, полученных в опытах Шарпа по растяжению образцов. Моя проверка пика для первого типа системы ступеней показала, что он

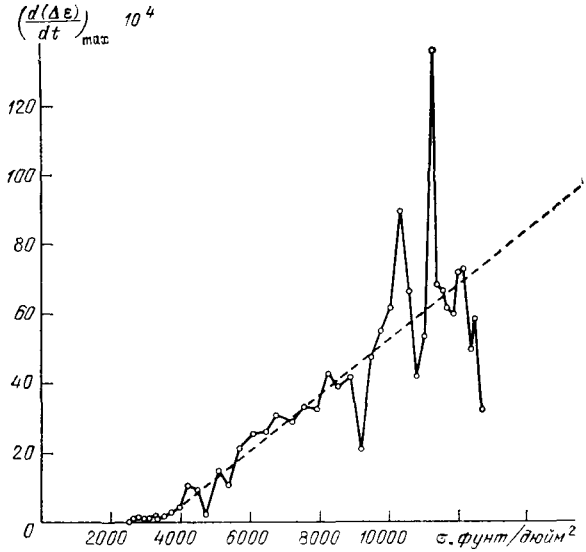



Рис. 4.196. Опыт Белла (1968) (1219). График зависимости наибольшей скорости деформаций от напряжений (сплошная линия) по данным опыта на растяжение образца из отожженного алюминия при постоянной скорости увеличения напряжений. Штриховая линия — график функции $\overline{(\dot{\Delta\varepsilon})}_{max}=8\cdot10^{-7}(\sigma-\sigma_A)$.

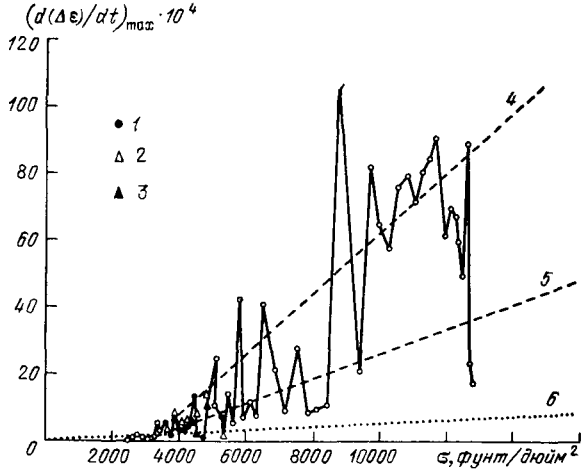



Рис. 4.197. Опыт Белла (1968) (1223). График зависимости наибольшей скорости деформации от напряжения при наблюдении двух систем ступенек эффекта Савара — Массона при испытании образца из отожженного алюминия (сплошная линия); *1* — первый угол наклона графика зависимости для двойной системы ступенек, *2* — второй угол наклона, *3* — третий угол наклона, *4* — график функции $\overline{(\dot{\Delta\varepsilon})}_{max}=9\cdot10^{-7}(\sigma-\sigma_A)$, *5* — график функции $\overline{(\dot{\Delta\varepsilon})}_{max}=3{,}7\times10^{-7}(\sigma-\sigma_A)$, *6* — график функции $\dot{\varepsilon}=\frac{2\dot{\sigma}}{\beta^2}\sigma$.

имеет место при значении первой деформации перехода, равном $\varepsilon_N=0{,}015$ ($N=18$), а что пик второго типа системы ступеней имеет место при деформации, равной $\varepsilon_N=0{,}0414$ ($N=13$), при которой происходил переход второго порядка в параболической функции отклика.

Одно из заключительных исследований прерывистой деформации было посвящено сравнению измеренной наибольшей скорости деформаций $(d(\Delta\varepsilon)/dt)_{\max}=\overline{\dot{\Delta\varepsilon}}$ на протяжении горизонтальной части ступеньки $\Delta\varepsilon$ с уровнем напряжения, при котором эта ступенька имела место. На рис. 4.196 приведено такое сравнение, о котором я сообщил, обсуждая эксперимент, где наблюдался один тип системы ступеней, а на рис. 4.197 — сравнение для случая, когда обнаружились два типа системы ступеней. Дополнительные данные о появлении и распаде одного, двух и даже трех типов систем ступеней в процессе конечной деформации приведены в статье Шарпа и в моей статье.

Ко времени написания настоящей книги все еще нет удовлетворительного объяснения эффекта Савара — Массона, проявления которого совсем недавно начали и продолжают интенсивно изучать во многих лабораториях. В области динамической пластичности основополагающая гладкая параболическая функция отклика определяет распространение волн при конечной деформации. Независимо от $\Delta\sigma$ — размера высоты ступеньки, все еще продолжает быть предметом предположений источник стеснения, в течение действия которого накапливается количество энергии, достаточное для совершения деформации $\Delta\varepsilon$ (без роста напряжений — горизонтальный участок ступеньки) такой, что по завершении ее точка ступенчатого графика зависимости напряжение — деформация в точности располагается на лежащей ниже параболической кривой, отвечающей функции отклика, и удерживается в этом положении в течение часа, суток и т. д., если не возрастает уровень напряжений.

### 4.32. О предсказании вида функции отклика и значения деформации перехода второго порядка в поликристаллическом теле по известной картине деформации монокристалла

Как только в 1923 г. стала известной функция отклика для определяющего касательного напряжения в монокристалле (касательного напряжения, достижение которым значения предельного напряжения вызывает сдвиг в монокристалле) $\tau=f(\gamma)$, возникла интересная мысль о возможности теоретического построения функции отклика для поликристаллического тела при условии создания соответствующей теории. Если не учитывать сделанного в 1928 г. примитивного предложения Захса (Sachs [1928, 1]), пренебрегшего непрерывностью напряжений и деформаций на грани-

цах зерен и просто суммировавшего множители Шмида или коэффициенты ориентации на основании предположения о случайности ориентации зерен, прошло пятнадцать лет, прежде чем Тэйлор предложил свою теорию поликристаллов в 1938 г. (Taylor [1938, 1, 2]).

Для оценки конечных целей теории поликристалла проще всего начать с того, что было найдено из опыта (Bell [1961, 1], [1962, 5], [1964, 1], [1965, 2], [1968, 1]). В эксперименте были получены формулы для определяющего касательного напряжения [1]):

$$\tau = \beta_s \gamma^{1/2},$$

причем

$$\int_0^\gamma \tau \, d\gamma = \frac{2}{3} \tau\gamma,$$

а также отношения напряжений и деформаций

$$\sigma/\tau = \bar{m} = \gamma/\varepsilon, \tag{4.60}$$

где $\sigma$ и $\varepsilon$ — условные напряжение и деформация в опытах на одноосное растяжение или сжатие поликристаллов. Подобным же образом для случая кручения поликристалла получены отношения (4.61), связывающие $S$ и $s$ — касательные напряжения и деформацию сдвига,

$$S/\tau = \bar{n} = \gamma/s, \tag{4.61}$$

коэффициенты поликристалличности $\bar{m}$ и $\bar{n}$ являются константами поликристалла.

Таким образом, поскольку из зависимости $\tau = f(\gamma)$ следует, что $\sigma = \bar{m} f(\bar{m}\varepsilon)$ и $S = \bar{n} f(\bar{n}s)$, то функция отклика для определяющего сдвига получается в виде зависимости (4.62); функции отклика для поликристаллических тел получаем в форме (4.63) и (4.64):

$$\tau = \beta_s \gamma^{1/2}, \tag{4.62}$$

$$\sigma = (\bar{m})^{3/2} \beta_s \varepsilon^{1/2}, \tag{4.63}$$

$$S = (\bar{n})^{3/2} \beta_s s^{1/2}. \tag{4.64}$$

При рассмотрении лишь активной деформации (возрастание уровня нагрузки), когда

$$\int_0^\varepsilon \sigma \, d\varepsilon = \frac{2}{3} \sigma\varepsilon \quad \text{и} \quad \int_0^s S \, ds = \frac{2}{3} Ss,$$

[1]) Как указано в разделе 4.18 (формула (4.24)), коэффициент параболы выражается следующей формулой:

$$\beta_s = \left(\frac{2}{3}\right)^{r/2} \mu(0) \frac{B_0}{(\bar{m})^{3/2}} \left(1 - \frac{T}{T_m}\right).$$

получаем

$$\tau\gamma = \sigma\varepsilon = Ss. \tag{4.65}$$

Захс, пренебрегая в своих расчетах тем, что принятые им модели зерен могут отделяться друг от друга или внедряться друг в друга вследствие поворота, получил значение нижней границы для $\bar{m}=2{,}238$. Тэйлор в 1938 г., введя 12 систем скольжения для гранецентрированной кубической решетки материала, из которых только 5 были независимыми, и предполагая однородность деформаций, однообразный характер деформации зерна и непрерывность перемещений на границах зерен, провел вычисления, основанные на принципе минимума энергии, и получил $\bar{m}=3{,}06$. Дж. Ф. В. Бишоп и Родней Хилл (Bishop and Hill [1951, 1, 2]) в 1951 г. подвергли проверке и развили теорию Тэйлора, выражая решение задачи в терминах касательных напряжений и проводя вычисления на основании принципа максимума виртуальной работы. Они также получили значение $\bar{m}=3{,}06$, ранее найденное Тэйлором, и смогли на основании дополнительных вычислений установить, что применительно к кручению поликристалла $\bar{n}=1{,}65$.

В теории поликристалла следует рассматривать условия и непрерывности и равновесия. В теориях Тэйлора, а также Бишопа и Хилла точно выполняется только первое условие. В 1968 г. Томас Х. Даусон (Dawson [1968, 1], [1970, 1]) выполнил в своей докторской диссертации исследование, которое точно отвечало обоим условиям; вместе с тем Даусон использовал те же гипотезы и выполнил вычисления так же, как и Тэйлор. В результате исследования Даусона, очевидно, имеющего бóльшее основание быть принятым для создания теории, были получены экспериментально неприемлемые значения $\bar{m}=3{,}27$ и $\bar{n}=2{,}08$.

Как было показано мною в разделах 4.18, 4.20—4.22, сравнение экспериментальных результатов сотен опытов с монокристаллами и поликристаллами позволило установить для поликристаллов значения $\bar{m}=3{,}06$, $\bar{n}=1{,}765$. При распространении условий Максвелла — Мизеса на всю зону пластической деформации поликристаллического тела отношение $\bar{m}/\bar{n}$ должно быть равно $\sqrt{3}$. Такое значение точно соответствует полученному в опытах с полностью отожженными поликристаллами. В исследованиях Тэйлора, а также Бишопа и Хилла $\bar{m}/\bar{n}=\sqrt{3{,}44}$, а в работах Даусона $\bar{m}/\bar{n}=\sqrt{2{,}47}$.

Расхождение между экспериментом и гипотезой так велико, что, очевидно, следовало бы разработать иную теорию [1]). Исследование

[1]) Мною проводилось сравнение полученных функций отклика для опытов по растяжению, сжатию и кручению образцов по признаку отношения квадратов коэффициентов параболы, входящих в зависимость (напряжение)$^2$ — деформация. Например, для формулы (4.63) сравнение предсказываемых и наблюдаемых напря-

Даусона отличается особенно значительным расхождением в связи с тем, что по условиям равновесия не допускается поворота зерен при одноосном напряженном состоянии, вывод, наиболее явно не соответствующий опытным наблюдениям в процессе деформации поликристаллов.

Выше, в разделе 4.22, мною показано на основании анализа многих опытов, что условие Максвелла — Мизеса, согласно которому $\bar{m}/\bar{n}=\sqrt{3}$, справедливо только тогда, когда и касательные и нормальные напряжения и деформации как осевая, так и сдвига определены для недеформированного состояния тела. Попытка Тэйлора и Квинни (Taylor and Quinney [1931, 1]) провести сравнение для «истинных» деформаций оставалась безрезультатной (см. рис. 4.60, раздел 4.14) до тех пор, пока мною не был выполнен пересчет данных, как показано на рис. 4.104 в разделе 4.22, после которого была достигнута близкая согласованность не только с условием Максвелла — Мизеса, но также и в представлении функции отклика в количественном отношении согласно формулам (4.25) [(4.63)] и (4.29) [(4.64)]. В своей теории поликристаллических тел Тэйлор предполагал, что и напряжение и деформация при одноосном напряженном состоянии образца должны быть «истинными». Возможно, причиной того, что такое предположение оказывается совершенно несогласующимся с данными опытов, является то, что при определении определяющей деформации монокристалла (формула (4.24) [(4.62)], изменение размеров в процессе деформирования уже было учтено.

Эксперимент исчерпывающе показал, что теория поликристалла с постоянными значениями отношений $\bar{m}$ к $\bar{n}$ вплоть до весьма значительных деформаций может быть достаточно достоверной. Удовлетворительная теория, очевидно, должна быть построена на основании предположений, отличных от рассматривавшихся до настоящего времени.

Рассматривая более поздние эксперименты, для извлечения из них информации, могущей быть полезной для построения теории, отметим, что очевидным источником затруднений при использовании более ранних гипотез было предположение об однородности деформаций в пределах отдельных зерен. Ряд экспериментальных исследований поведения зерен поликристаллов таких, как работы Барре и Левенсона, выполненные в 1940 г. (Barrett and Levenson [1940, 1]), Гринафа в 1952 г. (Greenough [1952, 1]), Бейтмана в 1954 г. (Bateman [1954, 1]), Боаза и Оджилви в 1954 г. (Boas and Ogilvie [1954, 1]), и Розенталя и Групена в 1962 г. (Rosenthal and Grupen [1962, 1]), показал, что зерна поликристаллов

жений содержит $(\bar{m})^3$. Из опыта $(\bar{m})^3=28{,}8$; по Захсу $(\bar{m})^3=11{,}25$ — намного ниже; по Тэйлору [данные, полученные на основе как гипотезы, так и эксперимента совпадают, $(\bar{m})^3=28{,}8$; а [по Даусону значение $(\bar{m})^3=35{,}0$ завышено. Из опытов на кручение $(\bar{n})^3=5{,}5$; по Даусону $(\bar{n})^3=9{,}0$, а по Бишопу и Хиллу $(\bar{n})^3=4{,}49$.

не поворачиваются так, как было предсказано, и что они деформируются неоднородно. Результаты этих исследований показали также, что направления деформаций сдвига не ограничиваются только кристаллографическими плоскостями, предполагаемыми для гранецентрированной кубической кристаллической решетки и что значительны и поверхностные эффекты. Кроме того, напряжения, определенные на основании рентгеноструктурного анализа при одноосной деформации, оказывались не обязательно одинаковыми для разных элементов поликристалла.

Однако возможно наибольшее значение в серьезной постановке вопросов в отношении теорий, зависящих от использования предписанных кристаллографических направлений скольжения, имеет экспериментальное открытие, сделанное мною при сравнении определяющей деформации для монокристалла с объемноцентрированной кристаллической решеткой и для поликристаллического тела из того же материала. В этом случае для поликристаллического тела при одноосной нагрузке $\bar{m}$ также равно 3,06, но количество возможных систем скольжения было значительно большим, чем для материала, имеющего гранецентрированную кубическую решетку (Bell [1961, 1], [1963, 1], [1964, 1], [1965, 2], [1968, 1]).

В работе Даусона 1970 г. (Dawson [1970, 1]), в которой можно найти подробности его теоретического исследования, опущено описание эксперимента, вошедшее в его диссертацию 1968 г. (Dawson [1968, 1]), который ввиду неудовлетворительного состояния теории представляется имеющим большее значение для дальнейшего изучения вопроса. В своем опыте он разделил образец прямоугольного поперечного сечения из крупнозернистого поликристаллического полностью отожженного алюминия с чистотой 99,99% на два куска. Он нанес прямоугольную сетку на взаимно перпендикулярных гранях зерна, расположенного у вершины, и проделал рентгенографический анализ кристаллографической ориентации этого зерна. Разделенный на две части образец показан на рис. 4.198. Затем торцы разделенного на части образца были смазаны, и он был сжат вдоль оси до достижения 6% общей деформации; при этом была получена параболическая функция отклика с индексом формы для этого материала $r=6$ при $\bar{m}=3{,}06$. Измерение кристаллографических углов до и после деформирования показало, что произошли изменения углов, которые были результатом как измерений, ожидаемых при деформировании свободного кристалла (монокристалла), так и поворота зерна как жесткого тела. Это, конечно, не соответствовало теории самого Даусона, согласно которой условия равновесия требуют отсутствия поворотов при одноосных опытах. Наблюдая за параллельными направлениями, показанными на рис. 4.199, Даусон установил факт неоднородности деформации для части исследованного зерна, но общая де-

формация тела, усредненная и в осевом, и в поперечном направлениях, не позволяет судить о местной нерегулярности.

В 1968 г. я обнаружил, что определяющая деформация для большого зерна, усредненная в пределах всего зерна, по отношению к общей деформации поликристалла, частью которого являлось

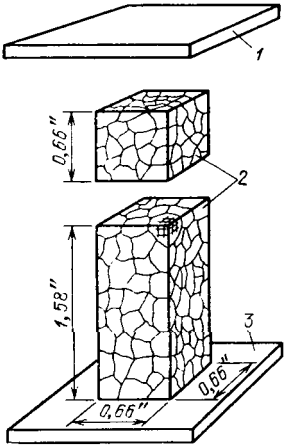



Рис. 4.198. Опыт Даусона (1968). Схема опыта для изучения деформаций зерен поликристаллического тела; *1* — стальная плита, *2* — образец из алюминия высокой чистоты, *3* — стальная плита основания.

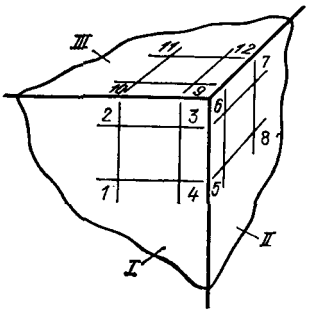



Рис. 4.199. Опыт Даусона (1968). Система разметки зерна до деформации, на основании которой наблюдалась неоднородная деформация отдельного зерна поликристаллического тела, подчиняющаяся параболической зависимости, определяемой формулой (4.25). *I* — грань *A*, *II* — грань *B*, *III* — грань *C*.

это зерно, дает значение отношения $\overline{m}=3{,}06$ для поликристаллического агрегата, полученное при сравнении графика функции отклика для свободного кристалла (монокристалла) с аналогичным графиком для поликристаллического тела (Bell [1968, 1], рис. 4.20, стр. 119 оригинала). Дальнейшее экспериментальное изучение поведения кристалла в составе поликристаллического агрегата, которое еще не было завершено при издании настоящей работы, показало важность учета местной неоднородности деформаций в пределах этого кристалла и поворота последнего для обеспечения непрерывности на границах зерен. Представляется совершенно очевидным, что удовлетворительная теория должна постулировать внушающее доверие распределение неоднородной деформации в кристалле, входящем в состав поликристаллического тела.

Несмотря на недостатки теории, создаваемой для изучения поликристаллического агрегата на основании свойств монокристалла, в экспериментах добивались успеха по установлению ряда важных обобщений в этой области. В своей докторской диссертации Рамеш Миттал (Mittal [1969, 1], [1971, 1]) в 1969 г. привел результаты экспериментального изучения деформирования труб из пол-

ностью отожженного поликристаллического алюминия низкой чистоты, предпринятого для того, чтобы выяснить, можно ли параболические функции отклика (формулы (4.25) и (4.29), см. разделы 4.21 и 4.22), построенные мной для простого растяжения и для простого кручения, распространить и на более общие случаи как простого, так и сложного нагружения при комбинации растяжения и кручения. Испытательный прибор Миттала, показанный

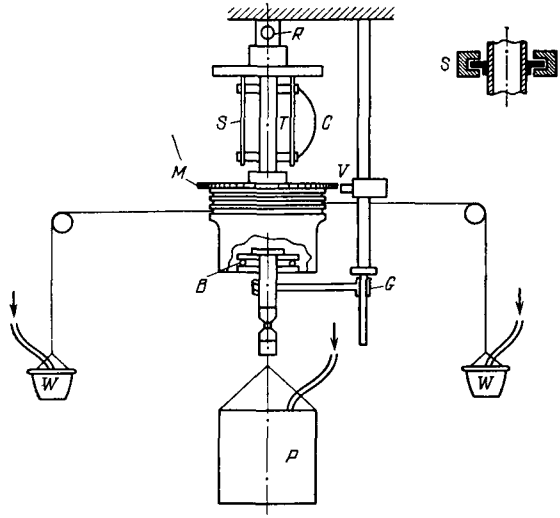



Рис. 4.200. Опыты Миттала (1969). Экспериментальная установка для растяжения и кручения, в которой механизмы возбуждения этих видов деформации (мертвая нагрузка) автономны.

на рис. 4.200, уникален в том отношении, что впервые для такого типа опытов автор сделал независимыми механические системы нагружения, предназначенные для возбуждения растяжения и кручения, что было фактором первостепенной важности для изучения материала, в котором обнаруживается инерционное влияние эффекта Савара — Массона.

Трубчатый образец $T$ закреплялся в опоре $R$ так, что его поворот предотвращался при обеспечении вертикальности его оси. Растягивающая нагрузка $P$ и нагрузка $W$, создающая крутящий момент, определялись такой подачей в резервуары воды, чтобы обеспечить желаемые постоянные скорости нагружения $\dot{\sigma}$ и $\dot{S}$. Установка подшипника $B$ позволила, закручивая образец, не поворачивать устройство для создания растягивающей нагрузки. Элемент $S$, содержащий протарированный прижимной тензометр-скобу $C$ для точного определения условной деформации при помощи полупроводникового датчика, прикрепленного к нему, также позволял образцу свободно поворачиваться так, что общий угол крутильного поворота торца образца мог быть найден оптическим

методом. Последний позволял определять деформации сдвига $s$. Полностью отожженные трубки из поликристаллического алюминия имели наружный диаметр 0,4395 дюйма и толщину стенки 0,0322 дюйма. Использовался мелкозернистый алюминий с чистотой 99,16%; образцы отжигались в течение двух часов при 1100 °F и остывали вместе с печью, так что материал был полностью отожжен и результаты эксперимента можно было сравнить с данными по отклику, найденному в моих опытах с волнами конечной амплитуды. Миттал выполнял опыты по простому растяжению и простому кручению, чтобы проверить аппаратуру показом того, что отношение $\bar{m}/\bar{n}$, полученное в этих опытах, согласовывалось с результатом $\bar{m}/\bar{n}=\sqrt{3}$ более ранних наблюдений.

Комбинируя мои формулы (4.25) и (4.29) (см. выше разделы 4.21, 4.22 и 4.28) для простого растяжения и простого кручения, Миттал ввел эквивалентное напряжение и эквивалентную деформацию

$$T=\sqrt{\sigma^2/3+S^2} \quad \text{и} \quad E=\sqrt{3\varepsilon^2+s^2},$$

которые связаны при простом нагружении параболической зависимостью

$$T=(\bar{n}/\bar{m})^{3/2}\mu(0)B_0(1-T/T_m)(E-E_b)^{1/2}, \tag{4.66}$$

или, в терминах коэффициента для монокристалла и коэффициента поликристалличности,

$$T=(\bar{n})^{3/2}\beta_s E^{1/2} \tag{4.67}$$

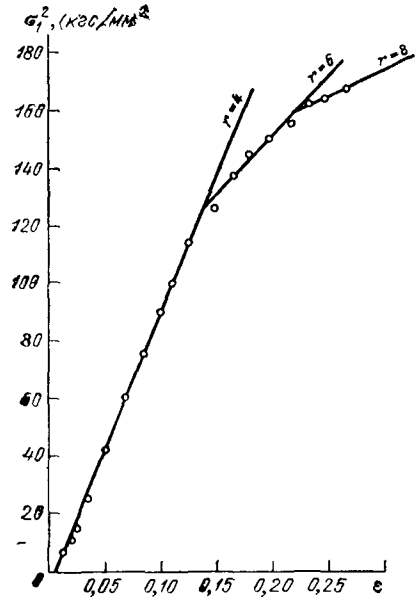
и

$$T/\tau=\bar{n}=\gamma/E. \tag{4.68}$$

Миттал провел 20 опытов в этой серии: 4 — для простого кручения, 4 — для простого растяжения, 7 — для простого нагружения с различными постоянными значениями отношения $\dot{\sigma}/\dot{S}$ и 5 опытов со сложным нагружением, в которых сменяли друг друга поочередно простые нагружения при одном лишь растяжении или кручении, накладываемых на суммировавшиеся предыдущие напряженно-деформированные состояния.

Е. А. Дэвис в 1943 г. (Davis [1943, 1]) обнаружил, что диаграмма зависимости октаэдрического касательного напряжения или максимального касательного напряжения, с одной стороны, и соответственно октаэдрического сдвига или максимального сдвига, с другой, при конечных деформациях и простом нагружении для различных соотношений главных напряжений, возникающих при загружении полых трубчатых образцов одновременно продольной силой и внутренним давлением, не зависит от отношения главных напряжений (см. раздел 4.15, рис. 4.61—4.64). Миттал обобщил открытие Дэвиса, обнаружив, что функция отклика не зависит от пути не только при простом нагружении, но и при сложном.

Что касается результатов Дэвиса, то мне пришлось пересчитать их (они были даны в виде напряжений Коши (истинных напряжений) и логарифмических деформаций (истинных деформаций)), приведя их к напряжениям и деформациям по Пиола — Кирхгофу (к условным напряжениям и деформациям), относящимся к недеформированному первоначальному состоянию материала в опытах с образцами из отожженной меди (рис. 4.61) и малоугле-



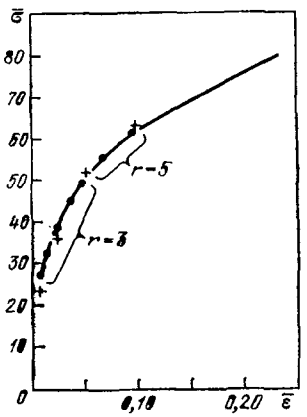




Рис. 4.201. График зависимости квадрата напряжения $\sigma_1^2$ от деформации $\varepsilon$ при одноосном растяжении ($\sigma_2/\sigma_1=0$) медных труб, построенный на основании опытов Дэвиса (рис. 4.61) в условных напряжениях и деформациях (кружки); сравнение с предсказываемым на основании формулы (4.25) (сплошные линии).

Рис. 4.202. График зависимости $\bar{\sigma}$ от $\bar{\varepsilon}$ ($\bar{\sigma}$ и $\bar{\varepsilon}$ — «истинные» напряжение в фунт/дюйм² и деформация) при испытании трубчатых образцов из малоуглеродистой стали при «чистом» растяжении в двух направлениях под действием внутреннего давления ($\sigma_t/\sigma_a=2$) (сплошная линия), сравниваемый с предсказываемым на основании формулы (4.25) Белла (крестики).

родистой стали (рис. 4.63). Я показал результаты этих вычислений, используя данные Дэвиса для октаэдрических напряжения и деформации и наибольших касательного напряжения и деформации; обычно диаграммы напряжения по Дэвису были не только не зависящими от пути простого нагружения, но, как оказалось, к ним очень близки и графики принятой мною параболической функции отклика при конечной деформации с начальным индексом формы $r=4$ для меди и переходом второго порядка к $r=6$, происходящим при деформации перехода, соответствующей $N=8$. Для лучшей наглядности я рассмотрел здесь по одному опыту для каждого материала, приведя соответствующие результаты. На рис. 4.201 приведена экспериментальная информация, относящаяся к зависимости $\sigma^2$ от $\varepsilon$, которую я пересчитал, приведя истинные на-

пряжения и деформации к условным (кружки), и сравнена с предсказываемой по формуле (4.25) зависимостью (график ее показан сплошной линией). В противоположность такому представлению на рис. 4.202 для чистого растяжения трубчатого образца из малоуглеродистой стали, находящегося под воздействием внутреннего давления, я подсчитал по формуле (4.25) в терминах номинальных напряжений и деформаций предсказываемые значения (крестики), соответствующие «истинным» напряжениям и деформациям.

В опытах Миттала с образцами из горячекатаного отожженного алюминия низкой чистоты начальный индекс формы был обычным для этого материала, равным $r=2$ в 19 из 20 проведенных им опытов с переходом второго порядка к индексу формы $r=3$ в 17 опытах и к $r=4$ в двух опытах. Для двадцатого опыта начальный индекс формы был $r=1$, а переход второго порядка к $r=3$ произошел точно при $N=18$.

Результаты весьма показательных опытов Миттала для простого и сложного нагружения видны [1]) на рис. 4.203 и 4.204, они не только иллюстрируют полную независимость функции отклика $T=\phi(E)$ от пути нагружения и их согласованность с первоначально предложенной параболической функцией отклика в форме зависимости (4.66), а также с функцией отклика для поликристаллического агрегата, содержащей коэффициент поликристалличности согласно формуле (4.68), но и то, что положение перехода второго порядка не зависит от частного вида пути нагружения, будь оно простым или сложным.

На рис. 4.203 сравниваются графики зависимостей $T^2$ от $E$ для типичных результатов, полученных при простом растяжении, простом кручении, при простом нагружении в случае совместного растяжения и кручения с отношением $\dot{\sigma}/\dot{S}=0{,}57$, при непростом нагружении (сначала — растяжение, затем, сохраняя уровень последнего, наложение на него кручения и, наоборот, сначала кручение, а затем при сохранении его уровня наложение на него растяжения). На рис. 4.204 показаны данные, относящиеся к зависимости $T$ от $E$ и полученные в ряде опытов с указанными видами нагружения, к которым я добавил усредненные данные моих опытов при сжатии, чтобы показать еще раз, что когда напряжения и деформации определены для недеформированного тела, функция отклика для конечных деформаций, определенная как для монокристалла, так и для поликристалла, оказывается полностью одинаковой при нагружении при любом сочетании двух компонентов напряжений, имеющем место в опытах $P$ — $M$ (на растяжение — кручение). Приведенные выше данные Дэвиса показывали, что

[1]) В публикации этих результатов самим Митталом небольшая добавка к нагружающему крутящему моменту была неумышленно пропущена. Этот пропуск не исказил его заключений. Приводя здесь его результаты, я пересчитал данные, чтобы включить эту малую поправку для компонента кручения.

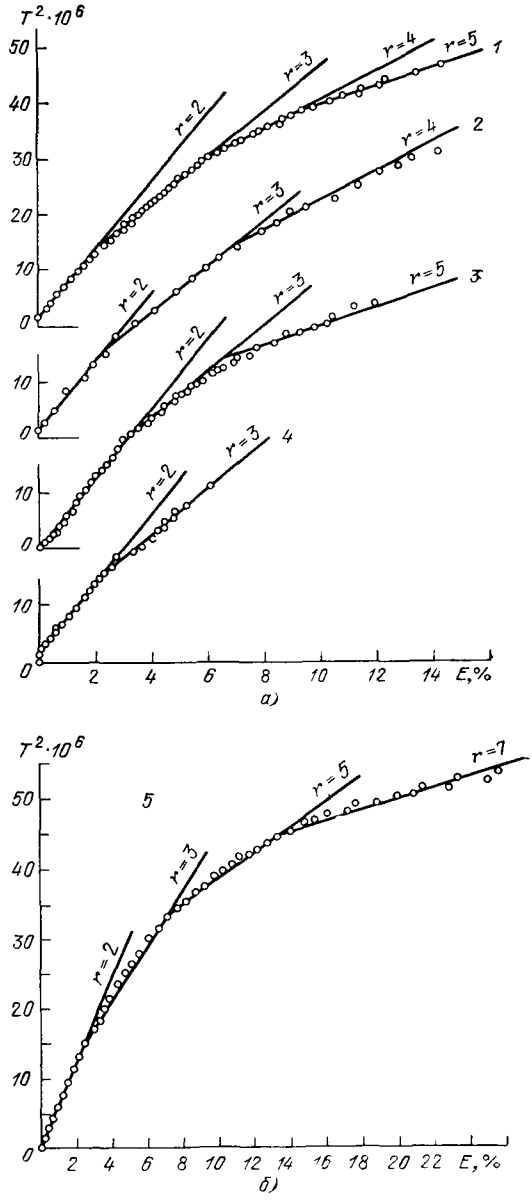



Рис. 4.203. Опыты Миттала (1969). Данные к зависвмости $T^2$ от $E$ для опытов с полыми трубками из полностью отожженного алюминия (кружки), сравниваемые с предсказываемыми на осиовании формулы (4.66) (сплошная линия). *а*) *1* — опыт 1415, простое нагружение $\dot{S}/\dot{\sigma}=0{,}54$ (растяжение и кручение), *2* — опыт 1451, непростое нагруженне $S\to\sigma$, *3* — опыт 1416, непростое нагруженне $\sigma\to S$, *4* — опыт 1450, чистое кручение; *б*) *5* — опыт 1446, чистое растяженне. По оси абсцисс отложено $E$ в процентах, по оси ординат $T^2\cdot 10^6$ (единица измерения для $T$ в оригинале книги не указана.— *А. Ф.*).

подобный экспериментальный результат справедлив для любого отношения двух главных напряжений и тогда, когда рассматриваются опыты $P - p$ (растяжение и внутреннее давление). В двух сериях опытов Миттала путь простого нагружения пересекался в точке пространства $\sigma - S$ с путями $\sigma \to S$ и $S \to \sigma$ в условиях сложного нагружения. Значения $T$ и $E$ при всех трех путях нагружения совпали для точки пересечения, обеспечивая общую функцию отклика.

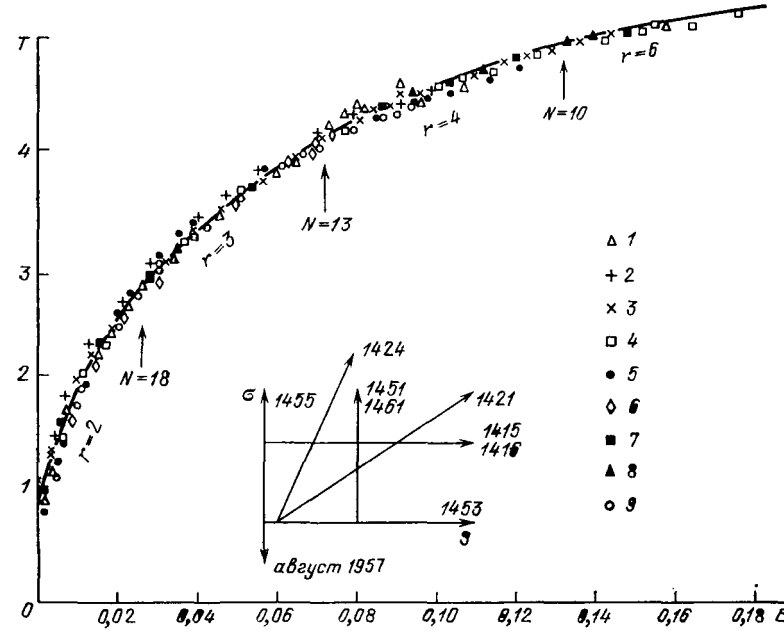



Рис. 4.204. Опыты Миттала и Белла. Экспериментальные данные по зависимости $T$ от $E$, сравниваемые с расчетной, полученной по формуле (4.66) Белла (сплошная линия). Обнаруживается независимость от пути нагружения; *1* — опыт 1461, сложное нагружение; *2* — опыт 1424, простое нагружение, $S/\sigma = 0{,}46$; *3* — опыт 1451, сложное нагружение; *4* — опыт 1421, простое нагружение, $S/\sigma = 1{,}52$; *5* — опыт 1416, сложное нагружение; *6* — опыт 1453, простое нагружение (чистое кручение); *7* — опыт 1455, простое нагружение (чистое растяжение); *8* — опыты, проведенные в августе 1957 г., простое нагружение (чистое сжатие); *9* — опыт 1415, сложное нагружение.

Таким же важным результатом опытов Миттала является то, что деформации перехода, при которых я обнаружил изменение значения индекса формы в случаях растяжения, сжатия, кручения при простом нагружении поликристаллических образцов и для определяющих сдвигов в монокристаллах, как удалось показать, являются совершенно не зависящими от пути нагружения. В табл. 137 собраны результаты измерений, проведенных Миттало, этих деформаций перехода для каждого типа нагружения и их общее

Таблица 137

**Миттал (1969). Деформации перехода, опыты по растяжению и кручению (для алюминия)**

| Номер перехода | $N$ | Средняя деформация при растяжении | Средняя деформация при кручении | Средняя деформация при простом нагружении в условиях совместного кручения и растяжения | Средняя деформация при сложном нагружении в условиях совместного растяжения и кручения | Общее число опытов | Общие средние значения | Предсказанные значения (Белл) $E_N = \left(\frac{2}{3}\right)^{N/2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 18 | 0,026 | 0,026 | 0,025 | 0,022 | 10 | 0,025 | 0,026 |
| II | 13 | 0,070 | 0,072 | 0,073 | 0,072 | 16 | 0,072 | 0,072 |
| III | 10 | 0,136 | 0,138 | 0,136 | — | 11 | 0,135 | 0,132 |
| IV | 8 | — | — | 0,198 | — | 1 | 0,198 | 0,198 |

среднее значение. Также показана близость этого среднего экспериментального значения к предсказанному мною значению деформации перехода

$$E_N = \left(\frac{2}{3}\right)^{N/2}.$$

Представляет интерес и обнаруженный Митталом факт, что в каждом случае потери устойчивости как при чистом кручении, так и при простом нагружении при одновременном наличии нескольких видов деформации, она происходила при деформациях, соответствующих обсуждаемым переходам или вблизи от них. Во всех различных опытах наблюденные значения деформации перехода были таковы: 0,026; 0,076; 0,078; 0,132; 0,198. Это соответствует моим более ранним заключениям о том, что критические деформации связаны с пределами прочности при растяжении и сжатии.

Деформации второго перехода, т. е. деформации, соответствующие переходам второго порядка в поликристалле при всех элементарных и комбинированных типах нагружения могут быть определены на основании эмпирических коэффициентов поликристалличности, исходя из известных значений определяющей деформации монокристалла. Данные опытов, описанные в разделе 4.21 для одноосного нагружения поликристаллов, данные опытов, приведенные в разделе 4.22 для кручения поликристаллов, экспериментальные данные Миттала и Дэвиса для простых и сложных нагружений, обсужденные в разделе 4.15 — все они выявляют наличие деформаций перехода, которые относятся к деформациям

Таблица 138

**Белл (1971).** $E_N=\left(\frac{2}{3}\right)^{N/2}$

| Номер перехода | $N$ | $\varepsilon_N=\frac{\bar{n}}{\bar{m}}E_N$ | $\gamma_N=\bar{n}E_N$ | $E_N=s_N$ | Измеренные динамические $\varepsilon_N$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 18 | 0,015 | 0,046 | 0,026 | 0,015 |
| II | 13 | 0,041 | 0,127 | 0,072 | 0,041 |
| III | 10 | 0,076 | 0,233 | 0,132 | 0,076 |
| IV | 8 | 0,114 | 0,350 | 0,198 | — |
| V | 6 | 0,171 | 0,524 | (0,296) | — |
| VI | 4 | 0,256 | 0,784 | (0,444) | — |
| VII | 2 | 0,385 | 1,178 | (0,667) | — |
| VIII | 0 | 0,577 | 1,765 | (1,000) | — |

перехода для монокристалла в соответствии со следующими зависимостями:

$$\varepsilon_N=\bar{m}\gamma_N,\quad s_N=\bar{n}\gamma_N,\quad E_N=\bar{n}\gamma_N. \tag{4.69}$$

Поскольку, как было показано мною, $E_N=(2/3)^{N/2}$, где $N=0$, 2, 4, 6, 8, 10, 13, 18, все восемь известных значений деформации перехода для пластической деформации кристаллов обозначены римскими цифрами. Эти значения деформаций перехода собраны в табл. 138. Все значения деформаций найдены относительно недеформированного состояния, т. е. являются значениями условной деформации. Все значения в табл. 138, кроме заключенных в круглые скобки для кручения при больших деформациях, подтверждены экспериментально.

### 4.33. Об изучении поверхности текучести, выполнявшемся после 1948 г. на основе обобщающего развития экспериментов Геста и опытов Баушингера

С начала пятидесятых годов наблюдается возобновление интереса к изучению поверхностей текучести, обусловленное одновременным развитием теории «идеально» пластического тела. Едва ли не все опыты, на которые здесь имеются ссылки, включают описания путей нагружения для растяжения с кручением и выполнены либо на жестких испытательных машинах, либо на мягких испытательных машинах, в которых нагружение производилось мертвой нагрузкой. Опыты Баушингера, выполнявшиеся в 80-х гг. XIX века при простом нагружении в условиях растяжения и сжатия, позволили определить положение только двух точек на поверхности текучести (Bauschinger [1881, 1, 2], [1886, 1]). Эти работы важны в настоящем контексте, так как в них обрисованы

трудности, имеющие место при отыскании точки на поверхности нагружения при повторном нагружении. Как и другие исследователи XIX века, такие, как Кельвин и Вертгейм, и как некоторые экспериментаторы XX века, Баушингер не только указал на трудности отыскания точки на поверхности текучести при повторном нагружении, но и указал, что модуль при повторном нагружении был ниже, чем при первом, и в ряде случаев заметно ниже. В связи с этим я ссылаюсь на раздел 3.44, в котором мы видели, основываясь на более поздних исследованиях, что в процессе повторного нагружения, следующего за пластической деформацией, не только изменяются модули, но могут появиться и переходы второго порядка, названные «мультимодульностью», в еще большей мере усложняя интерпретацию циклического нагружения при наличии пластических деформаций.

Другим явлением, влияющим на результаты, замеченным во всех типах опытов с рядом материалов и особенно сказывающимся на отыскании поверхности текучести, был эффект Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье), который до совсем недавнего времени обычно не учитывался. (Этот вопрос будет рассмотрен ниже в разделе 4.35.)

В 1951 г. Бернард Будянский, Норрис Ф. Доу, Роджер В. Петерс и Роланд П. Шепард (Budiansky, Dow, Peters and Shepard [1951, 1]) испытывали тонкостенные цилиндры из алюминиевого сплава 14 S-T 4, нагружая образцы при сжатии до деформаций порядка 0,005, после чего они вводили одновременно со сжатием кручение при заранее заданном соотношении нормальных и касательных напряжений. Их результаты, которые вызвали серьезную дискуссию по поводу того, могли или нет авторы принимать линейный характер функции отклика, оказались не соответствующими ни их версии деформационной теории, ни теории течения, ни предложенной ими теории скольжения при пластической деформации. Анизотропия в крупных цилиндрах, изготовленных при помощи штамповки, особенности изучавшихся сплавов и использование «жестких» испытательных машин, для которых деформации были предписаны, должны были быть факторами, влияющими на результаты опытов этих авторов.

В 1954 г. Пауль М. Нагди и И. С. Роулс (Naghdi and Rowles [1954, 1]) сообщили о результатах опытов с 10 тонкостенными трубчатыми образцами из алюминиевого сплава марки 24 S-T4, который по их данным определенно не был изотропным материалом. Авторы изучали различные пути нагружения, состоящие из одного растяжения до заданных значений напряжений с последующим кручением и одновременным по разному возраставшим растяжением. И снова испытательные машины были «жесткими», при использовании которых деформации предписывались. Нагди и Роулс детально изложили свои результаты; наиболее интересным оказалось значительное понижение при кручении после растяжения

начального модуля сдвига, которое было замечено (примерно в два раза), по сравнению со значением, обнаруживаемым при кручении без предварительного деформирования (к 1954 г. об уменьшении модуля с увеличением остаточной деформации было забыто). Итак, снова, вдобавок к неизвестным эффектам анизотропии, результаты опытов Геста были не в состоянии обеспечить основание для окончательного суждения о дальнейших направлениях развития теории.

Интересный новый эксперимент, связанный с более ранними исследованиями Лоде (Lode [1926, 1]) и Тэйлора и Квинни (Taylor and Quinney [1931, 1]) (раздел 4.14), включал опыты на растяжение

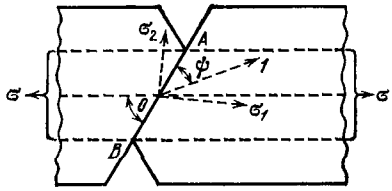



Рис. 4.205. Опыты Ханди и Грина (1954). Схема образца; *1* — направление относительного перемещения.

надрезанных полос, изготовленных из меди, цинка и нержавеющей стали, за пределами их текучести и был выполнен Ханди и Грином в 1954 г. (Hundy and Green [1954, 1]). Используя образцы такого типа, как показано на рис. 4.205, Ханди и Грин получили при их растяжении различные комбинации значений коэффициентов Лоде $\mu$ и $\nu$ путем изменения угла $\theta$. Отсылая читателя, интересующегося деталями, к обсуждаемой работе, я представил на рис. 4.206 их результаты, относящиеся к трем материалам, для которых практически $\mu=\nu$.

В. С. Ленский (Lensky [1960, 1]) в 1960 г. сообщил о ряде опытов с относительно маленькими тонкостенными трубчатыми образцами из меди и малоуглеродистой стали, которые также были выполнены на «жестких» испытательных машинах, в данном случае полуавтоматических, для обеспечения заданной истории деформирования при совместном растяжении и кручении. Пути нагружения в опытах Ленского, которые включали и нагружения и разгрузки, были показаны в виде кривых совместно с некоторыми прямыми, наклон которых характеризует отношение приращений касательных и нормальных напряжений в различных точках пространства деформаций. Я включил на рис. 4.207 результаты двух опытов с медными образцами — траектории деформирования, состоящие из прямолинейных участков, сопрягающихся под теми или иными углами, и на рис. 4.208 — результаты опытов с двумя медными образцами при криволинейных траекториях деформирования, которые сами по себе достаточно наглядны для объяснения того, что́ наблюдается, когда выполняется обычный инженерный опыт на «жестких» испытательных машинах. Индекс 3 относится к компонентам кручения, и индекс 1 — растяжения.

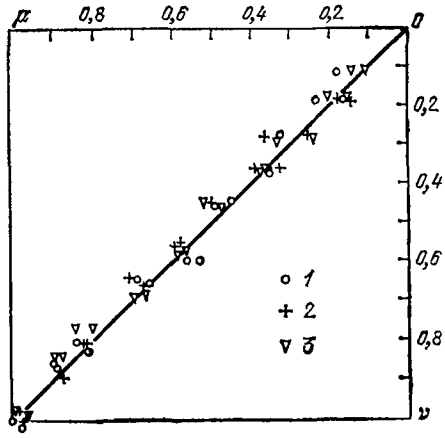



Рис. 4.206. Опыты Ханди и Грина (1954). Диаграмма Лоде, полученная из опытов с образцами, показанными на рис. 4.205; *1* — медь, *2* — цинн, *3* — нержавеющая сталь.

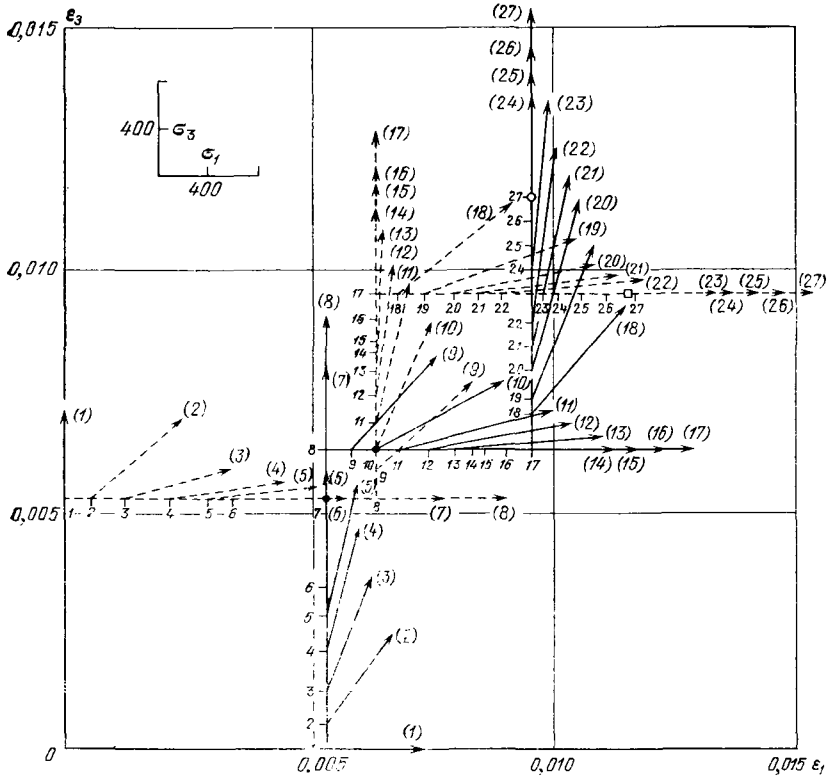



Рис. 4.207. Опыты Ленского (1960). Отношения приращений напряжений при сложном нагружении (последовательное поочередное растяжение и кручение), осуществленном на испытательной машине с «жесткнм» нагружением.

Повсеместно в данной работе было очевидно, что в тех случаях, когда необходимы опыты с медленным нагружением для рассмотрения важных физических явлений, превосходством обладали те, в которых нагружение производилось при помощи мертвой нагрузки. Этот вывод вновь подтверждается рядом опытов, проводившихся

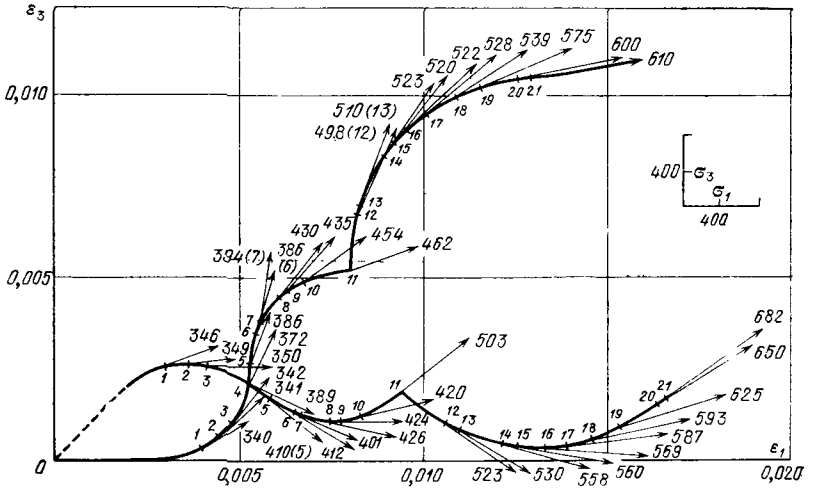



Рис. 4.208. Опыты Ленского (1960) с трубчатыми образцами из меди. Отношения приращений напряжений при сложном нагружении с криволинейными путями деформирования при совместном растяжении и кручении (переменное соотношение деформаций растяжения и кручения), осуществленном на испытательной машине с «жестким» нагружением.

на протяжении ряда лет с 1957 г. по настоящее время Эрисом Филлипсом при растяжении и кручении с нагружением мертвой нагрузкой (Phillips [1957, 1], [1960, 1], [1972, 1] Phillips and Gray [1961, 1], Sierakowski and Phillips [1965, 1], [1968, 1]). Филлипс приводит подробное описание своей испытательной машины с силовозбуждением мертвой нагрузкой, показанной [1]) на рис. 4.209, метода приложения нагрузки и точного способа определения вида поверхности текучести при повторном нагружении. Материалом, с которым Филлипс в течение пятнадцати лет проводил опыты при нагружении мертвой нагрузкой, был удачно выбран технически чистый отожженный алюминий, для которого, как было показано выше, можно не учитывать влияния неизвестных предшествовавших тепловой и механической историй.

В отличие от опытов Ленского, Филлипс предписывал пути нагружения для двух компонентов напряжений, имеющих место

[1]) В этой машине система для создания кручения не была отделена от системы, возбуждающей растяжение, что является серьезным ограничением при наличии ступенек эффекта Савара — Массона, возможного для отожженного алюминия.

соответственно при растяжении и при кручении $\sigma$ и $\tau$, измеряя получающиеся осевую деформацию и деформацию сдвига в трубах с очень тонкими стенками, с отношением толщины стенки к диаметру примерно 1 : 16. В 1957, 1960 и 1961 гг. Филлипс описал результаты, полученные при различных путях нагружения (Phillips [1957, 1], [1960, 1], Phillips and Gray [1961, 1]), которые он

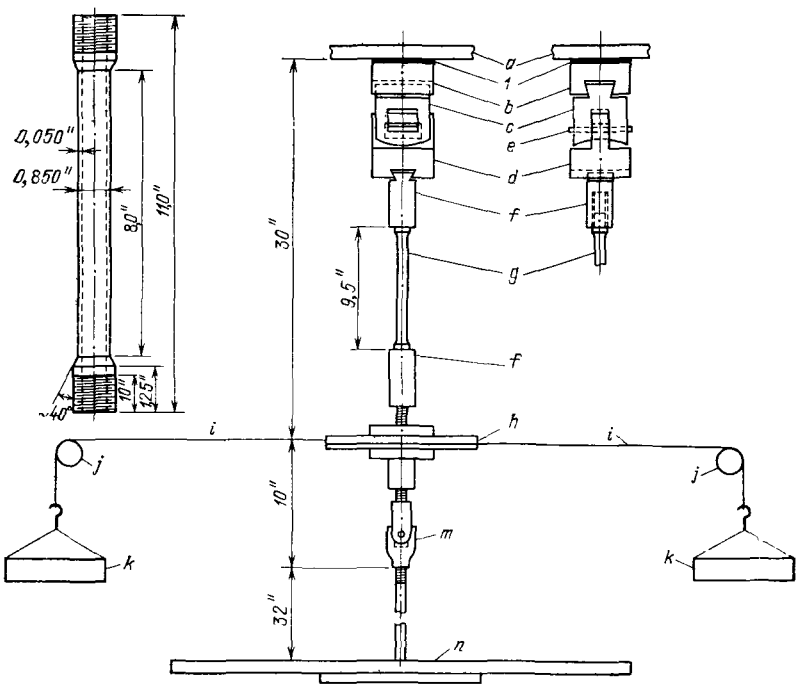



Рис. 4.209. Опыты Филлипса (1961). Схема установки для «мягкого» нагружения мертвой нагрузкой, использованной в опытах. Устройства для осуществления растяжения и кручения не были независимыми. *1* — сварка; *a* — несущая рама, *b*, *c*, *d* — блоки подвески, *e* — опорная плита со сферической опорой (точечное опирание), *f* — захват с резьбой, *g* — испытываемый образец, *h* — шкив для создания крутящей пары (крутящего момента) диаметром 12 дюймов, *i* — гибкий кабель, *j* — блок, установленный на раме, *k* — подвешенная чашка для помещения в нее грузов, создающих силу, которая образует крутящий момент; *m* — универсальный (пространственный) шарнир, *n* — подвешенная платформа (диаметром 36 дюймов) для расположения на ней грузов, создающих осевую растягивающую нагрузку.

сравнивал для различных точек в пространстве напряжений по наклонам прямых, характеризующих отношение приращений компонентов деформации. На рис. 4.210 и 4.211 показаны некоторые из избранных путей нагружения и прямые, наклон которых показывает, что отношение деформаций экспериментально определенных (сплошные тонкие линии) и теоретически предсказанных (штриховые линии) на основе гипотез деформационной теории пластичности, определяется отношением полных напряжений, а не отношением приращений напряжений.

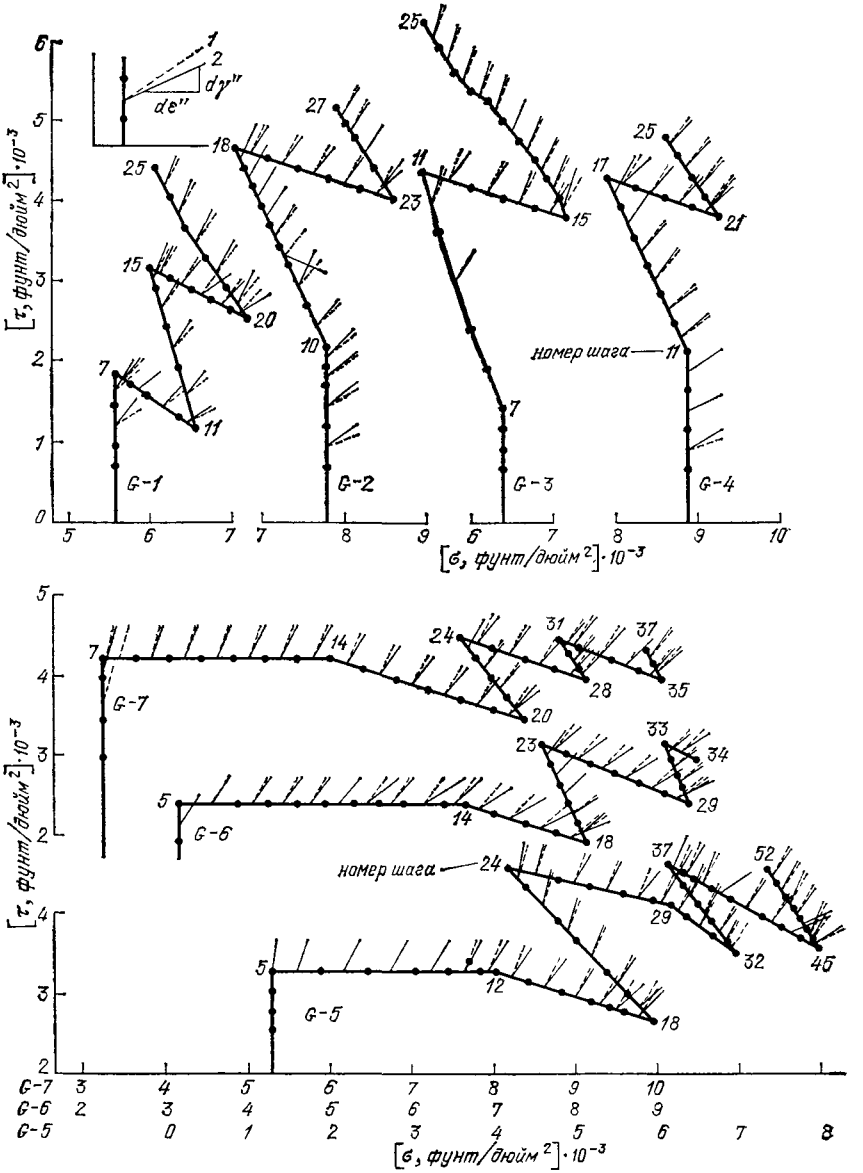



Рис. 4.210. Опыты Филлипса (1961). Отношения приращений напряжений при сложном нагружении, созданном мягким нагруженнем мертвой нагрузкой; *1* — теоретические направления, *2* — экспериментальное направление.

В общем-то результаты Филлипса, несмотря на их важность, все же не дают полной оценки конкурирующих теорий, но показывают, что для некоторых путей сложного нагружения они могут дать лучшую согласованность, чем для других. Поскольку эти результаты не содержат данных об отношениях компонентов, соответствующих растяжению и кручению в ступеньках Савара — Массона, которые кстати не всегда видны, но все же иногда могут наблюдаться главным образом в экспериментах при простом нагружении образцов из этого материала в условиях воздействия мертвой нагрузки, трудно уделить слишком большое внимание деталям этих сравнений. Во всяком случае, из опытов Филлипса ясно, что эти отношения для напряжений и для приращений деформаций не совпадают.

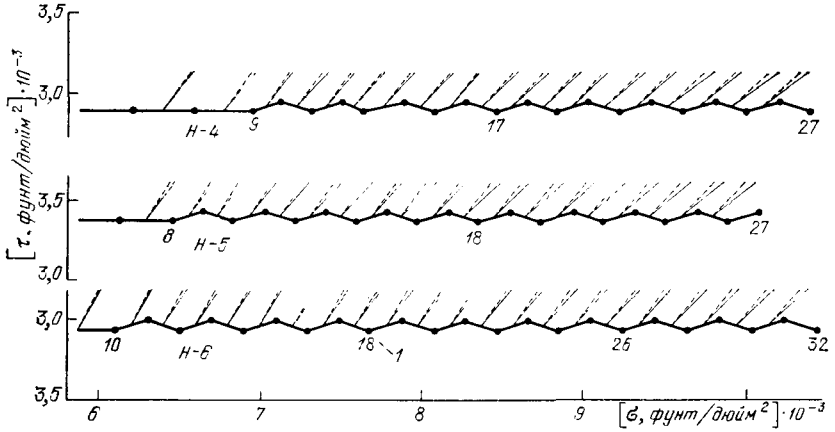



Рис. 4.211. Опыты Филлипса (1961). Отношения приращений деформаций при увеличивающихся напряжениях растяжения и постоянных напряжениях кручения; *l* — номер шага.

В 1968 г. Р. Л. Сиераковский и Филлипс (Sierakowski and Phillips [1968, 1]) изучали влияние повторного нагружения на положение поверхности пластичности, а Филлипс (Phillips [1968, 1]) изучал изменение поверхности пластичности для отожженного алюминия в зависимости от температуры окружающей среды. Эти опыты, а также опыты по выявлению влияния температуры, которые проводились в 1972 г. (Phillips [1972, 1]), являлись повторением оригинальных опытов Геста, в которых (Guest [1900, 1]) образец после предварительной нагрузки и разгрузки снова нагружался по тому или иному пути нагружения, пока не достигалась точка на поверхности пластичности. При повторении опыта Геста снова был поднят трудный вопрос об установлении поверхности пластичности при повторном нагружении по новому пути. Предложения, сделанные в 40-х — 80-х гг. XIX века, включали установление фиксированного значения остаточной деформации

(0,2% в XX веке по сравнению с 0,05% в середине XIX века), иногда с дополнительным условием повторной разгрузки образца для установления факта наличия и уровня остаточной деформации. Филлипс детально проанализировал [1]) все аргументы, предложенные девяносто лет тому назад Баушингером, и пришел к тому же заключению: единственное приемлемое определение поверхности пластичности, предела упругости по Баушингеру,— это отыскание предела пропорциональности, при котором заметны неустойчивые малые изменения в компонентах пластической деформации по сравнению с более стабильными микропластическими деформациями ниже этого предела.

Я включил два примера из этих опытов Филлипса. Один, приведенный на рис. 4.212, показывает, как изменяется в зависимости от уровня температуры поверхность пластичности для отожженного алюминия, полученная в результате повторения опыта Геста при различных температурах. Второй пример — один из многих, приведенных в двух работах Филлипса в 1972 г. (Phillips and Tang [1972, 1]), в которых рассматривалось влияние как температуры, так и пути нагружения, с учетом предшествовавшей истории напряженно-деформированного состояния в условиях опыта Геста. Результаты на рис. 4.213 это поверхности пластичности в условиях четырех значений окружающей температуры для каждого предварительно созданного напряженного состояния, полученного при совместном растяжении и кручении.

Эти важные исследования Филлипса, проводимые в течение последних 15 лет, явились продолжением и долгожданным развитием в направлении получения поверхности пластичности, после прошедших почти 90 лет со времени основополагающих работ Баушингера по изучению только двух точек этой поверхности.

Опыты Миттала (Mittal [1969, 1], [1971, 1]) на машине с мягким нагружением при совместном растяжении и кручении в условиях комнатной температуры, выполненные с полыми трубками из того же полностью отожженного материала, который был и в опытах Филлипса (раздел 4.32, рис. 4.204), и опыты Дэвиса (E. A. Davis [1943, 1], [1945, 1]) с отожженной медью (раздел 4.15, рис. 4.61) показали, что в условиях монотонно возрастающей нагрузки, при многих путях простых и сложных нагружений, функции отклика, выраженные в терминах обобщенных напряжений и обобщенных деформаций [1] не зависят от пути нагружения. Эти опыты совместно с опытами такого типа, как выполненные Филлипсом, должны рассматриваться одновременно, если необходимо экспериментально обосновать определяющие уравнения теории пластичности, общие и для условий нагружения и для разгрузки. Этот вопрос будет развит далее в разделе 4.35 с учетом ряда недавно выполнеиных

[1]) См. выше раздел 4.7. В обсуждении Филлипса нет ссылок на исследование Баушингера.

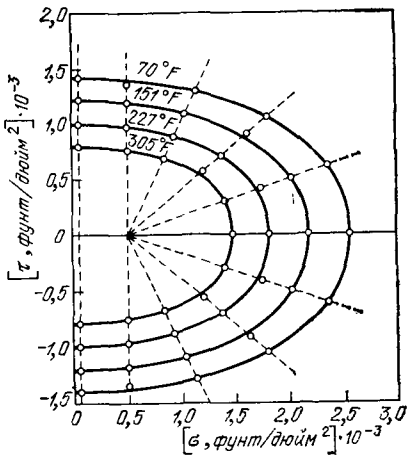



Рис. 4.212. Опыты Филлипса (1968) (образец S-3). Поверхности пластичности (поверхности нагружения.— *А. Ф.*) найденные на основании опыта, выполнявшегося по методике Геста при указанных температурах.

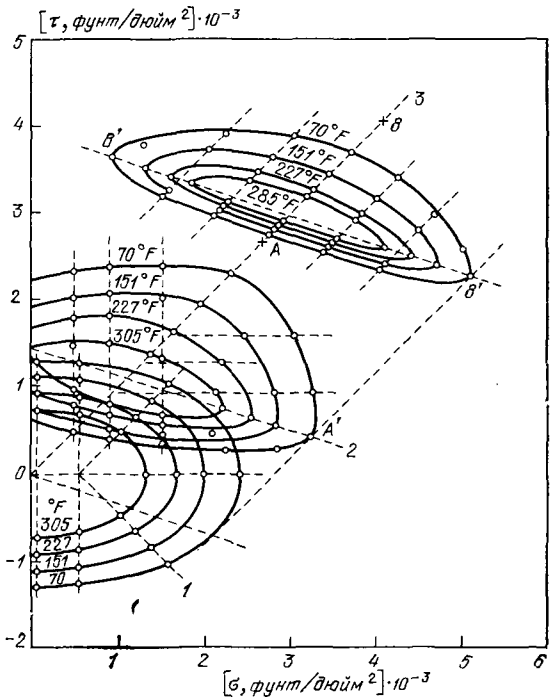



Рис. 4.213. Опыты Филлипса и Тана (1971) (образец S-8). Влияние предварительного напряжения, пути нагружения и уровня температуры на положение поверхности пластичности (поверхности нагружения.— *А. Ф.*), найденное в опыте по методике Геста; *1* — начальная поверхность текучести, *2* — первое смещенное положение поверхности пластичности (нагружения), предварительное напряжение в *А*: $\sigma=\tau=2677$ фунт/дюйм², $T=70$ °F, $e^P=29\cdot10^{-6}$, $\gamma^P=65\cdot10^{-6}$; *3* — второе смещенное положение поверхности пластичности (нагружения), предварительное напряжение в *В*: $\sigma=\tau=4095$ фунт/дюйм², $T=70$°F, $e^P=1512\cdot10^{-6}$, $\gamma^P=8587\cdot10^{-6}$.

экспериментов, в которых, в дополнение, рассмотрен и эффект Савара — Массона.

Также важен для изучения поверхности пластичности тот факт, что модуль упругости при повторном нагружении изменяется в зависимости от уровня достигнутой остаточной деформации, при значении напряжения, предшествовавшем разгрузке. Имеется свидетельство того, что явление мультимодульности в полностью отожженном материале в условиях элементарных видов деформации, описанное

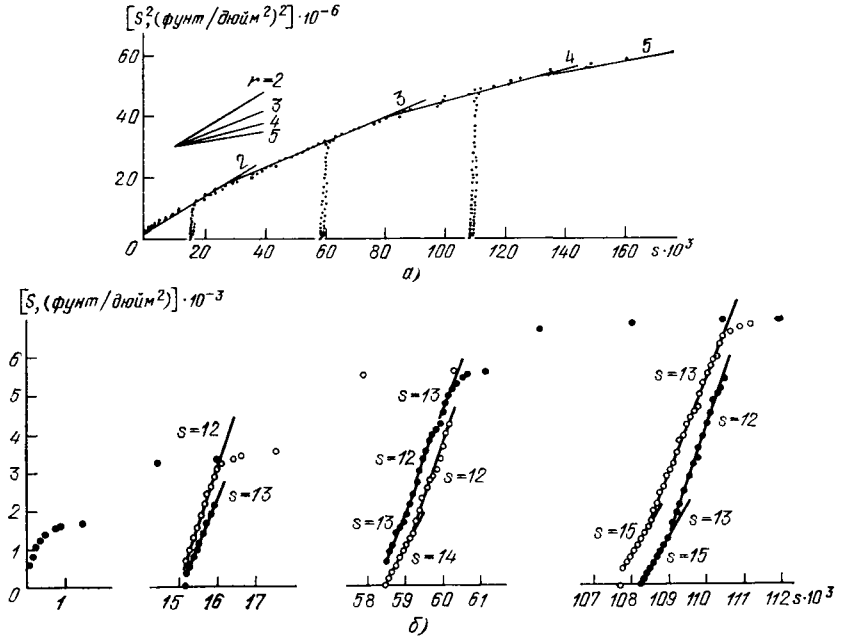



Рис. 4.214. Опыты Муна (1972). Результаты опыта на кручение труб из полностью отожженного алюминия при 297 К (темные и светлые кружки) в сравнении с данными, предсказываемыми на основании формулы (4.29) (сплошные линии). *а*) Приведены три цикла разгрузки; *б*) мультимодульность во время разгрузок и повторных нагружений согласно формуле (3.29)

выше в разделе 3.44, является важным и в более общих условиях. Я помещаю только два примера, взятые из исследований Хэнгью Муна, проводимых в моей лаборатории в университете Джонса Гопкинса при написании докторской диссертации. Мун исследовал общие свойства переходов второго рода, возникающих в результате разгрузки при повторном нагружении образцов из полностью отожженного алюминия.

На рис. 4.214, *а*, *б* показаны графики зависимости $S^2$ от $s$, полученные в опытах на кручение, выполненных Муном на машине с мягким нагружением (при помощи мертвого груза) с образцами в виде труб из полностью отожженного алюминия, для которого обычно начальный индекс формы $r=2$ сменяется при переходе

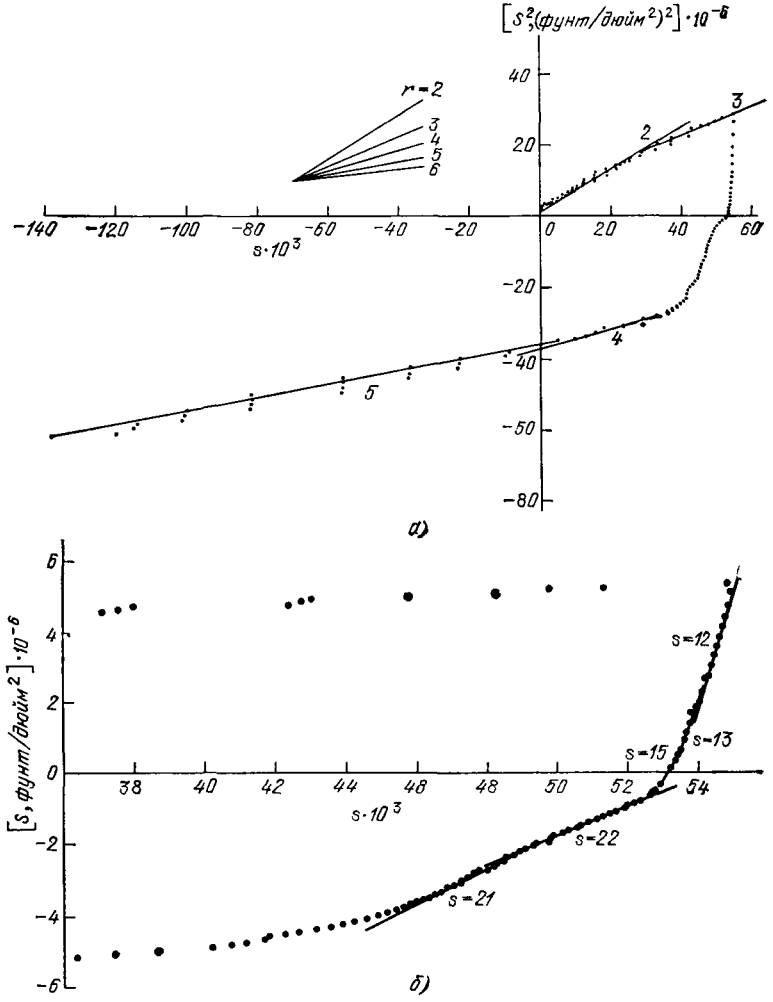



Рис. 4.215. Опыты Муна (1972). а) Результаты опытов (точки) на кручение труб из полностью отожженного алюминия с нагружением в обоих противоположных направлениях до появления конечных деформаций. Сплошные линии соответствуют предсказанию, получаемому на основании формулы (4.29); б) «мультимодульность», наблюдаемая в опытах при обратном направлении кручения, и сопоставление с предсказанием на основании формулы (3.29) (сплошные линии).

второго порядка на $r=3$ и $r=4$. При трех разных уровнях пластической деформации образец был разгружен и повторно нагружен. Факт уменьшения модуля сдвига после возникновения пластической деформации, впервые обнаруженного Кулоном в 1784 г. и подчеркнутого Кельвином в 1865 г., показан на рис. 4.214, *б* в терминах мультимодульности (раздел 3.44, уравнение (3.28)). В этом опыте стабильное значение индекса $s$ для алюминия, наблюдавшееся при начальном нагружении, было $s=11$. (Отметим неудачное совпадение символов на рис. 4.214 и 4.215, где $s$ обозначает и величину, входящую в показатель степени в формуле (3.28) для модуля упругости, и деформацию сдвига при кручении в формуле (4.29). На рис. 4.215, *а* приведены результаты опыта, выполненного Муном при реверсивном кручении, где график зависимости $S^2$ от $s$ показывает, что параболический отклик для напряжений, найденный согласно формуле (4.29), продолжает определять пластическую деформацию и после закручивания в противоположном направлении. Увеличенный график, полученный на основе тщательных опытов по определению углов наклона касательных к графику при разгрузке и повторном нагружении, выполненных Муном, показанный на рис. 4.215, *б*, подчеркивает, что для понимания физики твердого тела важна роль Кельвина, предсказавшего такие уменьшения модуля упругости после предшествовавшей пластической деформации; это на самом деле оказалось основной особенностью явления.

В 1848 г. Джеймс Томсон предупреждал своих современников — кспериментаторов о том, что неизвестная термическая и механическая предыстории изучаемых ими материалов «достаточны для того, чтобы быть причиной многих очень противоречивых и путаных результатов, которые были получены различными исследователями сопротивления материалов» (Thomson [1848, 1]).

Герберт Томлинсон (Tomlinson [1887, 1, 2]) [1]) в 1887 г. считал важным изучение влияния деформации, происходящей в области остаточных деформаций, на функцию отклика, определяемую

---

[1]) Во время написания настоящей книги экспериментальное исследование Томлинсона «Влияние напряжений и деформаций на воздействие физических сил» поставило передо мной проблему. В пяти огромных статьях в «Философских трудах Лондонского Королевского общества» в период 1883—1891 гг. Томлинсон представил отчет, занявший 313 страниц и посвященный пояснению того, на что и как была израсходована предоставленная ему субсидия в размере 4000 фунтов стерлингов. Он рассмотрел большое число экспериментальных ситуаций и вопросов, всего в количестве 61, при общем числе отдельных экспериментов, равном 136.

Диапазон исследований распространялся на измерения модулей; влияние остаточной деформации на последующую упругую жесткость; объемную упругость; влияние электрических полей, магнитных полей и тепловой предыстории на деформацию; влияние различных типов деформирования (включая историю предшествовавшего нагружения) на электроповодность и магнитную индукцию и, наконец, на комбинированное влияние всех упомянутых факторов на вязкоупругие свойства материала. Оказывается неизбежным заключение о его возможной по-

после этого, в особенности если происходит и изменение температуры. Он (Томлинсон) подвешивал вертикально медную, алюминиевую, серебряную и платиновую проволоки диаметром в 1 мм, длиной от 60 до 90 см, закрепляя верхний конец и вставляя нижний конец в маленький латунный блок, к которому был прикреплен снизу крюк, позволяя таким образом добавлять любую нагрузку.

В первых опытах остаточная деформация кручения вызывалась начальным закручиванием проволоки, незагруженной в осевом направлении (Tomlinson [1887, 1]). С помощью зеркала, прикрепленного к латунному блоку, лампы и шкалы, установленных соответственно, Томлинсон мог определять следовавшие затем временные закручивания или раскручивания, которые сопровождали приложение осевой нагрузки. За этими опытами последовали другие, в которых он сначала закручивал проволоку до возникновения в ней остаточной деформации кручения, а затем нагревал ее паром. В течение от 0,5 до 2 ч он регистрировал *остаточное* раскручивание проволоки. Затем он заполнял камеру вокруг проволоки холодной водой, вызывал при этом падение температуры на 85 °С, неизбежно сопровождаемое *временным* закручиванием или раскручиванием образца. Повторные нагрев и охлаждение вызывали малую или незаметную вообще вариацию в значении временной закрутки или раскрутки. Повышение температуры от 15 до 100 °С вызывало в остаточно закрученных образцах из железа, алюминия и серебра временное раскручивание, а в образцах из меди и платины — временное закручивание. Как подчеркивал Томлинсон, величина этих эффектов была так незначительна, что требовались относительно длинные проволоки, чтобы их обнаружить. В этих опытах длина проволок диаметром 1 мм была равна 120 см.

Вслед за этой работой Томлинсон опубликовал в «Философском журнале» в сентябре 1887 г. вторую работу (Tomlinson, [1887, 2]), озаглавленную «Замечательный эффект нагрева до ярко-красного каления временно напряженного или остаточно деформированного железного образца». «Замечательная» особенность шести опытов, относившихся к категории посвященных изучению влияния предистории, была в выявлении внезапных изменений в крутильной, продольной или изгибной деформации вблизи любой из двух критических температур, точные значения которых Томлинсон при этом надеялся определить в дальнейшем. Он упоминает эти критические температуры, как соответствующие «темно-красному» и «ярко-красному» калению.

---

верхностности, если подсчитать, что в среднем автором было проведено по 9/4 эксперимента по каждому вопросу.

Мои трудности были связаны с тем, что те вопросы (61), которые он выбрал, были весьма интересны, но на основании его опытов чаще всего можно было только предполагать возможное поведение образцов. Когда же результаты были не такими ориентировочными, то они обычно оказывались повторениями с большим или малым пониманием работ предшествующих экспериментаторов. Такова моя оценка после многих часов детального изучения результатов его опытов.

В 1949 г. Дорн, Голдберг и Титц (Dorn, Goldberg and Tietz [1949, 1]), как раз через 101 год после опубликования предостережения Джеймса Томсона (Thomson [1848, 1]), обнаружили действительно «противоречивый результат» в эксперименте, в котором сказалось сильное влияние термической истории, описанный ими как «банкротство уравнений механического состояния» (Dorn и др. см. стр. 212). Для измерения нагрузки (силы) они устанавливали плоские растягиваемые образцы с уменьшенным сечением длиной 3 дюйма последовательно со снабженным измерительным инструментом «тарированным кольцом». Для измерения деформаций они использовали тензометр с зубчатой рейкой и зубчатым колесом (Dorn, Coldberg and Tietz [1949, 1], стр. 212) с базой 2 дюйма. Как и многие другие статьи об экспериментальных работах во второй половине XX века, их статья не содержит описания испытательной установки для растяжения образцов, указано только, что «все опыты проводились при скорости деформирования, равной примерно 0,0011 $с^{-1}$» (Dorn, Goldberg and Tietz [1949, 1]). Основную серию своих опытов они выполнили с образцами из поликристаллического алюминия низкой чистоты, отожженного при 1000 °F в течение 20 мин. Они также выполняли опыты с образцами из алюминия с чистотой 99,98%, из латуни, меди и из нержавеющей стали.

Опыты заключались в нагружении образцов при растяжении до определенной конечной деформации при одной температуре, в разгрузке до нулевого напряжения, изменении температуры окружающей среды, с повышением или понижением ее до нового уровня, а затем повторном нагружении образца до большой конечной деформации. Ожидалось, что сравнение функций отклика для второго значения температуры окружающей среды с функцией отклика для опыта, проведенного от нулевого значения напряжения при первоначальной температуре окружающей среды, позволит установить степень влияния термической истории. Они рассматривали четыре значения температуры: 78, 194, 260 и 292 К. Ниже мы обсудим результаты, соответствующие только крайним из указанных значений. На рис. 4.216 в терминах «истинных» напряжений и «истинных» деформаций приведены результаты серии опытов с первоначальным нагружением при 292 К до указанных конечных деформаций и затем, после разгрузки, с повторным нагружением до конечной деформации при 78 К. Дорн, Голдберг и Титц заметили, что конечная деформация при повторном нагружении при более низкой температуре не следует функции отклика (штриховая линия), полученной при проведении опыта сразу именно при такой температуре. То, что две функции отклика не совпадают, привело авторов к заключению, что функция отклика при конечных деформациях

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T),$$

на которую они ссылались как на «уравнение состояния», оказывается недостаточной для описания пластической деформации крис-

таллических тел, которые должны быть очень чувствительны к термомеханической истории. Такое заключение было, конечно, основано на предположении, что упругая разгрузка, последующее изменение температуры окружающей среды и затем упругое нагружение до новой поверхности пластичности не были существенными для наблюдаемого смещения поверхности пластичности при конечных деформациях, показанного на рис. 4.216.

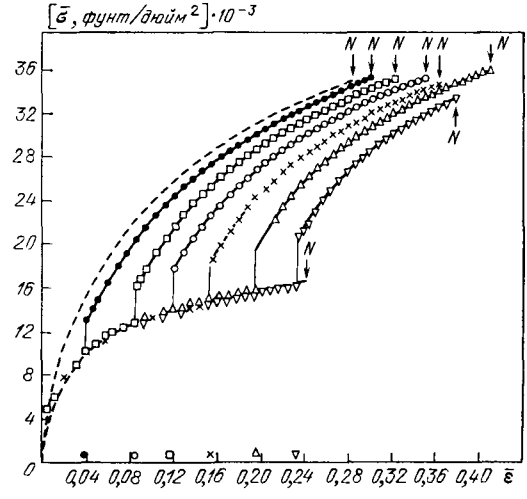



Рис. 4.216. Опыты Дорна, Голдберга и Титца (1949). Зависимости «истинных» напряжений от «истинных» деформаций в опытах по растяжению образцов при 78 К, которые предварительно были нагружены при 292 К и затем разгружены. Материал — отожженный поликристаллический алюминий низкой чистоты. По оси абсцисс отложены истинные деформации $\bar{\varepsilon}$, а по оси ординат — истинные напряжения $[\bar{\sigma}$, фунт/дюйм$^2]\cdot 10^{-3}$

Чтобы удостовериться, не был ли главным фактором сам цикл разгрузки и повторного нагружения, на что могли сослаться при выполнении исследования в прошлом веке, я пересчитал «истинные» напряжения и «истинные» деформации по данным Дорна, Голдберга и Титца на условные напряжения и условные деформации, пытаясь провести сравнение с общей параболической функцией отклика, соответствующей формуле (4.25) в разделе 4.21. Результаты (кружки) на плоскости $\sigma^2$—$\varepsilon$ на рис. 4.217 показывают, что единая функция отклика (соответствующие графики изображены сплошными линиями) не только описывает конечные деформации при наличии температурных изменений, но также и то, что после предварительной пластической деформации, разгрузки и повторного нагружения, сопровождаемого изменением температуры окружающей среды, изменения в функции отклика сводятся исключительно к смещению значения $\varepsilon_b$, соответствующего вершине параболы в формуле (4.25).

Самый верхний и самый нижний графики функций отклика, представленные на рис. 4.217, соответствуют опытам, выполненным при 292 и 78 К без промежуточной разгрузки. Сравнение рис. 4.216 и 4.217 еще раз демонстрирует влияние способа представления экспериментальных данных на их интерпретацию.

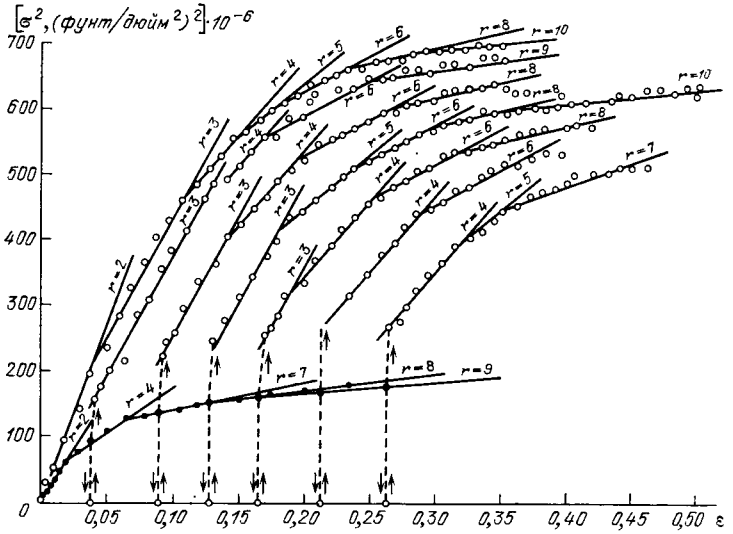



Рис. 4.217. Опыты Дориа, Голдберга и Титца. Данные, представленные на этом рисунке, пересчитаны в условные напряжения и деформации из истинных, в терминах которых выражались данные опытов. Зависимости $\sigma^2$ от $\varepsilon$ для условных напряжений и деформаций, пересчитанных по данным рис. 4.216, показывают соответствие во всех случаях данных опыта параболической зависимости, определяемой формулой (4.25) Белла (сплошные линии). Предварительное нагружение проводилось при 292 К (точки) повторное — при 78 К (светлые кружки). Образцы изготовлены из алюминия 2SO.

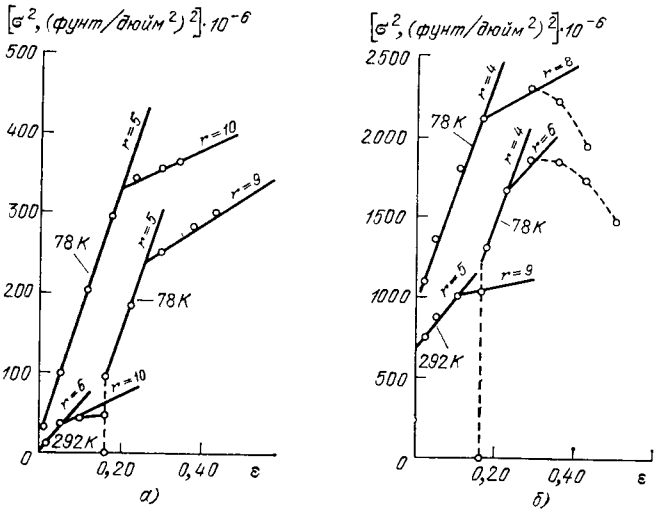



Рис. 4.218. Опыты Дорна, Голдберга и Титца. Данные о зависимостях $\sigma^2$ от $\varepsilon$ в опытах по растяжению образцов (кружки): *а*) из алюминия высокой чистоты (99,99%) и *б*) из отожженной меди, пересчитанные Беллом в условные напряжения и деформации из истинных напряжений и деформаций, в терминах которых проводились опыты. После начального нагружения при 292 К последовало повторное при 78 К. Эти данные сравниваются с результатами, полученными на основании формулы (4.25) (сплошные линии), для указанных индексов формы.

Образец, информация о котором представлена на рис. 4.217, был сначала нагружен при температуре 292 К, а затем повторно нагружен при 78 К. На рис. 4.218 показаны графики зависимости $\sigma^2$ от $\varepsilon$ по данным Дорна, Голдберга и Титца, которые я пересчитал, переведя их в термины условных напряжений и деформаций. В этих опытах с образцами из алюминия высокой чистоты и меди начальное нагружение также осуществлялось при 292 К, а повторное при 78 К. Сравнение с параболической функцией отклика, соответствующей формуле (4.25), показывает, что аналогичные заключения могут быть распространены на все три материала.

Я не привел данных Дорна, Голдберга и Титца для промежуточных температур. Опущены также аналогичные данные опытов с латунью и нержавеющей сталью. Вычисления с использованием номинальных напряжений и деформаций, которые я провел для всех опытов с алюминием низкой чистоты и для таких же опытов с алюминием высокой чистоты и с медью, привели к результатам, находящимся в близком соответствии с получаемыми на основе формулы (4.25), какой бы ни оказались механическая и термическая предыстории.

## 4.34. Краткий обзор экспериментов, выполненных после 1960 г., в котором описываются дополнительные аспекты распространения волн конечной амплитуды в кристаллических твердых телах

Экспериментальные исследования волн конечной амплитуды за последние десять лет охватывают столь широкий круг вопросов, что все их невозможно включить в настоящую главу. Я приведу небольшое число примеров из числа этих опытов, чтобы проиллюстрировать некоторые их черты, такие, как отыскание наибольших напряжений при распространении волн, изучение природы волн растяжения при конечных деформациях, доказательство некоторых положений, относящихся к переходным структурам при высоких скоростях деформаций, а также чтобы проиллюстрировать работы по нарастающим волнам и исследованию сложного процесса развития волны конечной деформации вблизи соударяющихся поверхностей.

Гордон Лютер Филби в своей докторской диссертации (Filbey [1961, 1]) изучал образование пластических волн при очень высоких скоростях удара. Я опустил описание его измерений с помощью дифракционных решеток скоростей деформаций порядка $7 \cdot 10^4$ $с^{-1}$, но включил на рис. 4.219 результаты измерений напряжений при свободном симметричном соударении одинаковых стержней, изготовленных из полностью отожженного алюминия, которые он выполнил, регистрируя изменения в электрическом напряжении в пьезокристалле толщиной 0,005 дюйма, прикрепленном к одному из соударяющихся образцов.

Наибольшее напряжение при относительной скорости соударяющихся образцов, в первый момент удара равной 14 200 см/с (наибольшая скорость частиц каждого из соударяющихся образцов [1] 7100 см/с), предсказанное на основании параболической функции отклика согласно формуле (4.54), было равно 19 200 фунт/дюйм², которое, как видно, хорошо согласуется с найденным экспериментально. Расчетная наибольшая деформация на фронте волны при

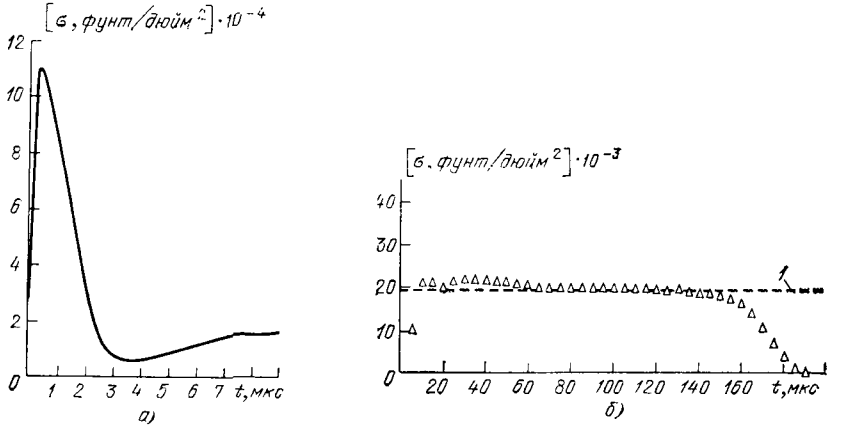



Рис. 4.219. Результаты опыта 434 Филби (с образцами из алюминия с чистотой 99,16%) по измерению при помощи пьезокристалла напряжений при высокоскоростном ударе и температуре 300 К. *а*) Наличие начального пика напряжений в первую микросекунду; *б*) последующий максимум напряжений, соответствующий параболической функции Белла, устанавливающей зависимость между напряжениями и деформациями; *1* — предсказываемое значение $\sigma_{max}$ при $r=2$ ($v_0=7100$ см/с).

этом напряжении составляла примерно 12%. Филби выявил изображенный на графике высокий начальный пик напряжений, который стал предметом многих исследований (Bell [1962, 1], [1968, 1]).

Результаты отчасти подобного описываемому здесь исследованию Филби, но при значительно более низких скоростях соударения были описаны в моей работе 1968 г. (Bell [1968, 2]). Жесткий алюминиевый стержень длиной $L_2$, в котором распространялась упругая волна известной амплитуды, вызванная ударом второго жесткого стержня длиной $L_1$, имел смазанную поверхность контакта с полностью отожженным алюминиевым стержнем. Результаты измерений, выполненных при помощи электротензометрического датчика сопротивления при прохождении падающей волны $\sigma_I$ и волны максимального напряжения $\sigma_T$ после прохождения отраженной волны в жестком стержне длиной $L_3$, изображенные на рис. 4.220, сравнивались с результатами измерений с помощью дифракционных решеток в «мягком» стержне на основании одномерного решения с использованием закона Гука для жесткого стержня и параболического закона согласно формуле (4.54) для «мягкого» стержня. Сравнение экспериентальных и расчетных данных выявило, что и наибольшее

напряжение и наибольшая деформация действительно соответствовали предсказываемым на основании общей функции отклика, соответствующей уравнению (4.54).

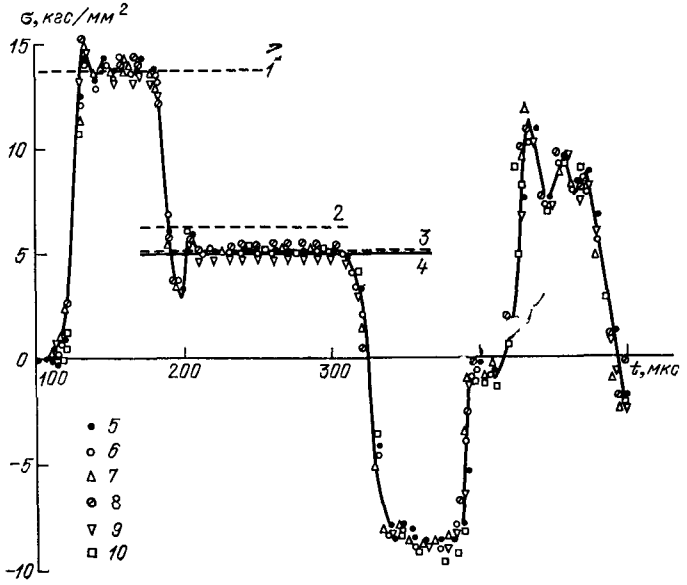



Рис. 4.220. Зависимости напряжения — время для жесткого стержня на основании шести опытов Белла, проведенных в 1968 г.; $L_1$=20 дюймов, $L_2$=30 дюймов, $L_3$=10 дюймов; *1* — $\sigma_T$ среднее; *2* — $\sigma_d$ теоретически найденное повышенное напряжение, *3* — $\sigma_T$ среднее, *4* — $\sigma_T$ теоретическое, *5—10*— номера опытов соответственно: 1161—1163, 1165, 1169 и 1175.

Опыты другого типа, связанные также с измерением наибольших напряжений, явились отчасти повторением опытов по загружению стержней Джонсона, Вуда и Кларка (Johnson, Wood and Clark

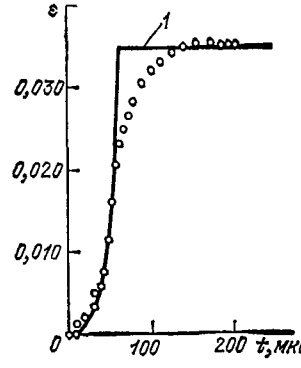



Рис. 4.221. Опыт Хартмана 1172. Зависимость деформации — время, полученная экспериментально при испытании жесткого образца длиной 30,5 см из α-латуни 70-30, ударяющего по образцу длиной 25,4 см из отожженной α-латуни 70-30 (скорость удара 2426 см/с) при температуре 300 К с использованием дифракционной решетки, расположенной от ударяемого торца на расстоянии одного дюйма (кружки), и сравнение этих данных с предсказываемыми на основании формулы (4.54) (сплошная линия); *1* — теоретическая максимальная деформация $\varepsilon_{max}$ при $r$=2).

[1953, 1]) и Дж. Д. Кэмпбелла (Campbell [1953, 1]), выполненных в 1953 г. (см. раздел 4.21), но теперь уже сопровождавшиеся действительными измерениями деформаций в «мягком» стержне, как это

показано, например, в результатах, приведенных на рис. 4.221, взятом из докторской диссертации Хартмана (Hartman [1967, 1]), выполненной в 1967 г., в которой измерение деформаций в отожженном латунном образце после удара жестким латунным стержнем производилось с помощью дифракционной решетки. И снова анализ граничных условий, основанный на использовании параболической функции отклика согласно формуле (4.54), выявил хорошую согласованность результатов опыта и расчета для этого случая несимметричного удара.

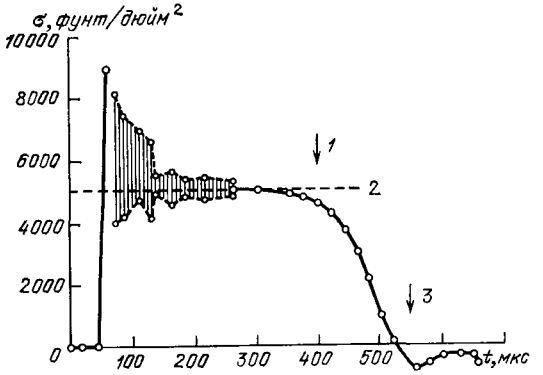



Рис. 4.222. Опыт Белла 724 (1969). Зависимость напряжение — деформация в жестком стержне, полученная экспернментальио при нспытанни образца из полнкрнсталлического отожженного алюмнния высокой чистоты (99,99%), ударяющего по жесткому алюмннневому стержню со скоростью 2407,6 см/с при температуре 300 К н расположенни датчнка в 10 дюймах от ударяемого торца (кружкн), сравнняемая с предсказываемой на основанни формулы (4.54) (штриховая лнния); *1* — теоретнческое $t_j$, *2* — теоретическое $\sigma_{max}$, $r=6$, *3* — теоретнческое $t_C$.

С 1959 г. я выполнил большое число таких опытов с различными материалами (Bell [1960, 3], [1961, 3, 4], [1963, 2], [1967, 2], [1968, 1], [1969, 1]). Из этой серии я выбрал для иллюстрации два опыта с алюминием и медью высокой чистоты, показанные на рис. 4.222 и 4.223. В этих опытах полностью отожженные образцы ударяют по жестким стержням из того же материала, на которых измерения производились при помощи электротензометрических датчиков сопротивления, и при этом выявлено, что напряжения в обоих случаях хорошо согласуются с предсказываемыми на основании использования параболической функции отклика согласно формуле (4.54).

Одно очень важное исследование такого типа было проделано Уильямом Дж. Гилличем (Gillich [1964, 1], [1967, 1]) в 1964 г. в опытах, вошедших в его докторскую диссертацию, в которых с помощью дифракционной решетки он измерял деформации в большом монокристалле при известной ориентации его осей в процессе распространения волн конечной амплитуды и обнаружил по профилям волн, что параболическая функция отклика для определяющей деформации сдвига, согласно формуле (4.24), может быть распространена и

на область скоростей деформаций, превышающих в миллион раз скорости медленного нагружения, для которых я первоначально обнаружил эту связь.

Один из результатов других опытов Гиллича, в которых монокристалл алюминия с известной ориентацией осей ударял по жесткому поликристаллическому стержню, приведен на рис. 4.224,

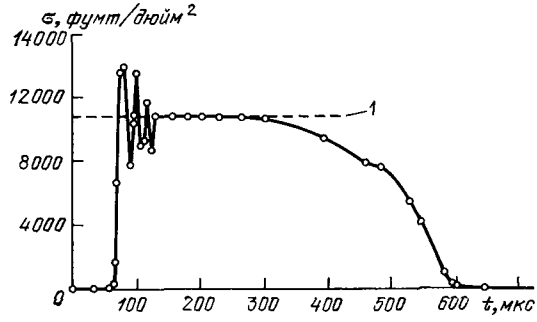



Рис. 4.223. Опыт Белла 1241 (1969). Зависимость напряжение — время, полученная в опыте, в котором образец из поликристаллической меди высокой чистоты (99,99%) ударяет по жесткому медному стержню при температуре 300 К и скорости удара 1464,5 см/с (датчик расположен в 10 дюймах от ударяемого торца (кружки)), сравниваемая с предсказываемой на основании формулы (4.54) (штриховая линия); *1* — теоретическое $\sigma_{max}$, $r=4$.

где показаны и результаты расчетного определения напряжений, основанного на использовании параболической функции отклика для монокристалла согласно формуле (4.24), дающей хорошую согласованность предсказанных на ее основе и найденных экспериментально напряжений.

Большинство полностью отожженных поликристаллических материалов, в которых изучалось распространение волн конечных деформаций, требовало весьма значительных изменений в предшествовавшей им термомеханической истории, чтобы при этом происходило изменение начального индекса формы $r$ в формуле (4.54) для функции отклика, определяющей распространение нелинейной волны. Интересным исключением оказалась $\alpha$-латунь, тщательно изученная Хартманом в 1967 г. (Hartman [1967, 1], [1969, 1, 2]). В каждом случае профили волн, полученные с помощью дифракционной решетки, соответствовали теории Тэйлора — Кармана, но индексы формы $r$ параболической функции отклика, найденные после того, как это соответствие было установлено, следовали распределению, показанному слева на рис. 4.225. Средние значения этих коэффициентов экспериментальных парабол для каждой группы сравнивались с предсказываемыми на основании формулы (4.54). Эта чувствительность показателя формы $r$ для $\alpha$-латуни к малым изменениям в предшествующей истории характеризует ее как твердое деформируемое тело, представляющее интерес для дальнейших исследований.

Трудности создания фронта волны с конечными деформациями растяжения были столь велики, что в более чем тысяче опытов за восемнадцать лет после разработки техники измерений с помощью дифракционных решеток все опыты были выполнены при сжатии. В своей докторской диссертации, выполненной в 1972 г., Ахтар Саламат Хан (Khan [1972, 1]) успешно разработал эксперимент, который сделал возможным не только измерение с помощью дифракционной решетки конечных деформаций растяжения при распространении волн, но также позволил провести одновременно в том же опыте измерение наибольших напряжений в волне.

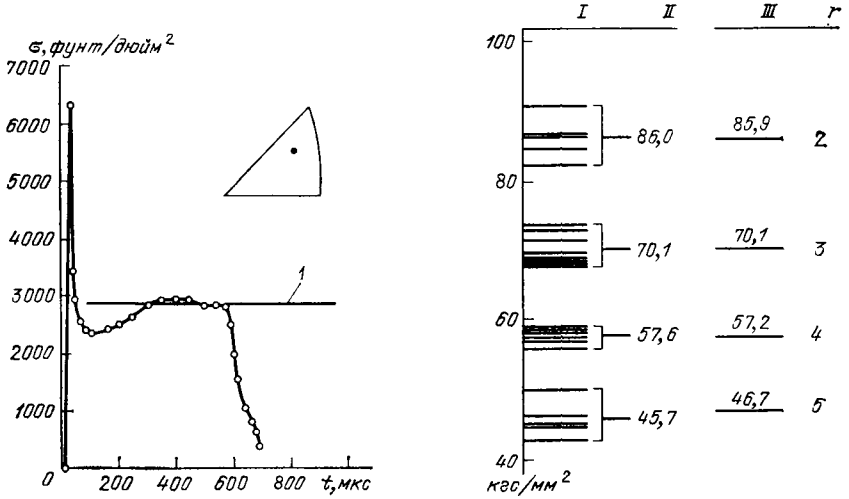



Рис. 4.224. Опыт Гиллича 581 (1964). Экспериментальная зависимость напряжение — время для образца из полнкристаллического алюмнния длиной 6 футов, по которому ударяет образец из монокрнсталла алюмнния высокой чистоты длнной 10 дюймов, с заданной начальной ориентацией ($\cos\Phi_0 \cos\lambda_0 = 0{,}4406$), со скоростью 1656 см/с. *1* — теоретическое $\sigma_{max}$ при $r=6$.

Рис. 4.225. Опыты Хартмана. Значения коэффнциента параболической функции отклика, полученные на основанни опытов по определеиию скоростей волн с помощью дифракционной решеткн для α-латунн 70-30. Усредненные экспернментальные значення для каждой группы сравниваются со значеннем, предсказываемым по Беллу иа основе параболической аппроксимацнн при указанных значенняx нндекса формы *r*; *I* — экспернментальное значенне β, *II* — среднее экспернментальное значенне $\overline{\beta}_{средн}$, *III* — предсказанное значенне $\beta_r$ (0 K).

Эксперимент, выполнявшийся с применением жесткого стержня, в котором упругая волна первоначально перемещалась к площадке контакта с «мягким» стержнем, был по замыслу таким же, как и опыты с волнами сжатия и упруго-пластической деформацией на границе, описанные выше, результаты которых изображены на рис. 4.220. Волна сжатия перемещалась по «мягкому» стержню, а отраженная волна — по жесткому стержню. Путем изготовления «мягкого» стержня таким образом, что одна половина его по длине представляла собой полую трубку, Хан получал как волну сжатия, так и волну растяжения, распространяющиеся в противополож-

ных направлениях от места контакта с жестким стержнем. На рис. 4.226 показана схема расположения элементов в опыте Хана и результаты его измерений с помощью электротензометрических датчиков сопротивления падающей и отраженной волн в жестком стержне, т. е. $\sigma_I$ и $\sigma_R$ соответственно. На рис. 4.227 показаны профили волн конечной деформации, найденные с помощью дифракционных решеток для двух сечений растянутой части стержня и для двух сечений в сжатой части.

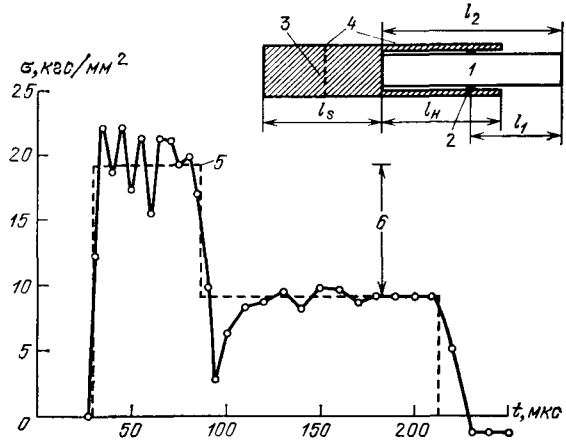



Рис. 4.226. Опыт Хана 1743 (1972). Сравненне экспериментальной зависимости напряжение — время в жестком стержне с предсказываемой на основании формулы (4.54). *1* — жесткий нагружающий стержень, *2* — датчик деформации, не чувствительный к изгибу, *3* — упруго-пластическая плоскость раздела, *4* — дифракционная решетка, *5* — предсказываемое $\sigma_I$; *6* — предсказываемое $\sigma_R$.

На основании своего опыта изучения профилей волн конечной деформации при известных скоростях частиц Хан первым установил, что нелинейная теория Тэйлора и Кармана справедлива и в случае волн растяжения. Хан смог установить и определяющую функцию отклика. Он обнаружил, что эта функция очень близка к той, которую я определил для волн сжатия, т. е. к определяемой формулой (4.54) в разделе 4.28. Замеренные и предсказанные продолжительности прохождения фронтов волны растяжения и волны сжатия точно определялись на основании одной и той же функции отклика, так же как и измеренные наибольшие деформации в каждом случае и наибольшие напряжения для отраженной волны в жестком стержне, показанном на рис. 4.226.

Таким образом, так же, как и в квазистатических опытах, когда находятся условные напряжения и деформации, описание фронта волны растяжения подчиняется той же функции отклика, что и для фронта волны сжатия.

Все опыты с нарастающими волнами, которые я упоминал выше в разделе 4.27, начиная от моих первых опытов, проводившихся

в 1951 г., и до работ Альтера и Картиса 1956 г. были выполнены до того, как отыскание профилей волн на основании метода дифракционных решеток позволило уверенно проводить экспериментальное изучение распространения волн конечной амплитуды. Бьянки в

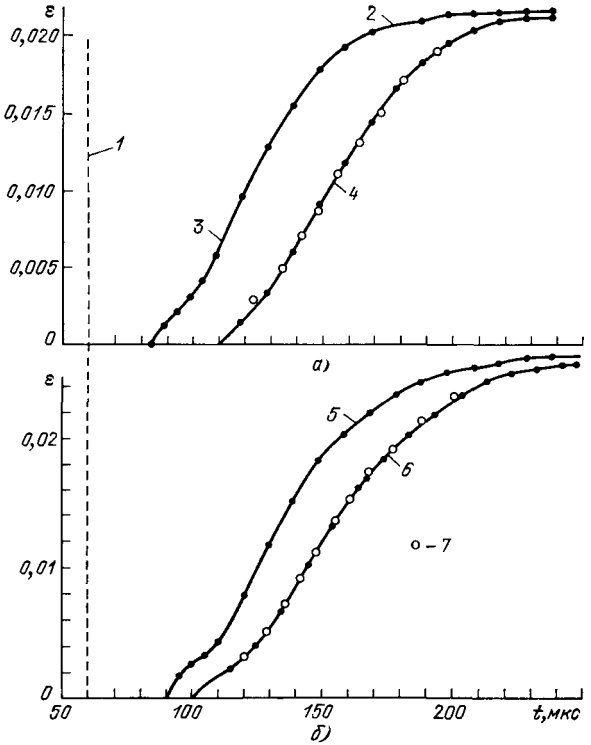



Рис. 4.227. Опыты Хана (1972). Профили конечных деформаций, определенные с помощью дифракционных решеток в растянутой и сжатой частях образца, изображенного на рис. 4.226, сравниваемые с предсказываемыми по формуле (4.54). Сжатое сечение (поверхность раздела смазана): *а*) *1* — линия, соответствующая предсказываемой продолжительности прохождения фронта упругой волны от ударяемого сечения по поверхности раздела, *2* — предсказываемое $\varepsilon_{max}$, *3* — среднее из опытов 1706 и 1712 в сечении, удалением от места удара на $x=5{,}08$ см, *4* — среднее из опытов 1708 и 1710 в сечении с $x=7{,}62$ см, по оси абсцисс отложено время $t$ в мкс, по оси ординат — деформация: *б*) растянутое сечение: *5* — опыт 1570, $x=3{,}81$ см (плоскость раздела покрыта клеем), *6* — опыт 1743, $x=5{,}32$ см (смазанная поверхность раздела), *7* — предсказываемая продолжительность прохождения волны от сечения с $x_1=3{,}81$ см до сечения $x_2=5{,}16$ см.

1963 г. (Bianchi [1963, 1], см. также [1960, 1, 2]) и Белл и Штейн в 1962 г. (Bell and Stein [1962, 7]) вновь провели опыты с нарастающими волнами, но уже на основании новой экспериментальной техники и теории, отсутствовавших ранее.

Бьянки модифицировал свой опыт с длинными медными полосами, о котором он сообщил в своей диссертации в 1953 г. (Bianchi [1953, 1]). На этот раз он использовал индуктивные датчики для измерения скорости частиц в отдельных сечениях, расположенных на

протяжении оси полосы. Несмотря на наличие искажения в профиле падающей волны, возникавшее вследствие примененного Бьянки метода, в котором конечные деформации вызывались путем удара по двум связанным полосам, им было обнаружено, что коль скоро волны генерировались в зоне, определяемой автором, как асимптотический участок там они распространялись в соответствии с нелинейной теорией Тэйлора и Кармана (Taylor [1942, 1], von Kármán [1942, 1]); исключение составлял небольшой фронт падающей волны, распространявшийся при несколько более высокой скорости, безотносительно к значению квазистатического предварительного напряжения.

Опыты Белла и Штейна в 1962 г. были основаны на эксперименте Альтера и Картиса, проведенного в 1956 г. (Alter and Curtis [1956, 1]) с нарастающей волной, в которой динамическое преднапряжение, вызванное соударением жесткого стержня с «мягким» образцом, сопровождалось после нескольких микросекунд нарастающим увеличением нагрузки, создаваемой резким изменением площади поперечного сечения жесткого стержня в некоторой точке его оси. Однако теперь можно было использовать дифракционные решетки для изучения профиля нарастающих волн. Изучавшимся материалом был полностью отожженный горячекатаный алюминий. На рис. 4.228 изображены использованные образцы. Измерения с помощью электротензометрических датчиков сопротивления, установленных на жестком стержне, обеспечивали связь между экспериментальными результатами и предсказываемыми для сечений, расположенных на расстояниях трех дюймов (сплошная линия) и шести дюймов (штриховая линия) от ударяемого торца. Для жесткого стержня, в котором распространение волны определяется линейной упругостью, напряжения пропорциональны деформациям. Видно, что значение приложенного приращения напряжения было лишь незначительно меньше при измерениях в опыте, результаты которого показаны на рис. 4.229, чем при первоначальном динамическом преднапряжении.

Пример определения нарастающей части профиля деформаций, изображенного на рис. 4.230, полученного с использованием дифракционных решеток в двух позициях стержня из полностью отожженного алюминия, показывает, что только очень малая начальная часть фронта волны перемещается со скоростями, соответствующими таковым для линейной упругости, в то время как большие деформации нарастающей волны имеют скорости, соответствующие предсказываемым (формула (4.54), раздел 4.28) для более медленно перемещающейся пластической волны (Bell and Stein [1962, 7]).

На основании большого числа опытов, при этом результаты многих из них не опубликованы до сих пор, я обнаружил, что все детали поведения за пределами начального упругого линейного предвестника могут быть определены путем использования параболической функции отклика согласно формуле (4.54). Мое предположение,

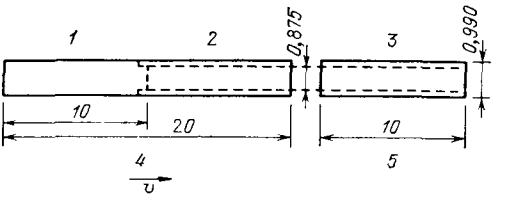



Рис. 4.228. Опыты Белла и Штейна (1962). Комбинированный жесткий алюминиевый ударяющий образец и «мягкий» алюминиевый трубчатый ударяемый образец. Дифракционная решетка расположена на «мягком» ударяемом алюминиевом образце; *1* — жесткий алюминиевый стержень, *2* — жесткая алюминиевая трубка, *3* — «мягкая» алюминиевая трубка, *4* — ударяющий образец, *5* — ударяемый образец.

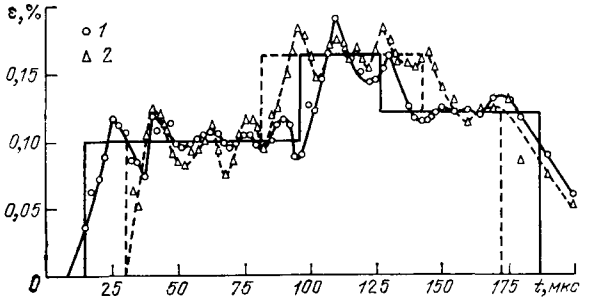



Рис. 4.229. Опыты Белла и Штейна (1962). Экспериментальные данные о зависимости деформаций от времени в комбинированном упругом алюминиевом ударяющем образце, сравниваемые с расчетными данными для сечений, отстоящих на 3 и 6 дюймов от ударяемого торца. Удар был о «мягкий» алюминиевый трубчатый образец; *1* — сечение на расстоянии трех дюймов от ударяемого торца, *2* — сечение на расстоянии шести дюймов от ударяемого торца.

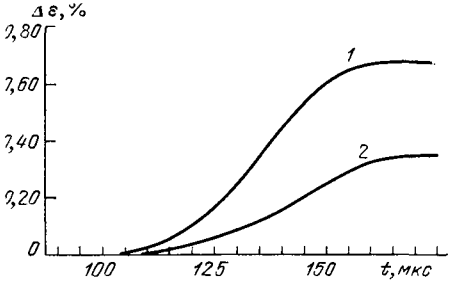



Рис. 4.230. Опыты Белла и Штейна (1962). Сравнение результатов типичных измерений с помощью дифракционной решетки нарастающих волн в указанных сечениях при динамическом пластическом предварительном напряжении в 4,5 кгс/мм²; *1* — сечение на расстоянии 1/2 дюйма от ударяемого торца, *2* — сечение на расстоянии 1 дюйма от ударяемого торца.

что высокая скорость нарастающих волн связана с эффектом Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье) (см. выше раздел 4.31), даже когда преднапряжение остается постоянным на протяжении столь малого промежутка как 10 мкс, было продемонстрировано весьма детально. Начальный фронт волны высокой скорости был ограничен известным значением высоты ступеньки Савара — Массона и сопровождался шагом приращения деформации, после которого скорости пластической волны не отличались от скоростей в случае отсутствия нарастающих волн. На рис. 4.231 приведены результаты одного из многих опытов этого более позднего исследования,

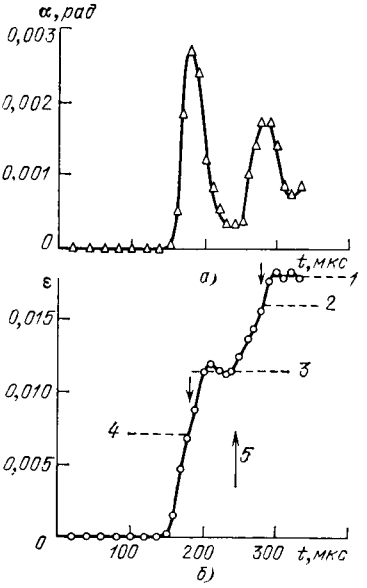



Рис. 4.231. Опыт Белла 1445 (1972). Деформация и угол поворота нормали к поверхности, измеренные с помощью дифракционных решеток в полностью отожженном сплошном алюминиевом стержне, сравниваемые с предсказываемыми для нарастающей волны на основании формулы (4.54) в условиях динамического предварительного напряжения и приращения деформаций. *а*) Зависимость угла поворота $\alpha$ нормали к поверхности (в радианах) от времени в мкс; *б*) зависимость деформации от времени в мкс: *1* — $\varepsilon_T + \Delta\varepsilon_T$ — теоретическое значение, *2* — $\Delta\varepsilon$ (теоретическое значение), *3* — теоретическое значение $\varepsilon_{max}$, соответствующее преднапряжению, *4* — теоретическое значение $\bar{\varepsilon}$, *5* — теоретически определенный момент появления приращений деформации.

также с полностью отожженным алюминием, в которых зависимости угла поворота нормали к поверхности образца от времени и конечной деформации от времени профилей динамического преднапряжения и нарастающей волны были получены при помощи техники дифракционных решеток и сравнены с расчетными, найденными на основе использования параболической функции отклика согласно формуле (4.54). Я опустил данные измерений напряжений в жестком стержне, которые также свидетельствовали о детальном соответствии между экспериментальными результатами и предсказываемыми на основании нелинейной теории волн Тэйлора и фон Кармана.

В динамической пластичности изучению роста параметров волновых фронтов вблизи соударяющихся поверхностей было уделено почти такое же внимание в опытах, как и изучению волн нагружения и разгрузки. Сотни опытов, атакующих эту трудную проблему со

многих очень разных сторон, показали, что вплоть до расстояния от ударяемого торца, равного ($^1/_2$—1)$d$ ($d$ — диаметр поперечного сечения стержня) задача может быть успешно разрешена только как трехмерная.

В ряд статей на протяжении прошедших двенадцати лет я включил результаты различных опытов, которые привели к довольно подробному описанию сложных элементов роста волн и отражения от боковых стенок цилиндра (Bell [1960, 4], [1961, 1], [1962, 1, 6], [1963, 2], [1965, 1], [1967, 2]). Имелись две волновые структуры с разделением энергии поровну между первой волной, практически имеющей форму мгновенно возникшей ступеньки, и вторым волновым фронтом, который развивается более медленно отражениями от свободной боковой поверхности. Вместо описания многих типов экспериментов я ограничусь рассмотрением только одной серии опытов. За исключением этой серии опытов, другие экспериментальные исследования не привели к успешным способам определения смешанных функций отклика, позволяющих учесть все наблюдаемые особенности явлений.

Серия экспериментов, которую я здесь рассматриваю, была посвящена измерению продолжительностей прохождения начальных волновых фронтов, получаемых посредством усреднения многих профилей волн деформации, отыскиваемых при помощи дифракционных решеток, расположенных от плоскости соударения двух одинаковых цилиндров из полностью отожженного алюминия на расстояниях, равных длине $^1/_4$ и $^1/_2$ диаметра. Эти результаты (Bell [1962, 1]) сравнивались со скоростями волн, указанными Трусделлом в 1961 г. (Truesdell [1961, 1]) в его работе «Общая и точная теория волн при конечных упругих деформациях».

Джеральд Лаверн Эриксен указал, что скорости главных волн в изотропном теле по Трусделлу «принимают более простую форму, если их выразить в терминах зависимости, представляющей главные напряжения в виде функций главных удлинений». (Truesdell [1961, 1], стр. 275, сноска 7). Эксперимент и теорию можно сравнить по соответствующим скоростям продольной и поперечной волн, $U_{\parallel}$ и $U_{\perp}$, распространяющихся вдоль главных осей. Для равномерного всестороннего растяжения (сжатия) результаты Трусделла принимают особенно простую форму. Имея значения скоростей волн, найденные в моих опытах по продолжительности их прохождения между точками, отстоящими от плоскости соударения на расстояниях, равных длине $^1/_4$ и $^1/_2$ диаметра, для установления зависимости между напряжением и временем достаточно найти деформацию $\varepsilon$ и плотность $\rho$ из уравнения Трусделла. Результаты таких вычислений, основанных на данных, представленных на рис. 4.232 (кружки на рис. 4.233), показывают, что образование пика в значениях напряжений и последующее их падение, описанное в терминах этих теоретических скоростей волн, хорошо согласуются с зависимостью изменения напряжений во времени непосредственно у

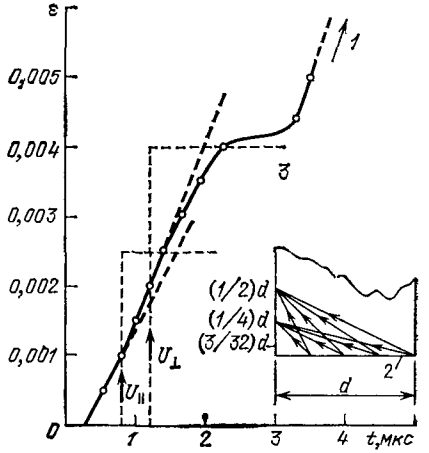



Рис. 4.232. Опыты Белла (1962). Начальная часть графика зависимости деформация — время, абсциссы которого получены путем вычитания абсцисс кривой зависимости деформация — средняя продолжительность прохождения волны от ударяемого торца до сечения, находящегося от него на расстоянии, равном длине 1/4 диаметра, из аналогичной величины для сечения, находящегося на расстоянии 1/2 длины диаметра. Нижняя ступень, начерченная штриховой линией, соответствует гипотетическому фронту удара. Верхняя ступень, изображенная штриховой линией, соответствует элементарной теории стержня, в которой скорость волны $c_0=\sqrt{E/\rho_0}$; *1* — наибольшая деформация 2,6%; *2* — ударяемый торец; *3* — разность между усредненными данными для сечения, находящегося на расстоянии 1/2 диаметра от ударяемого торца, и усредненными данными для сечения, находящегося на расстоянии 1/4 диаметра от ударяемого торца.

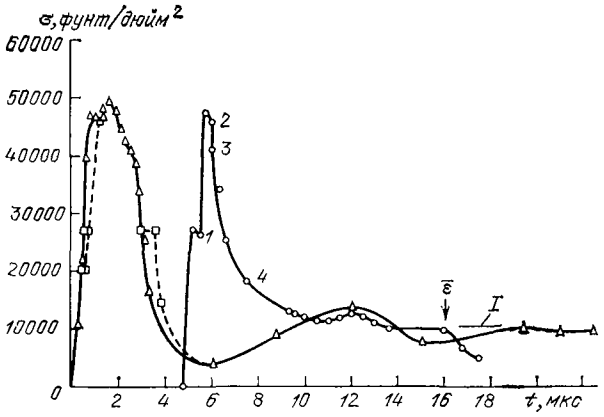



Рис. 4.233. Опыты Белла (1962). Расчетная зависимость напряжение — время для сечения, расположенного на расстоянии равном 3/8 длины диаметра от ударяемого торца (скорость удара $v_0$=66,5 фут/с) (кружки), сравниваемая с двумя опытными зависимостями, полученными для соударяемой плоскости по данным измерений, проведенных при помощи пьезокристаллов (треугольники и квадраты), ε — деформация, соответствующая средней энергии, получаемой при использовании параболической зависимости между напряжениями и деформациями, также найденная опытным путем по данным для углов поворота нормали к поверхности. Данные для точек на графике:

*1* — ε=0,001, $U_\parallel=3{,}2\cdot10^5$ дюйм/с;

*2* — ε=0,002, $U_\perp=2{,}08\cdot10^5$ дюйм/с;

*3* — ε=0,0025, $U_{12}=1{,}81\cdot10^5$ дюйм/с;

*4* — ε=0,004. $U_{12}=1{,}11\cdot10^5$ дюйм/с.

*I* — предсказываемое динамическое максимальное напряжение.

плоскости соударения, полученной при помощи пьезокристаллов (треугольники и квадраты на рисунке 4.233) для такого же типа эксперимента.

Сдвиг во времени примерно на 5 мкс графиков зависимости напряжение — время, один из которых получен при помощи измерений посредством дифракционной решетки, а другой — прямым определением у плоскости удара при помощи пьезокристаллов, появляется из-за различного расположения этих двух средств измерения. Хотя уровень напряжений не превышал даже 35 кгс/мм², измеренная скорость дилатационной волны, составлявшая 8128 см/с в течение первых нескольких микросекунд после образования волны, превышала, как и предсказывал Трусделл, значение в 6350 см/с, полученное на основании элементарной теории. Вне непосредственной близости к зоне удара, за исключением весьма малых деформаций, не были обнаружены волны со скоростью, превышающей указанное значение, соответствующее элементарной теорией упругости, ни с помощью ультразвуковых измерений, ни с помощью квазистатических опытов.

Поскольку в своей теории Трусделл рассматривал слабые волны, распространяющиеся в произвольно деформируемом упругом теле, тогда как в моих опытах фронты волн большой амплитуды распространялись в преднапряженном поликристаллическом алюминии, корреляция, предпринятая мною путем сопоставления этих двух результатов, является чисто эмпирической. Отсылая заинтересованного читателя к моим статьям, где описаны опыты по возбуждению волн и росту их после соударения тел, я подчеркиваю, что, по моему мнению, данная область исследований должна оказаться одной из наиболее плодотворных при проведении экспериментальных и теоретических исследований.

Я отобрал немного иллюстраций в этом разделе, чтобы указать еще раз на то, что вслед за открытием новой экспериментальной техники могут быстро последовать многочисленные разнообразные исследования. Исследования в этих различных направлениях науки о распространении волн конечной амплитуды в настоящее время находятся на стадии такого быстрого развития, что критическая оценка, выполненная на основании имеющихся результатов, вскоре потребует пересмотра.

### 4.35. Об экспериментах, ведущих к общей теории пластичности при отклике в условиях нагружения отожженных кристаллических твердых тел

Весной 1971 г. в Болонье я собирал для предварительного наброска настоящей книги данные об экспериментальном изучении конечной деформации отожженных кристаллических тел; рассмотрение и сравнение всех известных экспериментальных данных привели меня к формулированию общей теории пластичности, которая с

тех пор была полностью развита, как внутренне согласованное выражение рациональной механики [1]) (Bell [1972, 2]). Экспериментальные данные включают опыты по построению функций отклика при конечных деформациях в диапазоне отношений главных напряжений от $-1$ до $+1$, но еще не включают опытов с конечными деформациями при больших поворотах, а также опытов, в которых все три главные направления отличны от нуля. Поэтому оказывается удобным представить эти экспериментальные результаты в терминах аппроксимации в рамках общей теории, которая применяется к случаю, когда имеют место конечные деформации при относительно малых поворотах и при условии, что по крайней мере одно из главных напряжений равно нулю.

Теория, которая предназначается для описания более общей функции отклика *при нагружении* полностью отожженных поликристаллических тел, формально относится к нелинейной теории упругости. Энергия деформирования $W$ может быть выражена через главные удлинения $\lambda_i = 1 + E_i$, следующим образом:

$$W = \frac{2}{3}\beta\left[(E_1 - E_2)^2 + (E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2\right]^{3/2} = \frac{2}{3}\tau\gamma, \quad (4.70)$$

при следующем ограничении в процессе деформирования: $\sum E_i = 0$. В настоящей книге при больших деформациях, сопровождающихся относительно малыми поворотами, можно ввести следующую аппроксимацию:

$$T \approx \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial E_1} - \frac{\partial W}{\partial E_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial E_2} - \frac{\partial W}{\partial E_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial E_3} - \frac{\partial W}{\partial E_1}\right)^2\right]^{1/2}. \quad (4.71)$$

Для простого растяжения, для простого кручения и для опытов при совместном растяжении и кручении (тонкостенных.— *А. Ф.*) труб, формула (4.71) может быть записана в терминах условного нормального напряжения $\sigma$ и условного касательного напряжения при кручении $S$ в виде

$$T \approx \sqrt{2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{3} + S^2}. \quad (4.72)$$

---

[1]) Этот ранее не публиковавшийся труд был частью программы исследований, проводимых при субсидировании Отделом научных исследований Военно-воздушных сил США (United States Air Force Office of Scientific Research), так же как и этапы более ранних исследований в моей лаборатории, описанные в разделах 4.17—4.22 и 4.27—4.34, которые привели к открытию этого обобщения. Другие этапы исследований, описанные в этих разделах, включая очень раннюю работу 50-х гг. и первоначальные опыты с использованием моей техники дифракционных решеток, были уже на первых порах и затем неизменно поддерживались Армейскими исследовательскими лабораториями баллистики США (полигон в Абердине) и Отделом Армейских исследований США в Дюрхеме (United States Army Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground; U. S. Army Research Office, Durham).

В случае опытов при совместном воздействии на (тонкостенные.— *А. Ф.*) трубы внутреннего давления и осевого растяжения и в опытах при осевом сжатии и внешнем давлении уравнение (4.71) может быть записано с использованием двух главных, отличных от нуля условных напряжений $\sigma_1$ и $\sigma_2$:

$$T \approx \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2}. \qquad (4.73)$$

В соответствии с правилом, что наиболее правдоподобная гипотеза соответствует экспериментальным наблюдениям лучше, чем предшествовавшие, следует снова заметить, что безотносительно, рассматриваются ли напряженные состояния с одним или с большим числом ненулевых компонентов напряжений, постоянное соотношение между напряжениями и деформациями как для поликристаллического тела, так и для монокристалла может быть получено лишь тогда, когда все эти напряжения и деформации отнесены к недеформированному начальному состоянию полностью отожженного тела. Важность этого начала отсчета была установлена ранее, когда я обнаружил, что нешаблонные процедуры отжига (имеется в виду полный отжиг.— *А. Ф.*) приводят к новому исходному состоянию, для которого значение памяти о предшествовавшей термической и деформационной истории было сведено к минимуму.

Прежде всего следует отметить, что относящаяся к данному случаю функция отклика для определенной деформации сдвига в монокристалле, рассмотренная в разделах 4.17 и 4.18 данной книги, имеет вид

$$\tau = \beta_s \gamma^{1/2}, \qquad (4.62) \text{ (повторно)}$$

где

$$\beta_s = \left(\frac{2}{3}\right)^{r/2} \mu(0) \frac{B_0}{m^{3/2}} \left(1 - \frac{T}{T_m}\right).$$

Отметим, что в этом уравнении $T$ — температура окружающей среды, а $T_m$ — температура плавления материала (Bell [1961, 1], [1963, 1], [1964, 1], [1965, 2], [1968, 1]).

Из опытов Дэвиса, проведенных в 1943 г. (Davis [1943, 1]) (см. выше раздел 4.15) с поликристаллической медью при простом нагружении с двумя ненулевыми главными напряжениями (в условиях двумерного напряженного состояния во всей области.— *А. Ф.*), отношение между которыми изменялось от нуля до единицы, и из опытов Миттала с полностью отожженным алюминием, выполненных в 1969 г. (раздел 4.22) (Mittal [1969, 1], [1971, 1]), для многих случаев простого и сложного нагружения при одновременном растяжении и кручении, можно заключить следующее: когда компоненты напряжений в уравнениях (4.73) и (4.72) и компоненты деформации являются условными (отнесенными к недеформированной схеме тела), то общая функция отклика оказывается параболической (независимо от пути нагружения, с коэффициентом параболы, имею-

щим вид линейной функции от температуры) и задается непосредственно с учетом найденных экспериментально коэффициентов поликристалличности (см. раздел 4.32), которые я установил десять лет тому назад для элементарных видов деформаций (опыты Миттала были несвязными, т. е. в них мертвый груз, растягивающий образец, не поворачивался при возбуждении при помощи мертвой нагрузки кручения).

Не менее важно, как будет показано ниже, то, что для изотропных тел на эту общую функцию отклика при различных комбинациях значений компонентов напряжений могут быть наложены ступеньки по Савару — Массону. Отклонение от графика параболической функции отклика по вертикали при возрастании напряжения и близкой к постоянному значению деформации сменяется участком увеличения деформаций при близком к постоянному значению напряжений с возвращением точно к графику параболической зависимости функции отклика. Такая же картина неизменно имеет место и при комбинации отдельных приращений компонентов деформации. То, что эта картина не обязательно такова для отношений отдельных компонентов,— это важное открытие, влияющее на любое представление уравнений состояния, управляющих конечными деформациями в кристаллах.

В разделе 4.32 для элементарных деформаций — растяжения, сжатия или кручения было показано, что по данным опытов в терминах условных напряжений и деформаций можно использовать формулу (4.60) для растяжения и сжатия и (4.61) для кручения

$$\sigma/\tau = \bar{m} = \gamma/\varepsilon, \quad \text{где } \bar{m} = 3{,}06. \qquad (4.60)\ \text{(повторно)}$$

$$S/\tau = \bar{n} = \gamma/s, \quad \text{где } \bar{n} = 1{,}765, \qquad (4.61)\ \text{(повторно)}$$

Комбинирование функций отклика, экспериментально установленных на основе предварительного изучения элементарных деформаций с новыми результатами для более сложных случаев, и введение Γ согласно нижеприводимой формуле

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}[(E_1 - E_2)^2 + (E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2]^{1/2},$$

причем для случая совместного растяжения и кручения

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3\varepsilon^2 + s^2},$$

позволяет с учетом всех типов опытов установить для монокристаллов и поликристаллических тел следующее отношение:

$$T/\tau = \bar{k} = \gamma/\Gamma, \quad \text{где } \bar{k} = 2{,}50. \qquad (4.74)$$

Мы отметим, что

$$\bar{m} = \sqrt{\frac{3}{2}}\bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{n} = \frac{\bar{k}}{\sqrt{2}}.$$

Из зависимостей (4.62) и (4.74) получаем

$$T = \bar{k}^{3/2}\beta_s\Gamma^{1/2}. \tag{4.75}$$

Информацию, соответствующую растяжению, сжатию и кручению, представленную на рис. 4.204 в разделе 4.32, я пересчитал, переведя ее в терминах $T$ и $\Gamma$ и представил на графике рис. 4.234, чтобы проиллюстрировать соответствие экспериментальных [1]) результатов полученным теоретически.

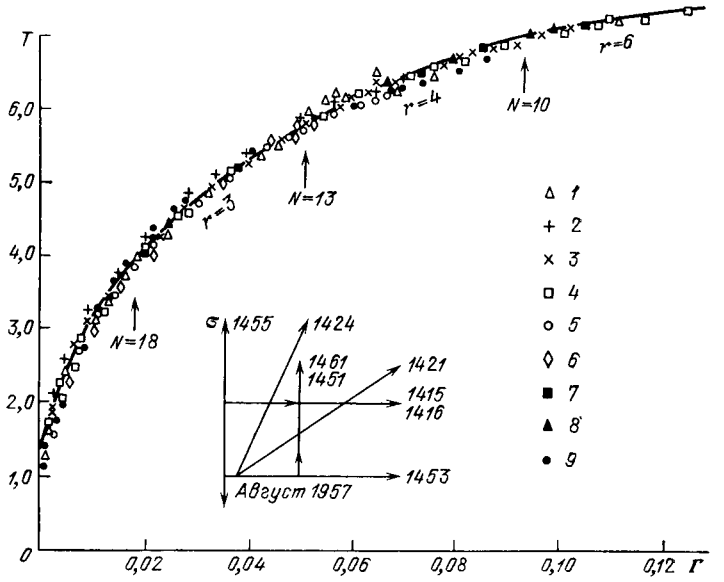



Рис. 4.234. Результаты опытов по простому и сложному нагружению при совместном растяжении и кручении труб, изготовленных из полностью отожженного алюминия, сравниваемые с зависимостью $T$ от $\Gamma$, предсказываемой на основании (4.75); $T$ и $\Gamma$ определяются на основании формул (4.70) и (4.71). Начальный индекс формы $r=2$; сплошная линия — теория (Белл); *1* — опыт 1461 — сложное нагружение; *2* — опыт 1424 — простое нагружение при $\dot{S}/\dot{\sigma}=0{,}46$; *3* — опыт 1451 — нагружение сложное; *4* — опыт 1421 — нагружение простое при $\dot{S}/\dot{\sigma}=1{,}52$; *5* — опыт 1415 — нагружение сложное; *6* — опыт 1453 — простое растяжение; *7* — опыт 1455 — простое растяжение; *8* — опыт, выполненный в августе 1957 г.— простое сжатие; *9* — опыт 1416 — нагружение сложное.

Эксперименты Дэвиса 1943 г. при различных отношениях главных напряжений были выполнены с образцами из отожженной меди, а опыты Миттала — по одновременному растяжению и кручению с образцами из полностью отожженного алюминия.

---

[1]) В описании экспериментальных результатов Миттал [1969, 1], [1971, 1], как я отметил выше, опустил небольшую добавку в компоненте кручения из-за неучета собственного веса самих сосудов, в которые с постоянной скоростью втекала вода. Несмотря на то, что эта малая поправка не повлияла ни на одно из заключений Миттала, я включил эту поправку в пересчет данных для графиков зависимостей $\Gamma$ от $T$ на рис. 4.234.

В моем анализе функции отклика для монокристаллов и поликристаллических тел, обобщенном в 1968 г., было подробно проиллюстрировано, что переходы второго порядка происходят при фиксированных значениях конечной деформации, образующих некоторую последовательность. Значения $\gamma_N$, $\varepsilon_N$ и $s_N$ (см. выше раздел 4.32) для поликристалла зависят, как было показано, от коэффициента поликристалличности (см. формулы (4.69)). Более детальное описание дальнейших исследований было приведено в наиболее поздней статье (Bell [1971, 1]). Наблюдаемая последовательность фиксированных значений деформаций перехода в терминах Γ может быть определена по формуле

$$\Gamma_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{N/2}, \tag{4.76}$$

где $N=0, 2, 4, 6, 8, 10, 13, 18$.

Для отношения деформаций из (4.74) мы имеем при элементарной деформации

$$\gamma_N = \bar{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{N/2}, \quad \varepsilon_N = \frac{\bar{n}}{\bar{m}} \left(\frac{2}{3}\right)^{N/2}, \quad s_N = \left(\frac{2}{3}\right)^{N/2}. \tag{4.76a}$$

Из рассмотрения определяющего сдвига в монокристалле и функций отклика при осевом нагружении и простом кручении, отыскиваемых для поликристаллического тела по формулам (4.76a), следует, что при посредстве формулы (4.76) получен общий результат.

Меир Флоренц (Florenz [1969, 1] в своей диссертации в 1969 г. сообщил о серии, состоящей из более чем 40 опытов с кубиками из полностью отожженного алюминия, в которых использовалась модификация эксперимента Бриджмена (Bridgman [1949, 1]) по двухосному сжатию (раздел 4.16). После того как было установлено, что тщательные опыты при одноосном сжатии кубиков с двумя противоположными смазанными гранями дают результаты, хорошо описываемые параболической функцией отклика согласно формуле (4.25), в условиях медленного как жесткого, так и мягкого нагружения, Флоренц получил параболическую функцию отклика для опытов, в которых были отличные от нуля два главных напряжения. При анализе определенных Флоренцем на основании усреднения результатов ряда опытов значений коэффициентов параболы я установил, что функция отклика хорошо согласуется с формулой (4.75) и с формулой (4.78) — см. ниже (Bell and Florenz [1972, 5]).

Обобщая и анализируя опыты по более сложному нагружению, выполненные в моей лаборатории или опубликованные в течение последних нескольких десятилетий, для подготовки настоящей работы по экспериментальным основам, я пришел к выводу, что когда функция отклика для стадии пластического деформирования выражена в терминах условных напряжений и деформаций, как указывалось выше, то отношения отдельных компонентов напряжений

и деформаций при простом нагружении образцов из отожженного алюминия, меди и малоуглеродистой стали удовлетворяют зависимостям:

$$\frac{E_i}{P_i}=\frac{\Gamma}{T}, \quad \text{где } P_i=\sigma_i-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{3} \tag{4.77'}$$

для растяжения при действии внутреннего давления и для сжатия при действии наружного давления и

$$\frac{\varepsilon}{{}^2/_3\sigma}=\frac{s}{2S}=\frac{\Gamma}{T} \tag{4.77''}$$

для растяжения с кручением в условиях наложения ограничения $\sum E_i=0$.

Для больших деформаций, сопровождаемых относительно малыми поворотами, поскольку уравнение (4.75) приложимо во всех случаях, уравнения (4.77) приводят к следующей зависимости:

$$E_i=\frac{T}{\bar{k}^3\beta_s^2}P_i \tag{4.78'}$$

для растяжения, сопровождаемого внутренним давлением, и для сжатия при внешнем давлении, и к зависимостям

$$\varepsilon=\frac{T}{\bar{k}^3\beta_s^2}\frac{2}{3}\sigma, \qquad s=\frac{T}{\bar{k}^3\beta_s^2}2S \tag{4.78''}$$

для растяжения с кручением.

Уравнения (4.78) согласуются с результатами более чем 2000 опытов по анализу напряжений и деформаций при элементарных деформациях для 28 различных отожженных материалов. Как будет показано ниже, уравнения (4.78) также описывают данные экспериментов, полученные для полностью отожженного алюминия при совместном растяжении и кручении при сложном нагружении, когда вслед за простым растяжением происходит кручение при постоянном уровне растяжения. Совсем недавно ряд опытов по растяжению и кручению образцов из полностью отожженных меди и алюминия при сложном нагружении, поставленных так, чтобы обеспечить более строгий контроль пригодности уравнений [1]) (4.78), показал, что эти уравнения являются одной из общих форм модифицированных определяющих уравнений теории течения. Коэффициенты поликристалличности и поверхности нагружения определяются по-прежнему уравнениями (4.74) и (4.75). Конечно, для всех случаев *простого* нагружения уравнения (4.77) и (4.78) описывают поведение образцов из полностью отожженных меди и алюминия.

Не менее интересны по сравнению с уравнениями (4.78) для отожженных металлов и те два ограничения, которые были на-

[1]) Эта серия из 50 опытов была выполнена, когда рукопись данной книги была уже в наборе, и поэтому детальный отчет о них не может быть сюда включен.

ложены на область применения теории, построенной на основании экспериментов, а именно: ограничение по условию несжимаемости $\sum E_i=0$ и очевидное ограничение нагружения $\Delta T\geqslant 0$.

Феномен ступенчатости при нагружении мертвой нагрузкой или эффект Савара — Массона, как было обнаружено, проявляется в зависимости $T$ от $\Gamma$ поверхностей нагружения, что составляет экспериментальную основу для уравнения (4.75). Это справедливо как для элементарных деформаций, так и для простых и сложных путей нагружения при более чем одном отличном от нуля главном напряжении. При неэлементарных деформациях компоненты приращений $\Delta\Gamma$, соответствующие $\Delta T$ ступенек по Савару — Массону, определяются уравнением (4.79), поскольку $\sum E_i=0$,

$$\Delta\Gamma=\frac{1}{\Gamma}(E_1\Delta E_1+E_2\Delta E_2+E_3\Delta E_3)+ \\ +\frac{1}{2\Gamma}[(\Delta E_1)^2+(\Delta E_2)^2+(\Delta E_3)^2-(\Delta\Gamma)^2]. \qquad (4.79)$$

Изучение опытных данных, относящихся к функции отклика отожженного алюминия при конечных деформациях, привело меня к открытию не только того, что определяющее уравнение (4.78) приемлемо, но также и того, что его применение к конкретному случаю связано с учетом следующего ограничения:

$$\Delta E_i/E_i=\Delta\Gamma/\Gamma \qquad (4.80')$$

для растяжения при действии внутреннего давления и для сжатия при действии внешнего давления и

$$\Delta s/s=\Delta\varepsilon/\varepsilon=\Delta\Gamma/\Gamma \qquad (4.80'')$$

для растяжения с кручением. На самом деле, независимо от того, выполнено ли это ограничение или нет, поверхности нагружения, соответствующие уравнению (4.75), все еще могут быть использованы и $\Delta\Gamma$ определяется перестановкой величин в уравнении (4.79).

Второе новое ограничение, связанное с разгрузкой, было обнаружено Хенгью Муном в выполняемой им в настоящее время в моей лаборатории докторской диссертации. Показано, что для использования уравнений состояния (4.78) при совместном растяжении и кручении следует исключить сложные нагружения, для которых главные значения девиатора напряжений меняют знак, а именно:

$$\frac{\Delta P_i}{P_i}\geqslant 0, \quad \text{где} \quad P_{1,2}=\frac{\sigma}{6}\pm\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+S^2}, \quad P_3=-\frac{\sigma}{3}. \qquad (4.81)$$

Здесь, как и для ограничения (4.80), связанного с нестабильностью материала по Савару — Массону, отклик для поверхности нагружения описывается все еще параболой, уравнение (4.75) и коэффициенты поликристалличности определяются уравнением (4.74), т. е. поверхность нагружения при $\Delta T\geqslant 0$ остается неизменной.

Для простого нагружения при условии наличия лишь одного ненулевого главного напряжения условия (4.80) и (4.81) удовлетворяются автоматически, и уравнение (4.75) и единственный ненулевой член уравнений состояния (4.78) совпадают в любом случае, определяя соответствующую функцию отклика в одномерной задаче.

Данные рис. 4.234 и рис. 4.61 и 4.62 раздела 4.15 показывают, что для отожженных алюминия и меди поверхности нагружения, определяемые уравнением (4.75), действительно не зависят от пути нагружения, и коэффициент $\beta_s$ имеет то предсказанное значение, которое я ранее установил для простого нагружения.

Поскольку для отожженной меди известны $\mu(0)$ и точка плавления $T_m$, можно было перейти в уравнении (4.75) от условных напряжений и деформаций к «истинным» для сравнения с результатами, которые Е. А. Дэвис получил для этого материала в 1943 г. Эти сравнения для различных отношений главных напряжений были показаны на рис. 4.61 (крестики).

Коэффициент параболы для меди был получен на основании того же уравнения (4.75), что и для алюминия, результаты опытов с которым показаны на рис. 4.234. Таким образом, опыты с отожженными металлами при различных путях нагружения, когда более чем одно из главных напряжений отлично от нуля, подтверждают обобщение, установленное ранее для элементарной деформации (Bell [1968, 1]).

На рис. 4.235 показан график зависимости $T^2$ от $\Gamma$ (кружки), построенный по данным опыта 1451 с полностью отожженным алюминием, при сложном нагружении, в котором было нарушено ограничение для нагружения (4.81), а поэтому, как будет видно из графика зависимости $\varepsilon$ от $s$, показанного на рис. 4.237, не удовлетворяются уравнения состояния (4.78). Тем не менее, как и во всех других случаях, влияние поверхностной нагрузки, определяемое уравнением (4.75) (сплошные линии), все еще соответствуют предсказываемым. Далее можно отметить, что деформации, при которых имеют место переходы второго порядка, соответствуют предсказываемым на основании уравнения (4.76) при $N=18$ и $N=13$ (стрелки).

На рис. 4.236 показаны результаты опыта 1457, проводившегося в условиях простого нагружения образца из отожженного алюминия, в котором оба ограничения (4.80) и (4.81) удовлетворяются, так что для зависимости $\varepsilon$ от $s$ данные опыта (кружки) хорошо согласуются с предсказываемыми на основании уравнения (4.78) (сплошная линия).

В случае сложного нагружения, имевшего место в опытах 1416 и 1451 также с образцами из отожженного алюминия, результаты которых представлены на рис. 4.234, выдерживались оба ограничения (4.80) и (4.81) в первом опыте и, как указывалось выше, ограничение (4.81) не удовлетворялось во втором опыте. (Для этого пути нагружения уравнение (4.81) неприложимо, пока $\sigma \geqslant {}^3/_2 S$). Графи-

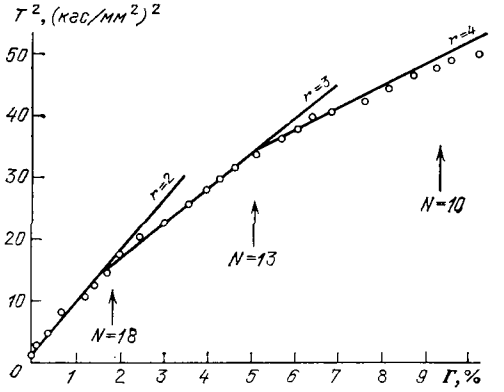



Рис. 4.235. График зависимости $T^2$ от Г, построенный по результатам опыта 1451 по сложному нагружению трубы ($S \to \sigma$), изготовленной из полностью отожженного алюминия, в котором ограничение для нагружения (4.81) не удовлетворено. Экспериментальные данные (кружки) сравниваются с поверхностью нагружения, определяемой уравнением (4.75) (сплошные линии).

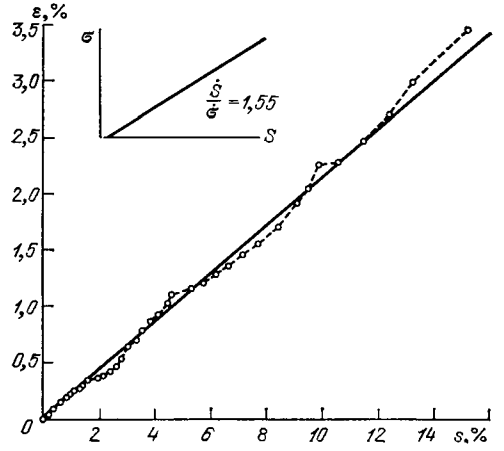
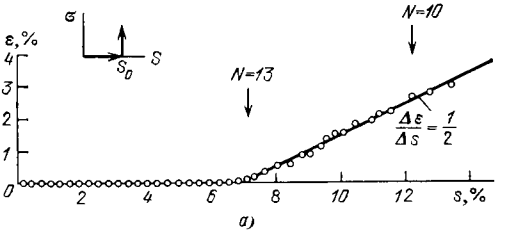



Рис. 4.236. График зависимости ε от $s$, построенный по результатам опыта 1457, проведенного в условиях простого нагружения образца, изготовленного из полностью отожженного алюминия (кружки и штриховая линия), сравниваемый с предсказываемым на основании уравнения (4.78) (сплошная линия).



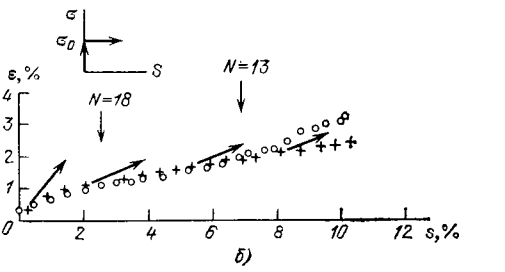




Рис. 4.237. Графики зависимости ε—$s$, построенные по результатам опыта 1451 (*а*), проведенного в условиях сложного нагружения (кружки) и опыта 1416 (*б*) (кружки). Для опыта 1416 уравнение (4.81) удовлетворяется (крестики), а для опыта 1451 оно не удовлетворяется. Наклонные стрелки на рис. (*б*) — результат, полученный на основании теории течения.

ки $\varepsilon$—$s$ на рис. 4.237 показывают для этого типа сложного нагружения, когда нагружение, при котором изменяется только один компонент, следует за нагружением, вызывающим изменение только другого компонента, что предсказываемые по (4.78) (крестики) и экспериментальные данные (кружки) совпадают, когда удовлетворены оба ограничения (4.80) и (4.81) (как показано для опыта 1416), и не совпадают, когда нарушено одно из этих ограничений. Для деформаций, превышающих 8% в опыте 1416, ограничение по эффекту Савара — Массона, согласно уравнению (4.80), не выдерживается, хотя условие (4.81) все еще удовлетворяется. Для этого опыта со сложным нагружением, при представлении его на рис. 4.237, *б*, я добавил стрелки, чтобы указать наклоны, которые можно было бы ожидать, если бы использовалась теория течения вместо теории, основанной на уравнениях состояния (4.78).

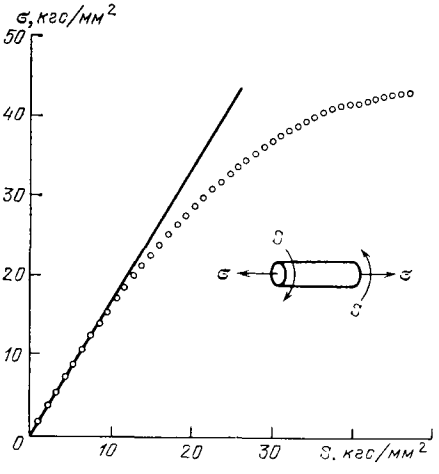



Рис. 4.238. Опыт 1735, Белл (1972). Сложное нагружение при растяжении с кручением (см. рис. 4.239 и 4.240).

Последствия нарушения уравнения (4.81) в настоящее время интенсивно изучаются в моей лаборатории. В этой работе были получены модифицированные уравнения состояния теории течения, в которых сохраняется условие (4.80), но исключается условие (4.81). По рис. 4.237, на котором представлены результаты опыта 1451, можно заметить, что для имевшегося в этом опыте сложного нагружения, при котором не удовлетворяется условие (4.81), имеет место линейная зависимость (линейная функция с угловым коэффициентом, равным 0,5). Недавно завершенные опыты показали, что компоненты деформаций могут быть представлены в форме, допускающей их определение и тогда, когда условие (4.81) не выдерживается.

На рис. 4.238 показаны результаты недавнего опыта, в котором нагружение было сложным — растяжение и кручение тонкостенной трубки из полностью отожженного алюминия происходили независимо; график зависимости $T^2$ от Г приведен для этого случая на рис. 4.239.

На рис. 4.240 экспериментально найденные зависимости $\sigma$ от $\varepsilon$ и $S$ от $s$ сравниваются с предсказываемыми на основании соответствующих уравнений состояния (4.78). При проведении таких расчетов следует, конечно, знать, что произошли переходы второго

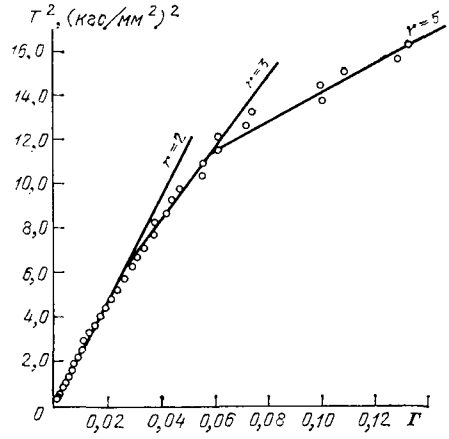



Рис. 4.239. Опыт 1735, Белл (1972). Зависимость $T^2$ от Γ, полученная в опыте (кружки) по растяжению и кручению трубки из полностью отожженного алюминия в условиях сложного нагружения, сравниваемая с предсказываемой (сплошная линия) на основании уравнения (4.75).

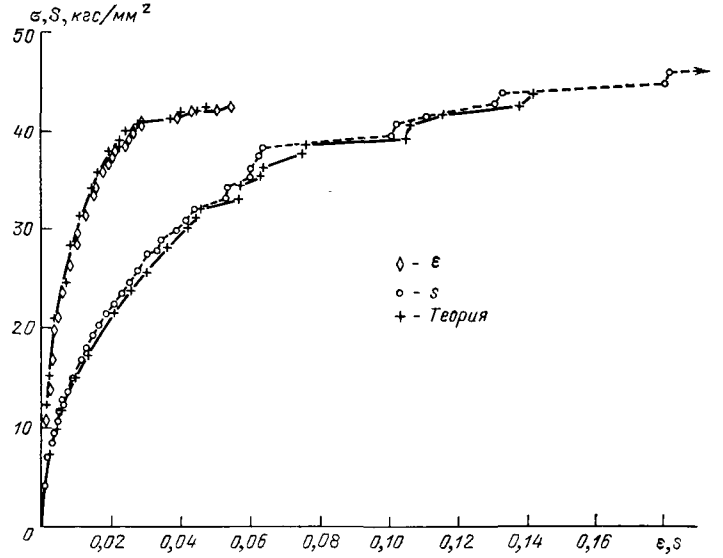



Рис. 4.240. Опыт 1735, Белл (1972). Зависимости σ от ε и $S$ от s, полученные в опыте (кружки и штриховая линия для $S$—s, ромбы для σ—ε) (рис. 4.238), сравниваемые с предсказываемыми (крестики и сплошная линия) на основании уравнения (4.78):

$$\varepsilon_{ij} = \left[\frac{T}{\bar{k}^3\beta_S^2} - \frac{T^2-\bar{k}^3\beta_S^2\Gamma}{\bar{k}^3\beta_S^2\, T}\right] P_{ij},$$

$$\beta_s = \left(\frac{2}{3}\right)^{r/2} \mu\,(0)\, B\,(1-T/T_m), \quad \bar{k}=2{,}50.$$

порядка. В этом опыте с полностью отожженной алюминиевой трубкой были удовлетворены оба условия (4.80) и (4.81).

Ограничение $\sum E_i = 0$, установленное на основании экспериментов, требует, чтобы при конечных деформациях бесконечно малые приращения деформаций были изохорными. Для конечных деформаций это ограничение предписывает соответствующее изменение

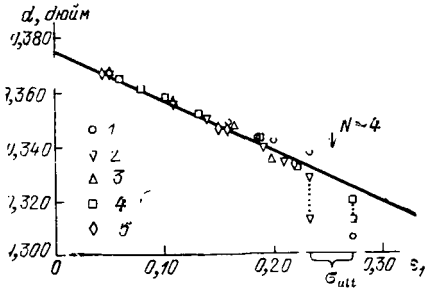



Рис. 4.241. Опыты Понда (1966). Сравнение опытных измерений диаметра образцов из отожженной меди при растяжении с предсказываемым значением, исходя из ограничения, выражаемого формулой (4.70) (сплошная линия). По оси абсцисс отложена деформация $\varepsilon_1$, по оси ординат — диаметр (в дюймах); *1* — опыт 0A1, *2* — опыт 0A2, *3* — опыт C, *4* — опыт A, *5* — опыт B.

объема. То, что изменение объема происходит в процессе пластического деформирования, известно еще с 1879 г., когда Баушингер проводил свои исследования (см. раздел 2.18). Интересный дополнительный контроль того, что $\sum E_i = 0$, основан на рассмотрении экспериментально найденной функции отклика при конечных деформациях и осуществлен путем сравнения с предсказываемым прямого измерения изменения объема в процессе пластического деформирования. Такие опыты требуют исключительной точности. Профессор Роберт Понд из университета Джонса Гопкинса представил [1]) такие экспериментальные результаты в случае растяжения образца из отожженной меди, показанные на рис. 4.241. Выполненные им наблюдения за диаметром образца в процессе нагружения были достаточно точны для моего сравнения его данных с предсказываемыми размерами диаметра (сплошная линия) при условии $\sum E_i = 0$. В этих опытах предел прочности был достигнут при деформации, соответствующей шестому переходу (при $N=4$).

На рис. 4.242 показаны зависимости $T^2$ от $\Gamma$ и $\varepsilon$ от $s$ для опыта с почти простым нагружением при $\dot{S}/\dot{\sigma} = 0{,}46$. Заметно, что экспериментально найденные значения деформаций согласуются с предсказываемыми на основании уравнения (4.78) вплоть до деформаций второго перехода при $N=13$. Ниже этой деформации перехода условие, наложенное на компоненты эффекта Савара — Массона, удовлетворяется. Выше этой деформации это условие не удовлетворяется, поскольку за интервалом деформации, для которого $\Delta\varepsilon = 0$, следует интервал, для которого $\Delta s$ приближенно равно нулю, пока ступенчатый график зависимости не попадет в предсказанную точку, лежащую на кривой. После этого следует новое отклонение

[1]) В виде частного сообщения.

от этой кривой. Хотя очевидно, что условие, описываемое формулой (4.80), более не соблюдается после $N=13$, значение $\Delta\Gamma$ в уравнении (4.79) не изменяется, т. е. когда условие (4.80) не удовлетворяется, то два компонента приращений деформации изменяются так, чтобы обеспечить то значение $\Delta\Gamma$, которое соответствует уравнению поверхности нагружения (4.75). Условие нагружения (4.81) удовлетворялось на протяжении всего опыта.

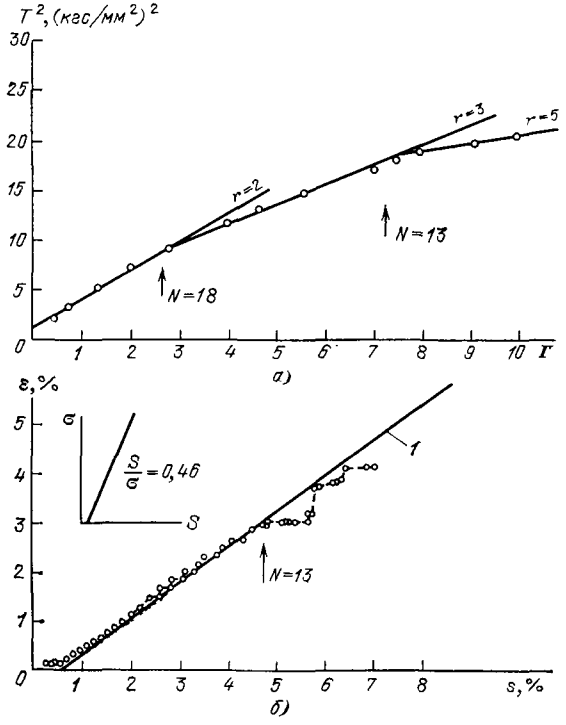



Рис. 4.242. Опыт 1424. Зависимости $T^2$ от $\Gamma$ ($а$) и $\varepsilon$ от $s$ ($б$), полученные в опыте с трубкой, изготовленной из полиостью отожженного алюминия при близком к простому нагружении — в условиях совместного растяжения и кручения (кружки). Зависимость $T^2-\Gamma$ сравнивается с предсказываемой на основании уравнения (4.78) (сплошные линии). Отметим разделение (поочередный рост) компонентов деформации в соответствии с эффектом Савара — Массона после деформации перехода при $N=13$; $1$ — теоретическая линия.

На рис. 4.243 приведен график зависимости $\varepsilon$ от $s$, соответствующий результатам другого опыта (1421) при почти простом нагружении с отношением $\dot{S}/\sigma=1{,}52$, превышающим более чем в три раза значение, имевшее место в опыте, результаты которого представлены на рис. 4.242 (см. рис. 4.234). Во всех остальных отношениях оба опыта идентичны. Рис. 4.243 позволяет заметить, что экспериментальные значения согласуются с предсказываемыми вплоть до третьей деформации перехода, отвечающей $N=10$, удовлетворяя обоим условиям (4.80) и (4.81). Вблизи этого значения деформации пере-

хода условие (4.80) уже не удовлетворяется. При деформациях сдвига $s$, немного больших 12%, наклон графика, предсказываемый согласно уравнению (4.78), снова выдерживается, хотя абсолютные значения деформации теперь изменились.

Возможно что одинаково интересны следующие два факта. Первый состоит в том, что для двумерных путей нагружения существует корреляция между, с одной стороны, экспериментальными данными и, с другой, получаемыми на основе уравнения состояния (4.78) и поверхности нагружения согласно уравнению

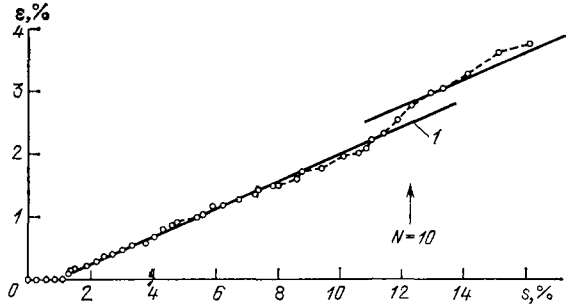



Рис. 4.243. Зависимость ε от $s$, полученная в опыте 1421, нагружение в котором было близким к простому (кружки), показывающая согласованность с предсказываемой вплоть до третьей деформации перехода (при $N=10$). Путь нагружения для этого опыта показан на рис. 4.234; *1* — теория.

(4.75), которое содержит коэффициент параболы, предсказанный для элементарной деформации в состоянии, соответствующем переходу второго порядка. Вторым является тот факт, что даже при пути простого нагружения, для которого и теория течения, и деформационная теория дают одинаковый результат, в окрестности деформации перехода второго порядка может иметь место явление нестабильности, так что условие (4.80), отвечающее эффекту Савара — Массона, более не удовлетворяется, хотя функция отклика (уравнение поверхности нагружения (4.75)) все еще может быть применена. Важность этого факта, наблюдаемого лишь при условии, когда имеются по крайней мере два ненулевых главных напряжения, представляет очевидный интерес, если приняты более общие функции отклика, которые включают уравнения состояния (4.78) как частный случай при соблюдении условия (4.80) относительно стабильности материала.

На рис. 4.244 показаны результаты опытов по простому нагружению, для которых условие (4.80) не соблюдается. Для опыта 1415, результаты которого изображены на рис. 4.244, *а*, в графике зависимости ε—$s$ вместо предсказываемого углового коэффициента $\Delta s/\Delta\varepsilon=5{,}5$ имеет место 3,0. Как видно по штриховым линиям, проведенным через точки, следующие друг за другом через определенные интервалы в процессе деформирования, наклон сплошных линий для ряда коротких интервалов приближается к

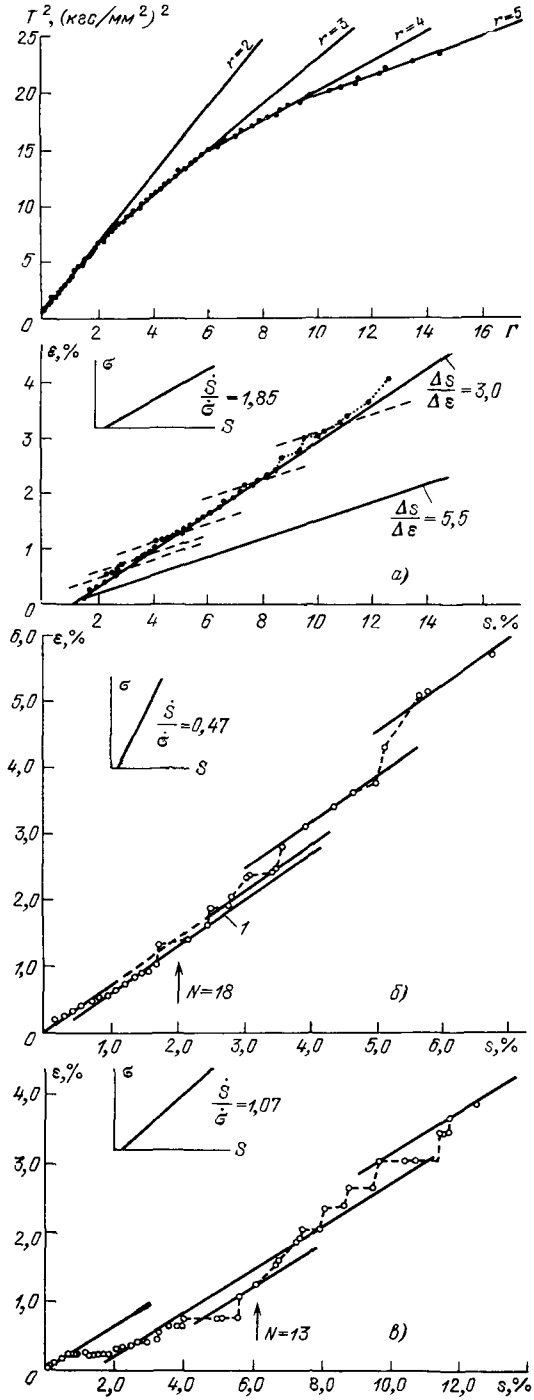



Рис. 4.244. *а*) Опыт 1415. Зависимость $T^2$ от Г для простого нагруженнн (темные кружки), показывающая соответствие с предсказываемой (сплошные линии) на основании уравнения (4.75), и зависимость ε от $s$ (темные кружки), показывающая отклонения от теории (сплошные линнн), когда условие (4.80) не удовлетворяется. *б*) Опыт 1459. Завнснмость $\varepsilon$—$s$. Разделение компонентов процесса при налнчни эффекта Савара — Массона в условиях иагружения, близкого к простому (кружки). В этом опыте $\Delta s$ было меньше предсказанного (сплошные линнн), хотя $\Delta\Gamma$ не изменнлось; *1* — предсказываемая зависимость. *в*) Опыт 1423. Зависимость $\varepsilon$—$s$. Разделение компонентов процесса при наличии эффекта Савара — Массона в условиях нагружения, близкого к простому (кружки). В этом опыте $\Delta\varepsilon$ было меньше, чем предсказываемое, хотя $\Delta\Gamma$ не изменилось.

предсказываемому. На протяжении всего опыта, однако, уравнение (4.75) остается в силе, как это видно при рассмотрении графика зависимости $T^2$ от Г, также приведенного на рис. 4.244, *а*.

На протяжении опытов с простым нагружением, результаты которых показаны на рис. 4.244, *б* и *в*, интересны отклонения и возвращения к углу наклона кривой, найденному теоретически по уравнению (4.78), наглядно иллюстрирующие важность учета нестабильности материала при описании функции отклика в области конечных деформаций и при двух ненулевых главных напряжениях для полностью отожженного алюминия. Анализ, основанный на рассмотрении рис. 4.234, не позволяет обнаружить свидетельств аномального поведения образцов в опытах, результаты которых изображены на рис. 4.244, *а* — *в* ни в части коэффициента поликристалличности (уравнение (4.74)), ни в части поверхности нагружения, заданной уравнением (4.75). В обоих случаях результаты теоретические хорошо согласуются с экспериментальными вне зависимости от того, удовлетворяются ли условия (4.80) и (4.81) и, таким образом, уравнения состояния (4.78).

Нестабильность материала в виде переменности отношений компонентов приращений в ступеньках Савара — Массона и переходов второго порядка наблюдалась в отношении обоих факторов при сложном нагружении для полностью отожженного алюминия, диаграмма нагружения которого задана уравнениями (4.78) на основании деформационной теории, и при сложном нагружении образцов из полностью отожженных меди и алюминия в том случае, когда экспериментальные результаты хорошо согласуются с предсказываемыми на основании модифицированных уравнений состояния теории течения, также основанных на уравнениях (4.74) и (4.75). Появление подобной нестабильности при простом нагружении и к тому же наблюдения Эриса Филлипса за поведением алюминиевых образцов (Phillips [1957, 1], [1960, 1]), (Phillips and Gray [1961, 1]), приведенные в разделе 4.33, подчеркивают необходимость более подробных исследований нестабильности в твердых телах [1]). Таким образом, я рассматриваю эту независимость компонентов деформации, которая зачастую имеет место в ступенях Савара — Массона, как дающую важный ключ к пониманию природы местной неоднородности деформаций, которая по опытным данным сопровождает большие пластические деформации в отожженных кристаллах (см. раздел 4.32).

Уравнения состояния (4.78) (Bell [1972, 2]), будучи приложен-

[1]) Когда наблюдается эффект Савара — Массона, становится очевидной важность обеспечения независимости в опыте деформаций растяжения и кручения. Насколько мне известно, только в опытах, выполненных за последние годы в моей лаборатории, это условие соблюдалось при (мягком) нагружении мертвой нагрузкой. Опыт с независимым нагружением — это такой, при котором мертвая нагрузка, растягивающая образец, не поворачивается при нагружении мертвой нагрузкой, создающей крутящий момент.

ными к результатам, полученным для полностью отожженного алюминия, вне зависимости от того отсутствуют ли ступеньки Савара — Массона или они обнаруживаются, обеспечивали во втором случае то, что отношения приращений компонентов деформации соответствовали удовлетворению условиям (4.80), которого иногда не бывает. Переходы второго порядка и система определенных значений деформаций, при которых эти переходы имеют место, представляют собой объективно наблюдаемое физическое состояние отожженных кристаллических материалов и должны быть удовлетворительно выражены через параметры недеформированного состояния. Уравнения состояния для отожженных металлов, полученные из (4.77), могут быть рассмотрены как определяющий стабильный материал стандарт, относительно которого могут быть измерены и изучены эффекты нестабильности. Эта ситуация не слишком отличается от подобной ей для инфинитезимальной деформации в отожженных кристаллах, для которых изменения модулей в соответствии с переходами второго порядка (выше, в разделе 3.44 названных мультимодульностью) также представляют собой отклонения от стабильных значений модулей обобщенного закона Гука.

Это обсуждение результатов современных исследований подчеркивает те выводы, которые должны быть сделаны из экспериментов, относящихся к пластичности отожженных кристаллических тел, а также приводит к формулированию тех вопросов, которые, по моему мнению, пока остаются открытыми для экспериментатора и ждут ответа на них. В частности, таким вопросом является — можно ли так представить уравнения состояния, чтобы с их помощью удавалось учесть обнаруженную нестабильность материала. Аналитическое представление конечной деформации полностью отожженных кристаллических твердых тел должно включать истоки этих нестабильностей в малом, неоднородности деформаций и поворотов, оно должно включать эти новые экспериментальные факты, которые кажутся противоречивыми, лишь в случае, если они рассматриваются с позиции чисто однородной деформации.

### 4.36. Об открытии ударных волн в растягиваемых резиновых шнурах: Колски (1969)

Измерение в лабораторных условиях действительных скоростей распространения волн в неметаллических материалах было начато в работе Экснера (Exner [1874, 1]) по растяжению резиновых струн, выполненных в 1874 г. Поскольку это были волны разгрузки при переходе из состояния растяжения, то это были волны сжатия. Интересно сопоставить результаты Экснера, которые были описаны выше в разделе 3.33, с анализом нарастающих волн, возникающих также в растянутых резиновых струнах, выпол-

ненным почти на сто лет позднее Колски в 1969 г. (Kolsky [1969, 1]). Им было проведено непосредственное изучение профилей волн, доказавшее развитие ударного фронта растяжения в материале с известной квазистатической зависимостью напряжение — деформация, график которой вогнутостью обращен в сторону положительных значений на оси напряжений. Открытие Колски отмеченных импульсных ударных фронтов растяжения — это веха в экспериментальной механике материалов, легко замечаемая как таковая даже иа фоне массы современных опытов по распространению волн во всевозможных материалах.

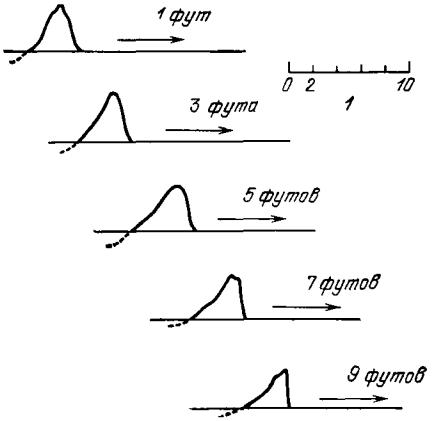



Рис. 4.245. Опыты Колски (1969). Профили волн нарастания деформаций растяжеиия в предварительно иапряженных резиновых стержнях для ряда указанных сечений. Заметно формирование ударной волны растяжения; *1* — шкала времени (деления в миллисекундах).

Как мы видели, Экснер показал, что скорость волн разгрузки возрастала в соответствии с ростом предварительного растяжения. Он регистрировал только продолжительность прохождения волны. Колски, располагавший осциллографией XX века, мог определить профиль зависимости скорости частиц от времени, наблюдая за электрическими сигналами в тонких проволочках, прикрепленных к резине, при пересечении ими силовых линий магнитного поля постоянной напряженности.

Колски растягивал стержни квадратного поперечного сечения с размерами 1,27 см $\times$ 1,27 см из «вулканизированной натуральной резины», доводя их длину до значения, в пять раз превышающего их первоначальную длину. При помощи отрезка рояльной струны он создавал дополнительное растяжение концевого участка длиной 25,4 см растянутого резинового стержня длиной 396 см. Испаряя стальную проволоку с помощью импульса электрического тока, он передавал импульс растяжения от короткой части к длинной растянутой части резинового стержня, получая возможность в ряде точек, расположенных по его длине, изучать профили волн. Он мог изменять величину импульса растяжения путем изменения уровня дополнительного предварительного напряжения короткой части. Колски заметил, что импульсы малой амплитуды, а именно, менее 10%, распространялись вдоль резинового стержня без поддающегося измерению изменения формы. У больших импульсов, однако, профили заострялись и формировали фронт ударной волны после прохождения участка длиной порядка 274 см.

Колски привел типичный пример, показанный на рис. 4.245, для случая, когда нагружающий отрезок длиной 25,4 см был под-

вергнут дополнительному удлинению на 2,54 см, вызывая сорокапроцентную дополнительную деформацию. (Колски в описании своего опыта использовал английские футы и дюймы.)

Отчетливо обнаруживается повышение крутизны профиля волны скорости частиц по мере того, как фронт волны перемещается от точки, удаленной от места возбуждения волны на расстояние в 30,5 см, до точки, отстоящей на 274 см от источника волны. Скорость волны разгрузки в опытах Экснера с вулканизированными полосками резины, растянутыми до пятикратного увеличения длины, составляла 65,9 м/с (см. раздел 3.33). Сравнение с данными Колски 122 м/с снова показывает, как подчеркивал Мэллок в 1904 г. (Mallock [1904, 1]), изменение (свойств) резины от случая к случаю наряду с возможным различием между волнами нагружения при растяжении и волнами разгрузки при сжатии в предварительно напряженной резине. Часто утверждалось, что в твердых телах имеют место ударные волны, но эти опыты обеспечили первое прямое свидетельство роста крутизны фронта волны в процессе ее распространения.

### 4.37. Эксперименты с испытывающими конечные деформации резиновыми шнурами, подвергнутыми поперечному удару

Перед тем как закончить рассмотрение вопроса о волнах при конечных деформациях, интересно отметить две работы о больших деформациях, которые по замыслу отличались от всех, рассмотренных выше. В этих работах рассмотрены опыты с длинными проволоками или полосками из алюминия или резины, подвергавшимися поперечному удару с помощью метательного снаряда с высокой скоростью.

В опытах Шультца использовались предварительно натянутые проволоки из частично отожженного алюминия низкой чистоты (Schultz [1968, 1]), (предел упругости, $Y=4700$ фунт/дюйм$^2$ был выше, чем у упоминавшегося выше полностью отожженного алюминия.) Условия опыта, относящегося к разделу экспериментов по нарастающим волнам в предварительно напряженном теле, проиллюстрированы на рис. 4.246.

Детали эксперимента были описаны в статье Шультца, Тушака и Викарио в 1967 г. (Schultz, Tuschak and Vicario [1967, 1]). Фотографирование полос, нанесенных черными чернилами на образце, основанное на использовании стробоскопического эффекта, обеспечило базу в «примерно 2 или 4,5 дюйма» для измерения деформаций. Для оценки опытных данных потребовалось предположение об абсолютной гибкости нити. Шультц (Schultz [1968, 1]) установил зависимость от скорости удара угла, составленного отклоненной от первоначального положения нитью с первоначальным направлением оси нити, на основании которой была оценена деформация как функция скорости удара при сравнении с результатами

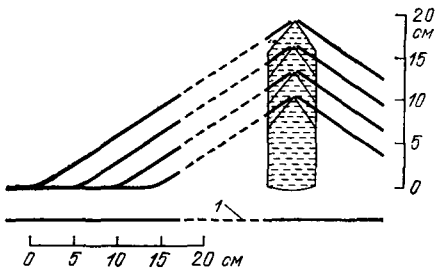
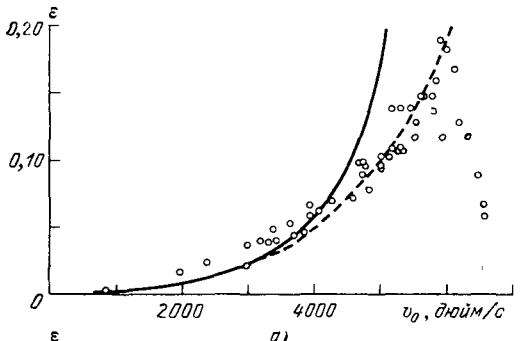
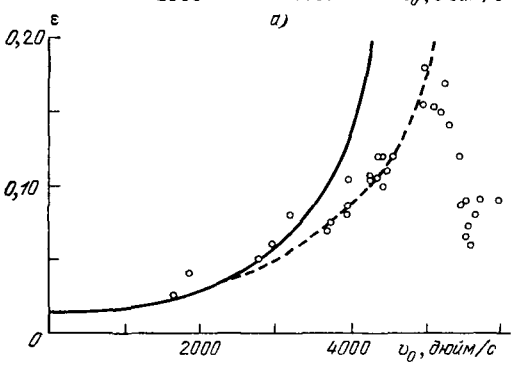



Рис. 4.246. Опыты Шультца (1968). Схема опыта, представляющего собой поперечный удар по предварительно натянутой проволоке; частота вспышек 3200 Гц; измеренная скорость $v_0 = 3600$ дюйм/с; $\varepsilon_2 = 0{,}054$; $\psi_3 = -32{,}7°$; *1* — положение проволоки перед ударом (изображение сдвинутое)



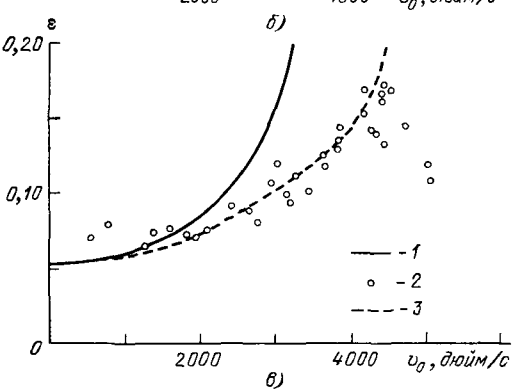




Рис. 4.247. Опыты Шультца (1967). Зависимости деформаций от скоростн удара, полученные Шультцем для трех различных значений предварительного напряжения. *а*) 740 фунт/дюйм²; *б*) 7970 фунт/дюйм²; *в*) 11 100 фунт/дюйм², сравниваемые с предсказываемымн на основанни наклонов касательной к крнвой квазистатической зависимостн напряжение — деформацня; *1* — квазнстатическое предсказание, *2* — опыт, *3* — усредненные экспериментальные данные, $v_0$ (дюйм/с) — скорость удара, $\varepsilon$ — деформация.

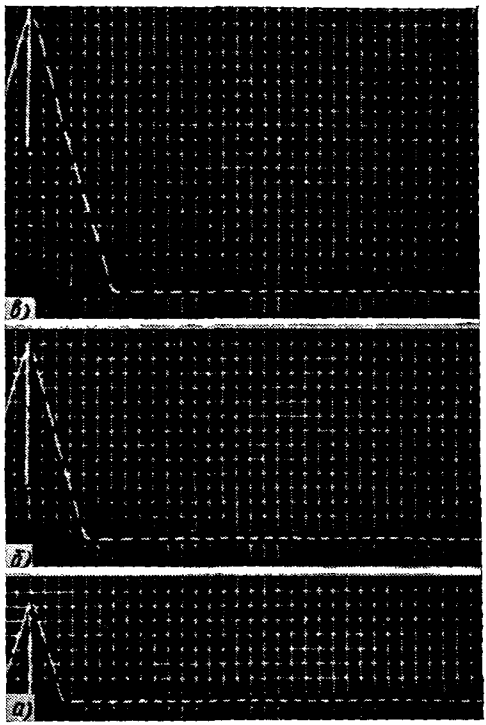
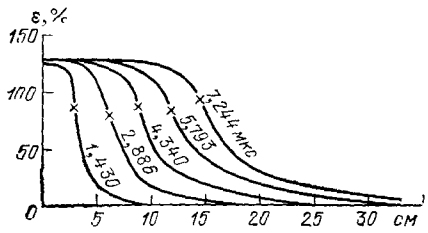



Рис. 4.248. Опыты Смита и Фенстермейкера (1967). Формы нити из натуральной резины при поперечном ударе, происходившем со скоростью 42,7 м/с; шаг сетки 1 см. Время, прошедшее после удара, соответственно: *а*) 1,43 мс, *б*) 2,886 мс, *в*) 4,340 мс.



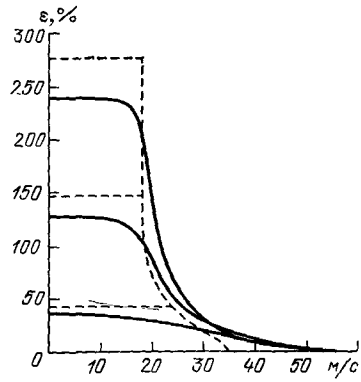




Рис. 4.249. Опыты Смита и Фенстермейкера (1967). Характер изменения деформаций вдоль нити из натуральной резины, зависящий от времени, истекшего после удара, происходившего со скоростью 42,7 м/с. Крестики указывают положение фронта поперечной волны; ε — деформация в процентах, по оси абсцисс отложено расстояние в сантиметрах (координаты — лагранжевы).

Рис. 4.250. Опыты Смита и Фенстермейкера (1967). Зависимости деформация — скорость распространения деформаций для случая поперечного удара по резиновой нити. Сплошные линии соответствуют опытам. Штриховые линии соответствуют зависимости, найденной на основании квазистатических измерений напряжений и деформаций. Скорости удара составляли: нижняя кривая 20,6 м/с, средняя 42,7 м/с, верхняя 66,3 м/с, ε — деформация в процентах. По оси абсцисс отложена скорость распространения деформаций в м/с.

квазистатических испытаний в условиях деформации до 20%. Предварительное натяжение изменялось от 740 до 11 000 фунт/дюйм$^2$. Автор получил результаты, приведенные на рис. 4.247.

Изучение этого вопроса на основании параметров, предложенных Шульцем, весьма затруднено в связи с отсутствием адекватных способов трактовки наблюдаемых результатов.

Джек С. Смит и Карл А. Фенстермейкер в 1967 г. сообщили (J. C. Smith and Fenstermaker [1967, 1]) о серии опытов со шнурами, составленными из полос натуральной резины, подвергавшимися воздействию высокоскоростного поперечного удара. Они представили свои результаты в такой форме, которая позволяет заинтересовавшемуся читателю проверить их. На рис. 4.248 показаны фотографии последовательных положений деформируемой ударом резиновой нити, наложенных на сетку.

Зависимость: деформация вдоль длины нити — область распространения в лагранжеых координатах для почти одинаковых интервалов в миллисекундах приведена на рис. 4.249.

Детальное определение зависимостей скоростей распространения волн от деформаций для практически равных интервалов в одну миллисекунду включало три большие таблицы, соответствующие скоростям удара 20,6; 42,7 и 66,3 м/с. На рис. 4.250 приведена зависимость деформация — скорость распространения волн, сравниваемая со значениями на основании квазистатических оценок, для трех различных значений скоростей удара. Интересно, что во всех случаях экспериментальные значения ниже расчетных.

Непосредственное изучение распространения волн конечной амплитуды в резине типа рассмотренного выше (Smith and Fenstermaker [1967, 1]) или типа, предлагавшегося Колски (Kolsky [1969, 1]) приведет к дальнейшим успешным исследованиям. Я проверил скорости распространения волн в опытах Смита и Фенстермейкера для одной из скоростей удара. Результаты моих вычислений свидетельствуют о том, что стоит предпринять попытку расширить сведения, полученные из опытов с нелинейными волнами в кристаллических телах, на случай такого вида объектов, выполненных из различных материалов.

### 4.38. Эксперименты Пойнтинга (1909—1912)

В 1784 г. Кулон отметил уменьшение периода крутильных колебаний для проволоки, растянутой значительным грузом (Coulomb [1784, 1]). Как подчеркнул Трусделл [1]) (Truesdell [1960, 1]), объяснение этого явления Кулоном как результата уменьшения диаметра было недостаточным. «Кулон наблюдал влияние нелинейной упругости, относящейся к эффекту Пойнтинга» (Truesdell [1960, 1],

[1]) Термин «эффект Пойнтинга» был введен Трусделлом в 1952 г. (Truesdell [1952, 1]).

стр. 407). Как было отмечено в разделе 2.19, Вертгейм определял изменения объема, неожиданно имевшие место при малых деформациях кручения полых образцов одновременно с нелинейностью их крутильной упругости. Кельвин в 1865 г. (Kelvin (Sir William Thomson) [1865, 1]) и Томлинсон в 1883 г. (Tomlinson [1883, 1]) отметили изменения в длине длинных проволок, подвергавшихся конечным деформациям кручения. В опытах Миттала 1969 г. (Mittal [1969, 1], [1971, 1]) при сложном нагружении в условиях нелинейных деформаций наблюдалась следующая картина. Сначала прикладывалась нагрузка, растягивающая образец, далее уровень осевых напряжений не изменялся и образец подвергался кручению, при этом конечные продольные деформации естественно продолжали возрастать. Такое же явление имело место и в случае деформации кручения, происходившего после начального кручения и последующего за ним растяжения.

Вертгейм подчеркивал то значение, которое он придавал своим опытам, в которых обнаружилось изменение объема полых труб при кручении при его безуспешной попытке найти ему объяснение и обращался к другим специалистам с предложением попытаться найти это объяснение. Однако должны были пройти 50 лет, прежде чем было предпринято серьезное экспериментальное исследование этого явления. В статье 1909 г., озаглавленной «Об укорочении в направлении, перпендикулярном к плоскостям сдвига, при конечном чистом сдвиге и об удлинении нагруженных проволок при кручении» [1]) (Poynting [1909, 1]) и в статье 1912 г. «Об изменениях размеров стальной проволоки при кручении и о давлении волн крутильной деформации в стали» (Poynting [1912, 1]) Пойнтинг рассматривал эту задачу. Он сопроводил свой отчет об опытах особым и далеко не удовлетворительным теоретическим объяснением. Прошло еще почти полвека до появления удовлетворительного объяснения опытов Кулона, Вертгейма и Пойнтинга на основании классической теории конечных упругих деформаций.

Ограничивая обсуждение только опытами Пойнтинга, приведем на рис. 4.251 схему установки, использованной им в 1909 г.

Длина проволоки составляла 231 см. Ее нижний конец был закреплен в захватах верхнего конца стального стержня $rr$ длиной 51 см, проходившего сквозь отверстия в столе $T$, на котором помещались измерительный микроскоп и микрометр. Конструкция была заключена в деревянную трубу, чтобы избежать изменений температуры во время опыта. Результаты, полученные Пойнтингом,— удлинение, появляющееся в промежутке от начального угла закручивания в четверть оборота до наибольшего угла в 4,25 оборота, приведены в табл. 139.

---

[1]) Пойнтинг ссылается на свое «ошибочное исследование», приведенное в более ранней статье по этому вопросу 1905 г.

Можно видеть, что измерения проводились вблизи середины длины проволоки и у нижнего конца. Нижний конец в среднем опускался на 0,0341 мм, чему должно было бы соответствовать значение вблизи середины проволоки, равное 0,0171 мм. Среднее экспериментальное значение для этой точки составляло 0,0162 мм.

В табл. 140 я собрал результаты наблюдений Пойнтинга для различных осевых сил и углов закручивания в стальных, медных и латунных проволоках. Его основные заключения могут быть выражены в виде следующей формулы:

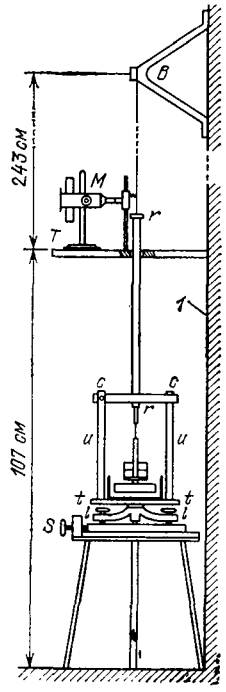



Рис. 4.251. Установка Пойнтинга (1909) для закручивания проволок и измерения их удлинения; *l* — стена.

$$dl = s\frac{a^2\theta^2}{2l}, \qquad (4.82)$$

где $dl$ — наблюдавшееся малое удлинение; $a$ — радиус проволоки; $l$ — длина, $\theta$ — угол закручивания и $s$ — константа, имеющая значение $s \approx 1$ для стали, и $s \approx 1{,}5$ для меди и латуни.

Этот результат, состоящий в том, что приращение удлинения оказалось пропорциональным *квадрату* угла закручивания для любой заданной нагрузки, соответствует наблюдениям Вертгейма (Wertheim [1857, 1, 2]), выполненным на полвека ранее и состоявшим в том, что приращение объема, так же как и длины, пропорционально квадрату погонного угла закручивания.

Пойнтинг указывал на то, что в опытах производится измерение малого значения величины и возможны, следовательно, значительные прогрешности. Однако эти погрешности не настолько велики, чтобы заметные различия в значении приращения удлинения при закручивании по часовой и против часовой стрелки медных и латунных проволок могли бы быть отнесены на их счет. Таким же образом, нельзя пренебречь и бо́льшим увеличением длины стального образца под действием меньшей нагрузки. Пойнтинг подключал к стальным проволокам электрический ток, который нагревал их докрасна, а потом с них удалялась поверхностная пленка окалины. Он повторял опыт, чтобы изучить возможный источник таких отклонений. Эти результаты также включены в табл. 140.

Пойнтинг в дополнение отметил, что известное значение модуля сдвига, определенное на основании крутильных колебаний, может уменьшиться примерно на 0,1% при осевой нагрузке, соответствующей осевым деформациям порядка $2 \cdot 10^{-4}$. Он пояснил далее продольное движение, пропорциональное $\varepsilon^2$, которого следовало

Таблица 139

**Пойнтинг (1909)**

| Отсчеты по микрометру вблизи нижнего конца | | | Отсчеты по микрометру посередине длины проволоки | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,25 оборота | 4,25 оборота | Опускание | 0,25 оборота | 4,25 оборота | Опускание |
| 22,3 | 18,6 | 3,7 | 30,4 | 28,3 | 2,1 |
| 22,5 | 19,0 | 3,5 | 30,5 | 28,4 | 2,1 |
| 23,0 | 19,2 | 3,8 | 30,2 | 28,1 | 2,1 |
| 22,6 | 19,4 | 3,2 | 30,5 | 28,5 | 2,0 |
| 22,9 | 19,6 | 3,3 | 30,5 | 28,0 | 2,5 |
| 22,6 | 19,5 | 3,1 | 30,4 | 28,7 | 1,7 |
| 23,0 | 19,5 | 3,5 | 31,0 | 28,4 | 2,6 |
| 23,0 | 18,9 | 4,1 | 30,6 | 28,5 | 2,1 |
| 22,7 | 19,2 | 3,5 | 31,8 [a]) | 29,9 | 1,9 |
| 22,9 | 19,6 | 3,3 | 31,6 [a]) | 29,9 | 2,5 |
| Среднее опускание — 3,5 деления. Цена одного деления микрометра = 0,00974 мм. Опускание было равно 0,0341 мм. | | | Среднее опускание — 2,16 деления. Цена одного деления микрометра = 0,00751 мм. Опускание было равно 0,0162 мм. | | |

[a]) Наблюдалось еще одно деление у стрелки.

ожидать в крутильных волнах в теле, если можно пренебречь давлением по направлению распространения волн.

В статье Пойнтинга (Poynting [1909, 1] не отмечено ни то, что Кулон (Coulomb [1784, 1]), Вертгейм (Wertheim [1857, 1, 2]), Кельвин (Kelvin (Sir William Thomson) [1865, 1]), Томлинсон (Tomlinson [1883, 1]) и Баушингер (Bauschinger [1881, 2]) — называем только немногих — наблюдали небольшое уменьшение модуля сдвига, найденного по крутильным колебаниям, при увеличивающейся осевой нагрузке, ни то, что Вертгейм, кроме того, рассматривал изменение объема как функцию угла закручивания.

В своей статье 1912 г. Пойнтингу (Poynting [1912, 1]) удалось показать, что источником различий в поведении, найденном им ранее при больших и при малых нагрузках, была просто недостаточная прямолинейность проволоки перед началом опыта. Он сообщил о своих опытах с проволоками длиной 106,5 см, помещавшимися в длинную узкую трубу, заполненную водой [1]). Когда он

[1]) Интересно снова сравнить этот эксперимент и его детали с экспериментом Каньяра де Латура в 1828 г. (Cagniard de Latour [1828, 1]), который первый пы-

Таблица 140

**Пойтиинг (1909)**

| | |
|---|---|
| Сталь: | 0,720 мм; суммарная нагрузка 7081 гс.<br>Закручивание по часовой стрелке, 0—4 сборота, опускание на 0,0181 мм, среднее из десяти наблюдений.<br>Закручивание по часовой стрелке, 0—8 сборотсв, спускание на 0,0732 мм, среднее из десяти наблюдений.<br>Отнсшение этих результатов—4,04:1. |
| Сталь: | 0,970 мм, суммарная нагрузка 19 504 гс.<br>Закручивание по часовой стрелке, $^1/_4$—$2^1/_4$ оборота; опускание на 0,0087 мм, среднее из десяти наблюдений.<br>Закручивание по часовой стрелке, $^1/_4$—$4^1/_4$ оборота; опускание на 0,0339 мм, среднее из десяти наблюдений.<br>Закручивание против часовой стрелки $^1/_4$—$2^1/_4$ оборота, опускание на 0,0089 мм, среднее из десяти наблюдений.<br>Закручивание против часовой стрелки, $^1/_4$—$4^1/_4$ оборота, опускание на 0,0340 мм, среднее из десяти наблюдений.<br>Среднее опускание $^1/_4$—$2^1/_4$, 0,0088 мм.<br>Среднее опускание $^1/_4$—$4^1/_4$, 0,0340 мм. |
| Медь: | 0,655 мм, суммарная нагрузка 7081 гс.<br>Закручивание по часовой стрелке, $^1/_4$—$2^1/_4$ оборота, опускание на 0,0066 мм, среднее из 10 наблюдений.<br>Закручивание против часовой стрелки, $^1/_4$—$2^1/_4$ оборота, опускание на 0,0083 мм, среднее из 10 наблюдений. («Оказалось, что больший угол закручивания вследствие того, что он влечет за собой увеличение остаточной деформации опускания, задавать не следовало. В пределах $2^1/_4$ оборотов это проявление было еще малым».) |
| Латунь: | 0,928 мм, суммарная нагрузка 19 504 гс.<br>Закручивание по часовой стрелке, $^1/_4$—$2^1/_4$ оборота, опускание на 0,0169 мм, среднее из десяти наблюдений.<br>Закручивание по часовой стрелке, $^1/_4$—$4^1/_4$ оборота, опускание на 0,0540 мм, среднее из 10 наблюдений.<br>Закручивание против часовой стрелки, $^1/_4$—$2^1/_4$ оборота, опускание на 0,0135 мм, среднее из 10 наблюдений. Закручивание против часовой стрелки, $^1/_4$—$4^1/_4$ сборота, опускание на 0,0479 мм, среднее из 10 наблюдений. |

закручивал проволоку, изменение в уровне воды в капиллярной трубке, присоединенной к отмеченной выше трубе, позволяло измерять изменение диаметра, вызванное закручиванием. Это уменьшение диаметра также оказалось пропорциональным квадрату угла закручивания.

Возглавляя «Субсидируемый эксперимент» Пойнтинг определил модуль упругости $E$ и коэффициент Пуассона $\nu$ при различных углах закручивания. Он, кроме того, продемонстрировал, что

---

тался, правда безуспешно, измерить изменения объема проволоки, помещенной в трубку.

найденные им изменения размеров возникают не из-за тепловых воздействий.

В 1951 г. Рональд Ривлин, используя теорию конечных деформаций несжимаемых упругих материалов, дал теоретическое обоснование явлений, обнаруженных Пойнтингом и рядом более ранних экспериментаторов (Rivlin and Saunders [1951, 1], [1953, 1]). См. также (Truesdell and Noll [1965, 1] разделы 57, 66 и 70). В 1953 г. Ривлин оценил количественно эффекты Кельвина и Пойнтинга. Опыты Ривлина, относящиеся к изучению конечных упругих деформаций резины, будут описаны ниже. Х. У. Свифт (Swift [1947, 1]) в 1947 г. в статье, озаглавленной «Изменения длины в металлах при увеличении закручивания» повторно рассматривал тот тип пластической деформации, который, как было отмечено, был объектом многих исследований в XIX веке. Амнон Фоукс (Foux [1962, 1]) на Международном симпозиуме по эффектам второго порядка в 1962 г. представил доклад, озаглавленный «Экспериментальное изучение эффекта Пойнтинга». Опыты Фоукса напоминают о том, что Пойнтингу пришлось измерять для отыскания нелинейных эффектов весьма малые величины. Несмотря на то, что прошло 53 года, все трудности и флуктуации результатов работы Пойнтинга все еще имели место.

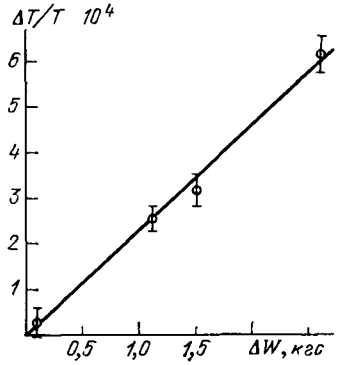



Рис. 4.252. Опыты Саксла и Аллена (1969). Зависимость относительного изменения периода от увеличения нагрузки, откорректированная с учетом увеличения периода, вызванного увеличением моментов инерции.

В 1969 г. Эрвин Дж. Саксл и Мильдред Аллен (Saxl and Allen [1969, 1]) с помощью «прецизионного крутильного маятника» повторно изучали динамический аспект влияния нормальных напряжений и результаты изложили в статье, озаглавленной «Влияние добавления растягивающего груза на период колебаний крутильного маятника». На рис. 4.252 приведены их сравнения предсказанных и четырех значений периода колебаний, найденных экспериментально с учетом тех изменений в теоретически найденном значении периода, которые вызваны собственно изменением момента инерции при добавлении растягивающей нагрузки.

В этом же номере «Журнала прикладной физики» Аллен и Саксл (Allen and Saxl [1969, 1]) повторно исследовали квазистатический вариант опыта Пойнтинга, показав, что для пяти проволок из различных сплавов и разного диаметра начальное остаточное закручивание всегда вызывало асимметрию, которая в основном может считаться согласующейся с наблюдениями Пойнтинга, выполненными на 60 лет раньше.

Опыты Пойнтинга и те повторения их для металлов, которые

упомянуты здесь, показывают нелинейность при относительно малой деформации. Эти работы включены в настоящий раздел о конечной деформации, чтобы подчеркнуть универсальность фундаментальных нелинейных явлений при конечной деформации. Эти явления широко продемонстрированы ниже при рассмотрении конечных упругих деформаций резины.

### 4.39. Эксперименты по конечным упругим деформациям резины: от Джоуля до Ривлина (от 50-х гг. XIX века до 50-х гг. XX века)

Поколения экспериментаторов, интересовавшихся деформацией твердого тела, занимались первоначально металлическими химическими элементами и бинарными сплавами этих элементов. Причина этого была связана не только с их технологической важностью, которая, конечно же, имела место, но и с тем, что переход от одного образца к другому не изменял в принципе характера наблюдаемых особенностей их поведения.

По той или иной причине в настоящей книге были рассмотрены отклики на деформацию стекла, кетгута, резины, дерева, шелка, человеческих тканей, краски, эмали, лаков, льда, кожи, пробки, мрамора, песчаника, кирпича, керамической глины, глины, мышц лягушки и бетона. Литература, посвященная экспериментальной механике твердого тела, содержит гораздо больший перечень веществ. Р. Хоуинк (Houwink [1953, 1]) в своем интересном описании упругих и пластических свойств твердых тел в монографии «Упругость, пластичность и структура материи» 1953 г. расширил перечень веществ, включив тесто для выпечки, смолу, асфальт, гуттаперчу, balata [1], целлюлозу, желатин, клей, казеин, шерсть, формальдегид мочевины и серу. Интерес промышленности к деформационным характеристикам синтетических волокон, мяса, фанеры и многих других материалов, как в связи с их дальнейшим усовершенствованием, так и в качестве способов контроля желаемых характеристик, привел к расширению перечня материалов, для которых должны быть описаны зависимости между напряжением и деформацией.

Для большинства из этих материалов характерно, что они весьма чувствительны к технологии изготовления и что у многих из них настолько изменяются свойства с течением времени, что изучение их становится в основном качественным. Безусловно, одним из наиболее интересных материалов этого типа является резина. Необычная зависимость ее свойств от температуры, открытая Джоном Гафом в 1805 г. (Gough [1805, 1], [1806, 1] и см. выше разделы 2.12 и 3.33), занимала умы ученых на протяжении второй половины XIX века, после того как Уильям Томсон (позднее лорд Кельвин) и Джеймс Прескотт Джоуль в 50-х гг. XIX века (William Thomson (Kelvin) [1855, 1]), (Joule [1857, 1, 2], [1859, 1]) указали на важность наблюдений Гафа.

Повлияло или нет на проявление интереса к резине со стороны Томсона и Джоуля, что кажется возможным, расширение использования вулканизированной резины для буферов железнодорожного подвижного состава, которые стали употребляться в 40-х гг. XIX века,—это неизвестно, а вот на исследования Буало, выполненные в 1853 г.,— несомненно (Boileau [1856, 1]). В своем введении к статье, опубликованной в 1856 г., описывая опыты по сжатию, Буало указал на то, что не сомневается в выполнении в прошлом экспериментов с резиной, поскольку ее использование на железных дорогах увеличивается уже в течение десятилетия, но что он не смог найти какие-либо свидетельства проведения этих опытов [1]).

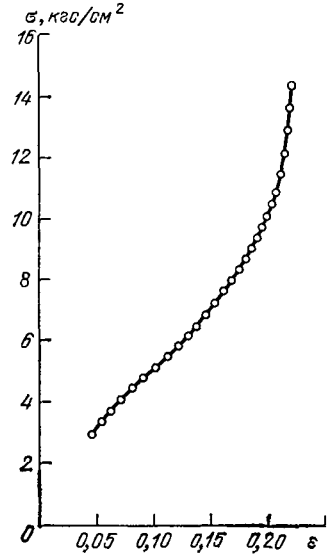



Рис. 4.253. Опыты Буало (1853). Диаграмма сжатия резинового железнодорожного амортизатора середины XIX века.

Буало проводил опыты с набором резиновых дисков 93 мм диаметром, 23 мм толщиной, с центральным отверстием 39 мм диаметром. Между каждой парой резиновых дисков были проложены железные диски толщиной 5 мм. В то время такие наборы и использовались как пружины, работающие на сжатие. Опыты были проведены на испытательном оборудовании Восточной железной дороги в Монтиньи. На рис. 4.253 я представил графически табулированные Буало данные о зависимости сила — удлинение, преобразованные в зависимость напряжение — деформация. Я представил его данные не только в связи с их приоритетом, но и потому, что автор подчеркивал, что его результаты показывают только общий характер поведения материала. Он показал, что для того, чтобы сравнивать экспериментальные результаты, необходимо иметь образцы, полученные на основании одинаковой технологии, особенно по отношению к использованию серы для вулканизации.

---

[1]) Таким образом, Буало не заметил не только открытия Гафа в 1805 г., но и экспериментального переоткрытия части наблюдений Гафа, выполненного Пейджем в 1847 г., не заметил опытов Сен-Венана (1847 г.) по кручению, проведенных также с резиной, и опытов Вертгейма (1848 г.) по сжатию резиновых стержней.

Возможно, что еще более важным было то, что Буало не заметил также и трех экспериментальных статей, посвященных железнодорожным пружинам: одной — У. К. Крэйга 1853 г., другой — Ховина и третьей — Дебоннефоя 1854 г. и опубликованных в промежутке тех же трех лет, в течение которых он выполнял свою собственную работу. При поиске по Каталогу научных статей Королевского общества работ на тему о резине или о каучуке на протяжении периода времени от 1800 г. до 1900 г., из которого случайно была опущена статья Буало, я обнаружил,

Буало отмечал, что когда он последовательно ступенями снижал нагрузку, удлинения не были одинаковы. Он заметил, что имели место релаксация или упругое последействие, но в конце концов при нулевых напряжениях имел место возврат к первоначальным размерам без остаточной деформации. Грубые опыты Буало подверглись резкой критике со стороны К. Ф. Дитцеля в статье 1857 г. (Dietzel [1857, 1]), как показавшие недостаточное знакомство Буало с эффектом последействия Вебера (Weber [1835, 1]), который был изучен Дитцелем в опытах с вулканизированной резиновой нитью.

Явления, наблюденные Джоном Гафом в 1805 г. (Gough [1805, [1, [1806, 1]), могут быть признаны, как «эффект Гафа», Джоуль (Joule [1857, 1, 2], [1859, 1]) просто заново заметил ряд этих явлений, открытых Гафом. Гаф не только установил, коснувшись губами резинового образца, что последний, как ни странно, нагревается при растяжении, но обнаружил и то, что под действием растягивающей нагрузки образец при нагреве укорачивается. Он заметил также, что если растянутый образец быстро поместить в холодную воду, он теряет часть своей упругости. Он отметил, что и после удаления из холодной воды, образец не мог вернуться к своим первоначальным форме и размерам, а вот после нагрева снова обретал и первоначальные форму и размеры и эластичность. Последний из этих неожиданных эффектов был назависимо заново открыт Пейджем в 1847 г. (Page [1847, 1]), не знавшим о более ранней работе Гафа. Статья Пейджа в «Американском научном журнале» Силлимана (*American Journal of Science*) содержала описание особенностей такой неэластичной резиновой полоски, сжимаемой при умеренных температурах.

В своей статье, опубликованной в 1859 г. и ставшей классической, Джоуль (Joule [1859, 1]) описывает свои опыты с вулканизированной резиной, когда он обнаружил, что этот материал, обладая общими особенностями свойств обычной резины, отличался от нее тем, что сохранял свою упругость неизменной и при низких температурах. Джоуль указал:

«Я заметил основные физические свойства этого материала до того, как познакомился с вышеупомянутым открытием м-ра Гафа о свойствах простой индийской резины» (там же, стр. 104).

---

что среди 34 работ, зарегистрированных в девятнадцатом веке, имели место ссылки только на работы Гафа, Крейга и Дебоннефоя, выполненные до 1856 г., т. е. до года публикации статьи Буало. Если к этим работам добавить статью Уильяма Томсона 1855 г., две короткие статьи Джоуля 1857 г., классическую экспериментальную работу Джоуля 1858 г., опыты Дитцеля 1857 г., который также интересовался железнодорожными пружинами, и опыты Клапейрона с резиной, проведенные в 1858 г., то представляется совершенно очевидным, что резиновые буферы подвижного состава сыграли совсем не малую роль во внезапном повышении интереса экспериментаторов к материалу (Page [1847, 1], Saint-Venant [1847, 1], Wertheim [1849, 1], Craig [1853, 1], Hovine [1854, 1], Debonnefoy [1854, 1], Dietzel [1857, 1], Clapeyron [1858, 1]).

Эксперименты Джоуля были начаты несколько ранее, совпадая во времени с появлением у Кельвина в 1855 г. интереса к теории термоупругости (Kelvin (William Thomson) [1855, 1]). Две заметки Джоуля появились в отчетах Королевского общества (Proceedings of the Royal Society) в 1857 г. (Joule [1857, 1, 2]). В первой из них он кратко отметил некоторые стороны термоэлектрических явлений в телах, важные для использования им термопар для измерения изменений температуры в деформированных металлических образцах, и отметил охлаждение при растяжении стальной проволоки, чугуна, твердой стали, меди, свинца и даже гуттаперчи. Затем он указал:

«В опытах с гуттаперчей также наблюдался эффект охлаждения при удлинении, а в опытах с вулканизированной индийской резиной наблюдался обратный эффект: она нагревалась при растяжении и охлаждалась при удалении нагрузки. Узнав об этом необычном результате, профессор Томсон, который уже мельком упоминал о возможности обратного обычному поведения индийской резины при определенных обстоятельствах, предложил автору провести опыты с целью проверки: будет ли образец из вулканизированной резины, растянутый под нагрузкой, укорачиваться при нагреве. Соответственно в процессе испытаний было обнаружено, что этот материал, будучи растянутым таким грузом, который мог удвоить его длину, уменьшался по длине на одну десятую при нагреве на 50° С. Этот эффект укорочения, как оказалось, быстро усиливался при увеличении растягивающего груза, и точно и полностью соответствовал теории профессора Томсона при различных растягивающих грузах и нагреве» [1]) (Joule [1957, 1], стр. 355—356).

В своем втором коротком отчете, опубликованном в 1857 г., Джоуль (Joule [1857, 2]) упоминает об измерении подъема и падения температуры, сопровождавших приложение сжимающей нагрузки и разгрузку любого изучавшегося материала, металлов и индийской резины. Повышение температуры было неизменно чуть выше значений, предсказанных Уильямом Томсоном. Джоуль в связи с этим занялся тем, что, как он ошибочно полагал, являлось впервые выполнявшимся установлением зависимости констант упругости от температуры, для того чтобы объяснить замеченные температурные отклонения.

Джоуль изготавливал спиральные пружины из медной и стальной проволок и определял изменение их длины при изменении температуры. На основании результатов измерений он вычислил, что изменение модуля сдвига составляло 0,00041 на градус по Цельсию для стали и 0,00047 на градус для меди [2]. В дополнительной заметке от 1 августа (статья была передана 18 июня) Джоуль отметил, что он не был осведомлен о предшествовавшей работе Купфера [2]) (Kupfer [1856, 1]), который в 1856 г. получил близкие зна-

[1]) Во время появления текста, цитированного выше, Джоуль, как он указывал, не был знаком с работой Гафа. Однако представляется возможным, что Кельвин знал о статьях Гафа.

[2]) Гораздо более важно, что Джоуль не знал об опытах Вертгейма, появившихся за двенадцать лет до опытов Купфера, поскольку результаты Купфера были на самом деле ошибочными.

чения 0,000471 и 0,000478 для изменения модуля упругости при сдвиге для стали и меди при изменении температуры на один градус по Цельсию. Как показало современное изучение первых подобных экспериментов, выполненных Вертгеймом в 1844 г. (Wertheim [1844, 1 (a)]), значения, полученные как Джоулем, так и Купфером, были для этих двух металлов заниженными. Джоуль не знал о работе Вертгейма в этой области.

В 1859 г. Джоуль в своей наиболее важной статье о термоупругости (Joule [1859, 1]) указал, что он, наконец, узнал о достижениях Гафа 54-летней давности (Gough [1805, 1], [1806, 1]).

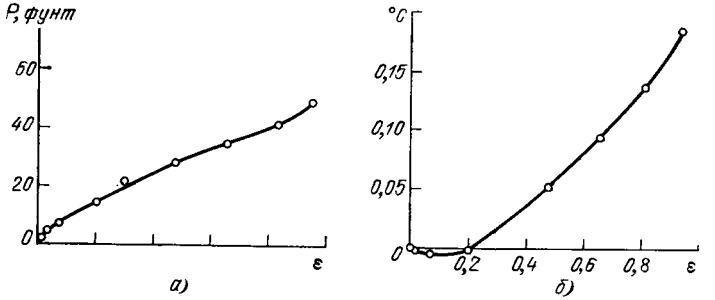



Рис. 4.254. Опыты Джоуля (1859). *а*) Зависимость нагрузка (в фунтах) — условная деформация для вулканизированной резины; *б*) параллельно выполненные Джоулем измерения изменения температуры (в °C) в зависимости от условной деформации.

Кроме опытов по изучению термоупругости вулканизированной индийской резины, важных в связи с предшествующим изложением, в статье обсуждены результаты ряда опытов по изучению температурных явлений при малых деформациях в стали, железе, меди, свинце, гуттаперче, различных породах дерева (включая сырое лавровое дерево, для которого единственно наблюдалась такая же необычная обратная температурная зависимость, как и для резины), в соломе, тростнике, картоне, зеленой виноградной лозе, коже и китовом усе [1]). На рис. 4.254 видны: *(а)* график зависимости нагрузка — деформация, построенный на основании результатов опыта, в котором с помощью железо-медной термопары он одновременно измерял изменения температуры, связанные с деформацией *(б)*. Этот рисунок часто репродуцируют; из рассмотрения его видно, что вслед за начальным охлаждением, происходящим при деформациях до немногим более 20%, происходит нагрев на протяжении дальнейшего растяжения образца при повышении нагрузки [2]).

---

[1]) Как было отмечено выше, Джоуль, очевидно, считал свою работу пионерной в экспериментальной термоупругости. Он явно совершенно не был знаком с опытами Вебера в 1830 г., проводившимися на 30 лет ранее. См. выше раздел 2.12.

[2]) Джоуль уточнил опыты Гафа, используя термопару вместо губ. Гаф пренебрежительно отнесся к такому усовершенствованию (см. раздел 2.12).

На рис. 4.255, *а* приведены диаграммы растяжения для второго опыта Джоуля с двойной резиновой лентой, загружавшейся вплоть до разрушения при почти шестикратном удлинении. Изменение знака кривизны у диаграммы растяжения соответствует максимуму

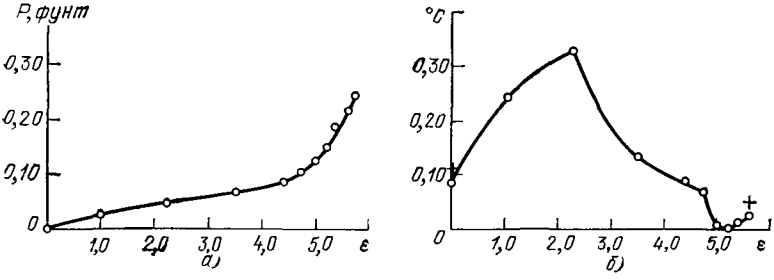



Рис. 4.255. Опыты Джоуля (1859). Зависимость нагрузка (в фунтах) — номинальная деформация для вулканизированной индийской резины (*а*), для которой измерялся соответствующий температурный эффект в °С для каждого приращения нагрузки на два фунта (*б*).

среди приращений температуры, возникающих при каждой ступени нагружения (рис. 4.255, *б*), равной 2 фунтам для всех случаев, кроме первого и последнего. (При нагрузке, равной 14,5 фунта, добавлялся груз в 4 фунта, вызывая изменение температуры только на 0,001 °С.)

И, наконец, анализируя второй эффект Гафа уменьшения удлинения, связанного с повышением температуры, Джоуль для такого же образца получил зависимость, приведенную на рис. 4.256. Степень укорочения на градус увеличения температуры, начиная от 0 °С, заметно увеличивается при увеличении уровня растягивающей нагрузки.

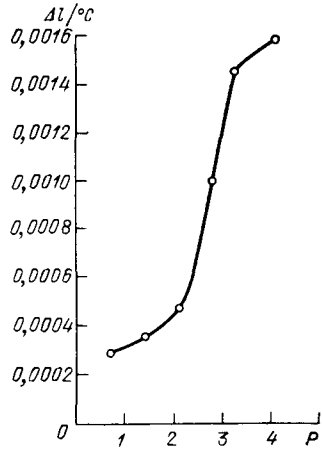



Рис. 4.256. Опыты Джоуля (1859). Второй эффект Гафа для резины: наблюдаемая зависимость $\Delta l/°C$ — укорочения на один градус Цельсия от $P$ — нагрузки в фунтах.

Эти опыты Джоуля, которые были продолжены Кельвином для сравнения с его теорией термоупругости, способствовали проведению ряда экспериментов и формированию гипотез, объясняющих явление, на протяжении нескольких последующих десятилетий.

Я упоминал выше экспериментальные попытки Шмулевича (Schmulewitsch [1966, 1], см. раздел 3.33) добиться такого же поведения у элемента из вулканизированной резины, как и у мышечной ткани. Основой для его аналогии было открытие подобия теоретической аномалии у мышцы ноги лягушки и у резины. Его объяснение эффекта Гафа, как мы заметили в гл. III, было опро-

вергнуто экспериментом Экснера по динамическому распространению волн (Exner [1874, 1], см. раздел 3.33 выше), который интересовался главным образом характером зависимостей напряжения — деформации по обе стороны от «нейтральной точки» термического эффекта. Шмулевич проводил свои опыты на установке А. Фика в Цюрихе, который совместно с В. Дыбковским в том же году вернулся к изучению собственно мышечной ткани, пытаясь обратиться к эффекту Гафа для объяснения ряда особенностей поведения живой ткани (Dybkowsky and Fick [1866, 1]).

В 1873 г. Бертен составил впервые обзор предшествовавших исследований в области термоупругости резины (Bertin [1873, 1]). Он отчасти интересен своим замечанием по поводу того, что в статье У. Томсона (Кельвина) резине приписываются те же свойства, которые присущи и другим материалам, удлиняться и охлаждаться при растяжении (William Thomson (Kelvin) [1855, 1]).

В ряде статей исследователей XIX века об упругости резины при конечных деформациях подробно изучено одноосное напряженное состояние. Как было отмечено в гл. II (раздел 2.23) Винклер в 1878 г. (Winkler [1878, 1]) сравнивал результаты опытов при растяжении и сжатии и показал, что положение начала отсчета напряжений не имеет существенного значения. Мы также ссылались выше (раздел 2.23) на работу Имберта 1880 г. (Imbert [1880, 1]), чья формула для зависимости напряжения — деформации при растяжении резины оказалась среди перечисленных Мемке (Mehmke [1897, 1]) в 1897 г. функций. Имберт выполнил ряд опытов по определению касательных модулей. Он обнаружил возрастание касательных модулей с ростом температуры при малых нагрузках и уменьшение модулей с ростом температуры при больших нагрузках. Он интересовался главным образом теми опытами, в которых было видно, что существует такая нагрузка, при которой касательные модули не зависят от изменений температуры. Наиболее оригинальным экспериментальным вкладом Имберта было изучение им поведения резиновых мембран, вдутых внутрь сферических стеклянных бутылок. С помощью капиллярных трубок, соединенных с каждой из сторон такой заполненной водой системы, он определял растягивающие усилия в мембране. Эти работы были выполнены в связи с интересом автора не только к изучению поведения резиновых шаров и рыбьих пузырей под давлением, но в первую очередь также и к поведению человеческого плодного пузыря при родах.

Мы указывали, что в 1886 г. Ц. Пульфрих (Pulfrich [1886, 1]) повторял опыт Вертгейма, проведенный в 1848 г. (Wertheim [1848, 1]) по определению коэффициента Пуассона и сжимаемости резины. Пульфрих, однако, был осведомлен о важности эффекта упругого последействия Вебера (Weber [1835, 1]) для резины в связи с опытами Кольрауша с этим материалом, проведенными в 1876 г. (Kohlrausch [1876, 1]). Делом чести Пульфриха было попытаться экспе-

риментально определить, влияет ли упругое последействие на значение коэффициента Пуассона.

В опытах Пульфриха испытывались резиновые трубки. Он измерял изменение объема воды, заполнявшей их изнутри, по изменению уровня в стеклянной трубке, связанной с резиновой трубкой; с помощью катетометра он определял удлинение образца при действии растягивающей нагрузки. Он нагружал и разгружал образец и наблюдал за деформацией в течение многих часов. Отличительной особенностью результатов опытов явилось то, что неизменно укорочения превышали те удлинения, которые ранее наблюдались Кольраушем. Пульфрих не обнаружил заметного изменения объема на протяжении протекания упругого последействия.

Указывая на исправление В. К. Рентгена в 1876 г. (Röntgen [1876, 1]) ошибочных вычислений сжимаемости резины в работе Вертгейма (Wertheim [1848, 1]) и на последующие утверждения других авторов о сжимаемости резины, Пульфрих показал (Pulfrich [1886, 1]), что при правильно выполненных вычислениях (см. гл. III, раздел 3.16) его данные, так же как и данные Вертгейма, указывают на несжимаемость резины при действии растягивающей нагрузки.

Зависимость свойств резины от того, из какой партии изготовления она взята, была четко показана в опытах Мэллока в 1889 г. (Mallock [1889, 1]), который определил динамические и квазистатические значения модулей $E$, $\mu$ и $K$ для мягкой серой, красной и жесткой серой резин. Значения $E$ и $\mu$ определялись по обычной методике. Он оценил объемную упругую податливость, помещая индийскую резину под давлением до 550 фунт/дюйм$^2$ в заполненную водой стеклянную трубку. Он определил модули при малых напряжениях и касательные модули при больших удлинениях. Эти результаты приведены в табл. 141, где единицы измерения — дюйм, фунт, секунда. Можно заметить значительное изменение определявшихся величин с изменением разновидности резины, различия между динамическими и статическими значениями, зависящие от плотности. Наконец, опыты по измерению вязкости продемонстрировали одно из затруднений, испытывавшихся Больцманом в 1882 г. (Boltzmann [1882, 1]), когда он выбрал резину в качестве материала для образцов в опытах по проверке теории Сен-Венана удара о стержень (гл. III, раздел 3.34).

В 1897 г. Тарстон комментировал «Зависимости напряжений от деформаций при одноосном напряженном состоянии для индийской резины» (Thurston [1897, 1]), вернувшись к изучению точки перегиба в графике зависимости $\sigma$—$\varepsilon$ при больших деформациях растяжения резины. Этот вопрос в значительной мере игнорировался после опытов Джоуля, проводившихся в 1859 г. На рис. 4.257 приведен полученный Тарстоном график зависимости напряжений (фунт/дюйм$^2$) от условных деформаций, на котором весьма заметна точка перегиба диаграммы напряжений при растяжении. Цель

Таблица 141

**Мэллок (1889)**

| Разновидность индийской резины | Плотность | Модуль Юига (фунт/дюйм²) | | Модуль упругости при сдвиге (фуит/дюйм²) | | Модуль объемной упругости (фунт/дюйм²) | Вязкость (фунт/дюйм²) | Предельное удлинение, выраженное в первоначальной длине | Истинные напряжения при разрыве (фунт/дюйм²) | Условные напряжения при разрыве (фунт/дюйм²) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | статический | динамический | статический | динамический | | | | | |
| Мягкая серая | 1,289 | 124 | 195 | 65 | 80—127 | 198 000 | 13,74 | 9,9 | около 8100 | около 820 |
| Красная | 1,407 | 166 | 217 | 50 | 57 | 115 000 | 2,578 | 7,3 | 6400 | 820 |
| Жесткая серая | 2,340 | 495 | 500 | 158 | 156—202 | 940 000 | 7,725 | 4,4 | 4400 | 820 |

этой работы и состояла в указании технологических возможностей такой зависимости. В дополнение к обнаружению практической для техники полезности такого поведения материала Тарстон также указал на тот факт, что ему не удалось вызвать в этом материале то повышение предела упругости, которое он обнаружил в металлах в 1873 г., а именно «эффект Тарстона» (Thurston [1873, 1]).

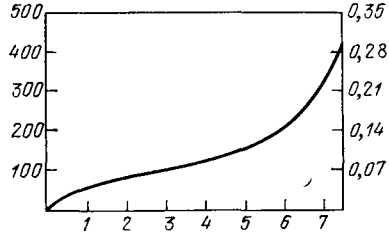



Рис. 4.257. Опыты Тарстона (1897). Диаграмма растяжения иидийской резины. По оси абсцисс отложена деформация в единицах первоначальной длины.

В 1907 г. Людвиг Шиллер вернулся к проблеме Пульфриха двадцатилетней давности (Schiller [1907, 1]). Ссылаясь на вычисления Рентгена, выполненные в 1876 г. и будучи, очевидно, неосведомленным о вкладе Пульфриха в этот вопрос, Шиллер провел опыты с резиновой пластинкой с целью определения ее толщины при заданном удлинении. Определив путем расчета эквивалентное значение $\nu$ для 20 удлинений в диапазоне от $\varepsilon=0{,}023$ до $\varepsilon=1{,}021$, Шиллер получил среднее значение $\nu=0{,}480$, близкое к тому, которое соответствует условию несжимаемости при значительных деформациях, наблюдавшемуся Рентгеном (Röntgen [1876, 1]). Он сослался на серию подобных опытов, выполненных за год до этого О. Франком, который получил значение $\nu=0{,}460$. Шиллер относил отчасти различие в значениях $\nu$ на счет разных значений отношения длины полосы к ее ширине в опытах Франка 40 : 10 по сравнению с 35 : 1,6 в его опытах. Малое же различие между значением $\nu=0{,}5$,

полученным Рентгеном и соответствовавшим несжимаемости при любых деформациях, и значением $\nu=0{,}480$, полученным им самим, он считал существенным.

Ссылка на монографию Л. Р. Ж. Трелоара «Физика упругости каучука», вышедшую в свет в 1958 г. (Treloar [1958, 1]), позволяет считать отчасти излишним детальное обсуждение экспериментальных исследований в области эластичности резины при больших деформациях после примерно [1]) 1930 г. Обзор этой книги позволяет установить основные достижения в понимании ряда вопросов физики резины, включая развитие кристаллической структуры при большой деформации; однако в первой половине XX столетия наблюдалось поразительное количество повторений опытов XIX века. Было показано, что изменения объема при удлинении могут быть определены. Оригинальное наблюдение Винклера (Winkler [1878, 1]) о продолжающемся увеличении касательного модуля при снижении растягивающей силы и при переходе к сжатию, после прохождения напряжений через нуль, было открыто заново. Изучался эффект Гафа (Gough [1805, 1]) при малых и очень больших удлинениях, включая особенности при удлинении и укорочении, которые рассматривал Джоуль (Joule [1859, 1]).

Безусловно наиболее важным достижением в экспериментальных исследованиях XX века в области упругости резины при больших деформациях явились опыты Рональда С. Ривлина и Д. У. Сондерса, проведенные в 1951 г. (Rivlin and Saunders [1951, 1]), которые детально описаны в книге Трелоара, но я, конечно, обращусь здесь к самой статье.

В той части работы, которая была приведена как часть VII серии статей, опубликованных в 1948 и 1949 гг. в «Философских записках Королевского общества в Лондоне» *(Philosophical Transactions of the Royal Society of London)* Ривлин и Сондерс описали эксперименты по конечным деформациям, выполненные с целью сравнения с теорией больших упругих деформаций несжимаемых изотропных материалов, развитой Ривлином в предыдущих разделах общей работы. Математическая теория

«...описывает деформацию под действием приложенных сил тел из идеальных высокоэластичных материалов, которые являются несжимаемыми и изотропны в их недеформированном состоянии. Относящиеся к рассматриваемому вопросу физические свойства материала выражены через потенциальную энергию деформации $W$, которая должна быть функцией двух инвариантов деформаций $I_1$ и $I_2$.

Эти инварианты могут быть выражены через отношения главных удлинений $\lambda_1$, $\lambda_2$ и $\lambda_3$ в рассматриваемой точке деформированного тела при помощи следующих

---

[1]) Из общего количества 201 ссылки Трелоар цитировал только упомянутые выше работы Гафа, Джоуля и Кельвина, относившиеся к XIX веку.

Эти три работы плюс шесть статей периода 20-х гг. XX века и составляют все ссылки Трелоара на работы до 1930 г. Кроме тридцати одной ссылки, все остальные относятся к двадцатилетнему периоду, предшествовавшему публикации книги.

формул:

$$I_1=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2, \qquad I_2=1/\lambda_1^2+1/\lambda_2^2+1/\lambda_3^2,$$

где, поскольку материал тела принимается несжимаемым, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$» (Rivlin and Saunders [1951, 1], стр. 252).

Ривлин и Сондерс выполнили следующие опыты: 1) чисто-однородная деформация тонкого листа резины, в которой деформация изменялась таким образом, чтобы один из инвариантов деформации $I_1$ или $I_2$ сохранялся постоянным; 2) чистый сдвиг тонкого

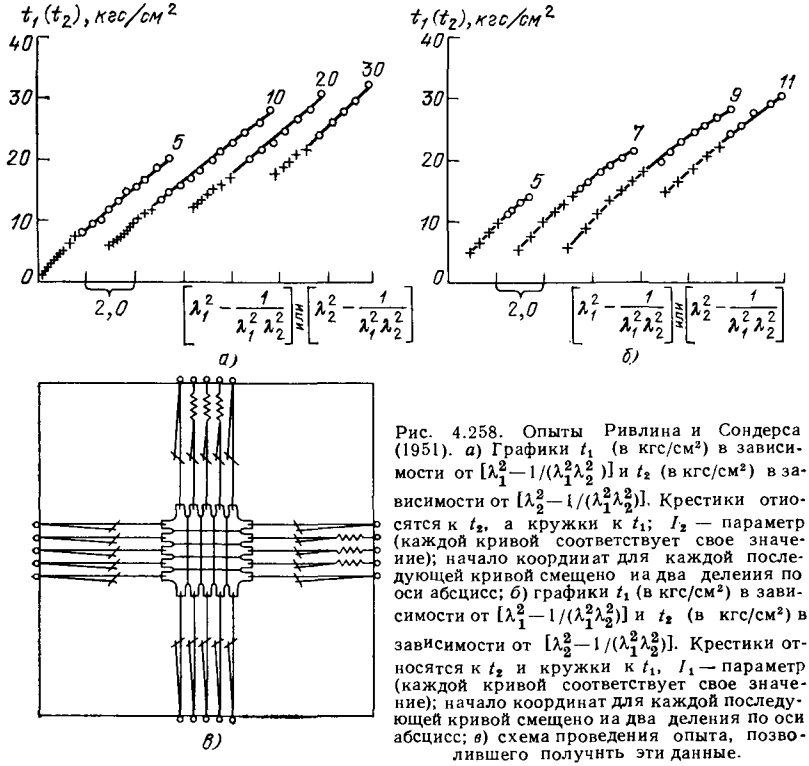



Рис. 4.258. Опыты Ривлина и Сондерса (1951). *а*) Графики $t_1$ (в кгс/см$^2$) в зависимости от $[\lambda_1^2-1/(\lambda_1^2\lambda_2^2)]$ и $t_2$ (в кгс/см$^2$) в зависимости от $[\lambda_2^2-1/(\lambda_1^2\lambda_2^2)]$. Крестики относятся к $t_2$, а кружки к $t_1$; $I_2$ — параметр (каждой кривой соответствует свое значение); начало координат для каждой последующей кривой смещено на два деления по оси абсцисс; *б*) графики $t_1$ (в кгс/см$^2$) в зависимости от $[\lambda_1^2-1/(\lambda_1^2\lambda_2^2)]$ и $t_2$ (в кгс/см$^2$) в зависимости от $[\lambda_2^2-1/(\lambda_1^2\lambda_2^2)]$. Крестики относятся к $t_2$ и кружки к $t_1$, $I_1$ — параметр (каждой кривой соответствует свое значение); начало координат для каждой последующей кривой смещено на два деления по оси абсцисс; *в*) схема проведения опыта, позволившего получить эти данные.

резинового элемента; 3) совместно происходящие простое растяжение и чистый сдвиг тонкого листа; 4) простое растяжение полосы; 5) простое сжатие; 6) простое кручение правильного кругового цилиндра и 7) совместное осевое растяжение и кручение правильного кругового цилиндрического стержня. Поскольку основной целью опытов было определение степени соответствия их теории для разных случаев нагружения, внимание уделялось контролю и варьированию соответствующих величин.

Ривлин представлял себе, что в пределах точности опытов анализ нагрузок и деформаций для различных простых видов деформации позволит установить вид функции отклика для этого тела. Считая, что $W$ — накопленная энергия [1]), Ривлин определял в опыте величины $\partial W/\partial I_1$ и $\partial W/\partial I_2$, как функции $I_1$ и $I_2$. Эти данные привели его к следующей аппроксимации $W$:

$$W = C(I_1 - 3) + f(I_2 - 3), \tag{4.83}$$

где $C$ — константа для недеформированного тела, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ так, что $I_1=I_2=3$.

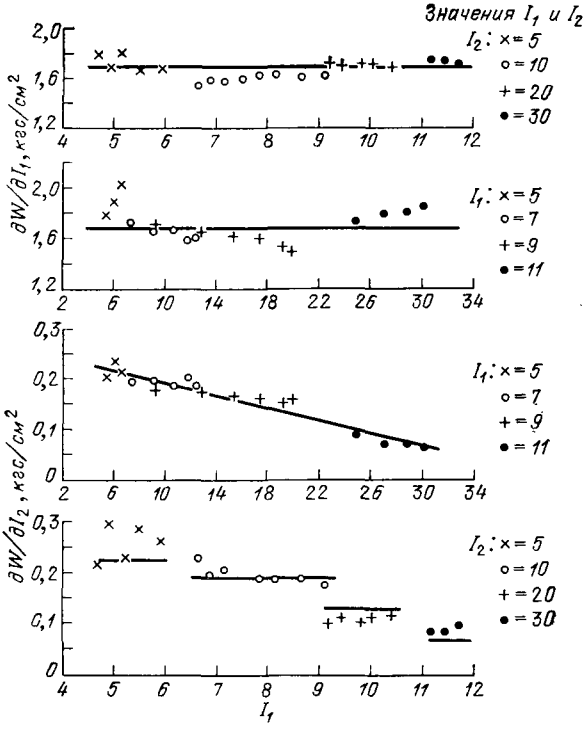



Рис. 4.259. Опыты Ривлина и Сондерса (1951). Графики зависимостей $\partial W/\partial I_1$ и $\partial W/\partial I_2$ от $I_1$ и $I_2$.

Ривлин показал, что главные напряжения $t_i$, связанные с деформацией материала, для которого отношения удлинений равны

---

[1]) Трусделл и Нолл в 1965 г. (Truesdell and Noll [1965, 1]) представили результаты Ривлина и Сондерса в такой форме, когда не требовалось предположения о наличии информации о накопленной энергии.

$\lambda_i$, могут быть найдены по формуле

$$t_i = 2\left[\lambda_i^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_i^2}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right] + P, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{4.84}$$

где $P$ — произвольное гидростатическое давление.

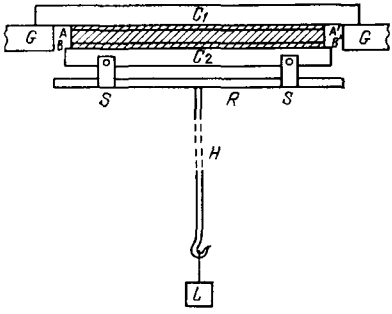
В первом опыте, который схематически показан на рис. 4.258, *в*, пружины не только позволяли установить значения приложенных сил, но и позволяли легко регулировать $\lambda_1$ или $\lambda_2$, обеспечивая при этом постоянство одного из инвариантов $I_1$, $I_2$ при переменности другого.

Результаты, полученные в этом опыте, показаны на рис. 4.259. Здесь $\partial W/\partial I_1$ — приблизительно постоянная по значению функция и от $I_1$ и от $I_2$, в то время как $\partial W/\partial I_2$ уменьшается примерно линейно в зависимости от $I_1$ и $I_2$. Ривлин и Сондерс привели свои результаты и в табулированной форме. Уменьшение $\partial W/\partial I_2$ совместно с $I_1$, в то время как $\partial W/\partial I_1$ не изменяется с изменением $I_2$, требует дальнейшего экспериментального изучения предположения о существовании накопленной энергии, поскольку соотношение

$$\frac{\partial}{\partial I_2}\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\right) = \frac{\partial}{\partial I_1}\left(\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)$$

не удовлетворено экспериментальными данными.

Опыты на чистый сдвиг и на совместно происходящие сдвиг и простое растяжение были выполнены на установке, показанной на рис. 4.260, где $AA'B'B$ — образец, нагружавшийся при сдвиге



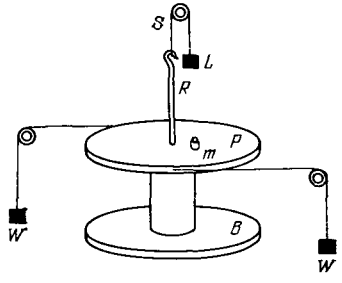




Рис. 4.260. Опыты Ривлина и Сондерса (1951). Установка для проведения опытов по чистому сдвигу и по совместным сдвигу и простому растяжению.

Рис. 4.261. Опыты Ривлина и Сондерса (1951). Установка для опытов по кручению цилиндра.

горизонтальным движением стержня $R$ и при растяжении приложением нагрузки к стержню $H$. Были приведены графики табулированных значений

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial I_2}$$

Таблица 142

**Ривлин и Сондерс (1951)**

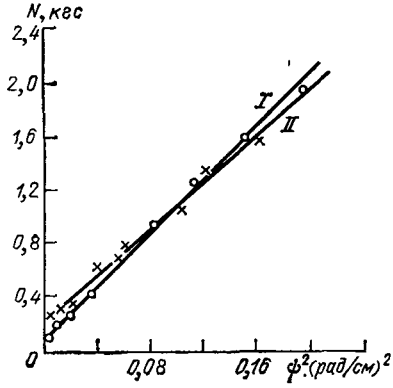
| $I_2$ | 3,2 | 3,6 | 4,0 | 4,4 | 4,8 | 5,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)$ расчетное (кгс/см²) | 2,18 | 2,08 | 2,02 | 1,98 | 1,94 | 1,92 |
| $\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)$ измеренное (кгс/см²) | 2,24 | 2,08 | 1,96 | 1,92 | 1,88 | 1,85 |

в зависимости от $I_2$ для чистого сдвига и чистого сдвига, происходящего совместно с простым растяжением. Оказалось, что эти результаты хорошо согласуются с опытными в экспериментах по простому кручению и по простому кручению совместно с растяжением.

В опытах по простому растяжению были найдены значения

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial I_2},$$

приведенные в табл. 142, которые сравниваются со значениями, вычисленными на основании указанных выше экспериментальных данных для чистого сдвига.



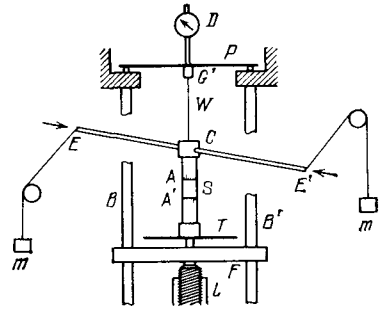




Рис. 4.262. Опыты Ривлина и Сондерса (1951). График зависимости продольной силы $N$ от $\psi^2$; $I$ — возрастающая нагрузка $II$ — убывающая нагрузка ($\psi$ — угол закручивания.)

Рис. 4.263. Опыты Ривлина и Сондерса (1951). Установка для опытов по совместному кручению и простому растяжению.

Как указали Ривлин и Сондерс, согласование было в пределах погрешностей опыта.

Для краткости я опущу опыты по сравнению простого сжатия и простого растяжения. Опыты по закручиванию цилиндра были выполнены с помощью установки, показанной на рис. 4.261.

После проверки малости гистерезиса путем сравнения поведения образца при нагружении и разгрузке Ривлин и Сондерс получили важные экспериментальные результаты, показанные на рис. 4.262, на котором приведен график зависимости нормальной силы $N$ от

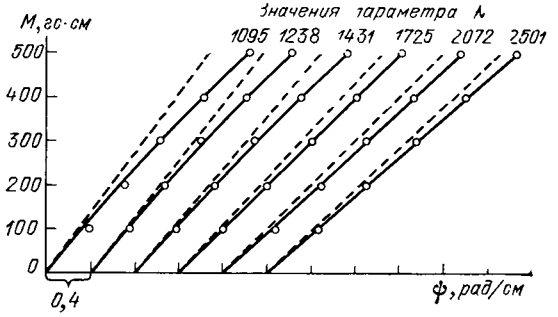



Рис. 4.264. Опыты Ривлина и Сондерса (1951). Графики зависимостей крутящего момента $M$ от угла закручивания $\psi$ при различных значениях степени удлинения $\lambda$ ($\lambda$—параметр). Исследовано изменение $\psi$ в большом диапазоне значений; начало координат для каждой следующей кривой (для каждого последующего приращения значения $\lambda$) смещено на 0,4 рад/см вдоль оси абсцисс.

квадрата угла закручивания $\psi^2$ при нагружении и разгрузке. Эта корреляция между нормальной силой и квадратом угла закручивания позволяет установить экспериментально для конечных деформаций явление, которое Пойнтинг пытался обнаружить экспериментально при малых деформациях (Poynting [1909, 1]). Кроме того она позволяет подвести соответствующий теоретический фундамент под объяснение эффекта, поскольку такая зависимость могла быть подсказана на основании рассматриваемой теории.

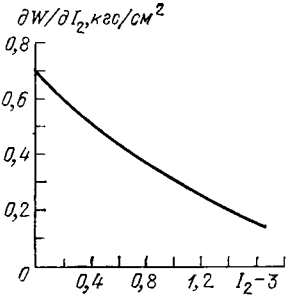



Рис. 4.265. Опыты Ривлина и Сондерса (1951). График зависимости $\partial W/\partial I_2$ от $(I_2-3)$.

На установке, показанной на рис. 4.263, Ривлин и Сондерс проводили заключительные опыты по совместному простому растяжению и кручению (Rivlin and Saunders [1951, 1]). Крутящий момент $M$ зависел от угла закручивания $\psi$ при различных значениях $\lambda$ — степени удлинения так, как показано на рис. 4.264, на основании данных которого получен график зависимости $\partial W/\partial I_2$ от $I_2$—3, изображенный на рис. 4.265.

Все вышеупомянутые опыты были выполнены при уровнях деформации более низких, чем те, при которых появляется кристаллизация.

Эти экспериментальные исследования Ривлина и Сондерса являются вехой в истории экспериментальной механики, так же как

Таблица 143

**Гент и Ривлин (1952)**

| $a_1$ (см) | $a_2$ (см) | $\mu_1 a_1$ (см) | $\mu_2 a_2$ (см) | $-\lambda$ | Измерения | | Расчет | | $C_2/C_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$ | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$ | |
| 1,27 | 0,78 | 0,86 | 1,30 | 1,0275 | 0,47 | 2,84 | 0,4583 | 2,866 | 0,29 |
| 1,27 | 0,85 | 0,91 | 1,31 | 1,0175 | 0,52 | 2,42 | 0,5110 | 2,373 | 0,32 |
| 1,27 | 0,945 | 0,993 | 1,30 | 1,008 | 0,62 | 1,91 | 0,5926 | 1,876 | 0,42 |

и вклад теоретической части работы Ривлина в области прикладной механики. Для немногих из объектов, рассмотренных в настоящей книге, успешное сочетание эксперимента и теоретических обоснований в лишь какой-то мере приближалось к такому, какое достигнуто в этой работе середины XX века. Ривлин и Сондерс описали со всей возможной тщательностью и ясностью подробности процесса изготовления образцов, детали испытательной установки, методику проведения опытов, комментарии к важным аспектам корреляций и ограниченности некоторых опытов и расчетов.

Невозможно завершить эту тему, не упомянув о продолжении опытов по изучению высокоэластичности резины в следующем 1952 г., осуществленном А. Н. Гентом и Ривлином (Gent and Rivlin [1952, 1]). Проводились опыты по раздуванию (загружению внутренним давлением) резиновых труб диаметром 1 дюйм и длиной 6 дюймов с наружным и внутренним радиусами до загружения соответственно равными $a_1$ и $a_2$. После сравнения результатов опытов по простому растяжению с результатами Ривлина и Сондерса, что было необходимо, поскольку трубки изготавливались на основании несходного режима вулканизации, они загружали трубки внутренним давлением и затем определяли их диаметры. Значения диаметров представлялись в форме $\mu_1 a_1$ и $\mu_2 a_2$, а все замеры производились в дюймах. После раздувания трубка испытывала также и изменения в длине. Гент и Ривлин обнаружили, что функция энергии деформации, согласно формуле (4.85), предложенная М. Муни несколькими годами ранее, довольно хорошо соответствует данным опыта (Mooney [1940, 1]). Их сравнение результатов опытов и расчетов приведено в табл. 143, где $\lambda$ означает степень удлинения, $\varepsilon_1 = -\lambda\mu_1^2$ и $\varepsilon_2 = -\lambda\mu_2^2$, а $C_1$ и $C_2$ — константы в уравнении (4.85)

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3). \tag{4.85}$$

Статья об опытах по раздуванию была первой (I) в серии статей. В течение того же года Гент и Ривлин опубликовали еще две дополнительные статьи, обозначенные под номерами II и III (Gent

and Rivlin [1952, 2, 3]). В их второй статье описывалось кручение, надувание и растяжение труб из резины с разной степенью вулканизации. И снова при этих дополнительных условиях была достигнута хорошая корреляция между теорией и опытами. Их заключительная III статья в этой области содержит описание опытов по малым крутильным деформациям растянутых резиновых призм. Четыре резиновых стержня, каждый длиной 7,46 см, имели различное соотношение сторон прямоугольного поперечного сечения в диапазоне от 1,001 до 3,980. Измерения крутящего момента, угла закручивания $\psi$ и степени удлинения $\lambda$ позволили установить в дальнейшем связь между опытом и обширными деталями теории.

Резина оказалась тем материалом, для которого отклик при больших деформациях теперь точно определяется теорией, несмотря на ее чувствительность к способу изготовления образца и на присущие ей тепловые свойства, вызвавшие в XIX веке особый интерес к материалу.

### 4.40. Резюме

Опыты по изучению больших деформаций тел развиваются в основном на протяжении XX века. Их относительная новизна и важность таких областей, как пластическая деформация и течение, немногочисленные внушающие доверия теории, наряду со значительным числом надежных экспериментальных данных, обеспечили подготовленность этой области к принятию гипотез и созданию моделей. Поэтому особенно полезно представить экспериментальные основы ясно, без включения спорных принципов, возникающих как в прикладной (феноменологической), так и атомистической механике.

Опыты Треска в области текучести, выполненные столетие назад, все еще неудовлетворительно объяснены с позиций экспериментатора, мыслящего в терминах количественных соотношений. В последнее время наши знания в области физики больших деформаций существенно пополнились новыми фактами в связи с опытами в таких направлениях, как термопластичность, динамическая пластичность и пластичность монокристаллов. Среди множества обнаруженных фундаментальных физических фактов имеется и тот, что пластическая деформация кристаллов неоднородна. Экспериментально установлено, что для полностью отожженных кристаллических тел уравнения состояния должны включать переходы второго порядка при фиксированных углах сдвига, дискретное (квантованное) распределение форм деформаций и эффект Савара — Массона. Раньше или позднее, соответствующее развитие теории континуума для этого класса твердых тел должно включить учет этих явлений. С другой стороны, касаясь эластичности резины при больших деформациях, прогресс был достигнут при сопоставлении нелинейной теории упругости и эксперимента, но свойства этого

материала оказались настолько зависящими от предшествовавших термической, механической и химической историй, что часто бывает трудно сопоставлять численные результаты тех или иных экспериментаторов.

Проводившиеся в течение шестидесяти лет переупрощенные опыты по определению конечных деформаций при ударе в кристаллических телах привели к долгому, бесплодному спору о роли вязкости в пластичности. Эти долгие годы косвенных измерений никоим образом не заложили основы для внезапного открытия 50-х гг. XX века, состоящего в том, что для полностью отожженных кристаллических тел явления динамической пластичности при высоких скоростях деформаций отмечались отсутствием влияния вязкости во всем диапазоне температур, даже вблизи точки плавления. Это открытие оказалось возможным только после создания метода непосредственного и точного наблюдения за волнами конечной амплитуды, без использования квазистатических гипотез.

Промышленность требовала быстрых ответов на возникавшие вопросы, и это привело к созданию очень частных приемов решения задач о конечных деформациях. Еще до того, как было изучено сопротивление материалов при однородной пластической деформации, были сделаны попытки проанализировать неоднородные распределения связанных между собой напряжений и деформаций в упругой и пластической областях работы материала. В этих попытках, относившихся к «идеальным» пластическим телам, была переоценена важность начальной поверхности текучести и, следовательно, переоценено значение области малых деформаций при переходе от близкой к линейной весьма малой упругой деформации к значительной пластической деформации. Для каждого серьезного экспериментатора очевидно, что реальное физическое явление значительно отличается от указанного выше, оно является гораздо более сложным, гораздо более интересным, чем могло бы показаться в условиях таких наложенных аналитических ограничений.

Более того, имели место противоречия между такой слишком упрощенной теорией и результатами строго поставленных опытов. Задача адекватного описания конечных деформаций была решена только тогда, когда опыты по изучению больших деформаций при монотонно увеличивающихся равномерно распределенных напряжениях были выполнены и при простом и при сложном нагружении для скоростей деформирования от самого низкого регистрируемого значения $10^{-9}$ $с^{-1}$ до самых высоких скоростей, при которых возможно определить положение фронта волны, $10^{4}$ $с^{-1}$. Оказалось, что многие из ранних гипотез просто не имеют аналогов в природе. Для полностью отожженных кристаллических материалов конечные деформации, как обратимые упругие, так и необратимые пластические, могут быть теперь определены на основании экспериментально установленных уравнений состояния, которые полу-

чены, исходя из известных соотношений для энергии деформации. В то же время стала совершенно очевидной необходимость дальнейшего изучения стабильности свойств материалов и при малых, и при больших деформациях. В области пластичности, в которой по данным экспериментов при конечных деформациях переходит в тепло 95% энергии, для будущих теоретиков встает весьма сложная задача сопряжения чрезвычайно различных диаграмм механических свойств при нагружении и разгрузке. Главной целью настоящей книги было представить и развить те экспериментальные основы этой относительно молодой области физики металлов, для которых детальные и надежные экспериментальные сведения сочетаются с хорошо развитой достоверной теорией.

Сегодня мы живем в обстановке преувеличенной оценки методики и аппаратуры, опубликования избыточного числа поверхностных экспериментальных работ, публикаций с детальными описаниями хорошо известных сведений; тем не менее еще никогда в истории экспериментальной механики твердого тела не было таких огромных возможностей для исследований. В настоящей книге было подробно показано, что экспериментаторы в области физики путем независимого изучения природы могут критически оценивать принятые ранее объяснения, создавать основы для проведения различий между физически тривиальным и физически значительным и в то же время быть главным источником нового осмысливания известных фактов и новых фундаментальных открытий в физике.

## ЛИТЕРАТУРА

Источниками, использованными для сравнения различных единиц, являются: Adams [1821, 1]; Blind [1906, 1]; Kennelly [1928, 1]; Lemale [1875, 1]; Nelkenbrecher [1820, 1]; Tate [1842, 1].


1678 1. Hooke, Robert: Lectures De Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies. London: John Martyn. Переиздано в Early Science in Oxford (ed. R. T. Gunther). Vol. VIII, p. 331—356. Oxford: R. T. Gunther 1931.

1694 1. Bernoulli, Jacobus: Curvatura laminae elacticae... Acta Eruditorum Lipsiae. June, 262—276. [Opera Jacobi Bernoulli, 576—600.] (См. также Truesdell [1960, 1], pp. 88—96.)

1721 1. Riccati, Jacopo: Отрывок из письма, опубликованного в: Paul Heinrich Fuss: Correspondence Mathématique et Physique du XVIII$^{ème}$ Siècle, Tome 2. St. Petersburg 1843. Переиздано в The Sources of Science, Vol. 2, No. 35, pp. 101—102. New York and London: Johnson Reprint Corporation 1968. См. также Truesdell [1960, 1], p. 115.

1739 1. Musschenbroek, Pieter van: Essai de Physique, Tome I [перевод P. Massuet]. Leyden.

1765 1. D'Arcy, Patrick: Mémoire sur la durée de la sensation de la vue. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris, 37, 700—718. Переиздано: Amsterdam: J. Schreuder (1773).

1775 1. Belidor, Bernard Forest de: La Science des Ingénieurs dans la Conduite des Travaux de Fortification et d'Architecture Civile. Nouvelle édition à la Haye. P. F. Gosse.

1784 1. Coulomb, Charles Augustin: Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal. Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, pp. 229—269. [Перепечатано в Mémoires de Coulomb, Vol. 1, Collections de Mémoires Relatifs à la Physique, publiés par la Société Française de Physique, Paris: Gauthier-Villars] (1884), pp. 63—103.]

1787 1. Chladni, Ernst Florens Friedrich: Entdeckungen über die Theorie des Klanges. Leipzig: Weidemanns, Erben und Reich.

1805 1. Gough, John: A description of a property of Caoutchouc, or India rubber; with some reflections on the cause of the elasticity of this substance. Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester, Second series 1, 288—295 (см. также Phil. Mag. 24, 39—43 (1806)).

1806 1. Gough, John. См. Phil. Mag. 24, 39—43. Это фактически статья, опубликованная в [1805, 1].

1809 1. Berthollet, Claude Louis: Notes sur la chaleur produit par le choc et la compression. Mémoires de Physique et de Chimie de la Société d'Arcueil 2, 441—448.

1813 1. Duleau, Alphonse Jean Claude Bourguignon: Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé. См. Duleau [1820, 1].

1816 1. Karsten, Karl Johann Bernhard: Manuel de la Métallurgie de Fer. (См. второе издание (1830).)

1820 1. Duleau, Alphonse Jean Claude Bourguignon: Essai Théorique et Expérimental sur la Résistance du Fer Forgé. Paris. (Дюло представил мемуар во Французскую Академию 28 июня 1819; Коши 9 августа 1819 г. прочитал отзыв, написанный Коши, Пуассоном и Жираром.)

1. Nelkenbrecher, Johann Christian: J. C. Nelkenbrechers allgemeines Taschenbuch der Munz-, Maass-, und Gewichtskunde, 13-ste Verlag, J. P. Schellenberg, Redaktor. Berlin: Sanderschen Buchhandlung.
1821 1. Adams, John Quincy: Report upon Weights and Measures, Philadelphia: Abraham Small.
1823 1. Leslie, Sir John: Elements of Natural Philosophy. Edinburgh (sic).
1824 1. Hodgkinson, Eaton: On the transverse strain, and strength of materials. (Представлено в 1822 г.) Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester, second series 4, 225—289.
1826 1. Babbage, Charles: On electrical and magnetic rotations. Phil. Trans: Roy. Soc. London, Parts II and III, 494—528.
1. Navier, Claude Louis Marie Henri: Expériences sur la résistance de divers substances à la rupture causée par une tension longitudinale. Annales de Chimie et de Physique 33, 225—240.
1828 1. Cagniard de Latour, Charles: Note sur l'élasticité des cordes métalliques. La Globe 6, No. 19, 107—108, Paris. (Переведено и опубликовано в Англии в the Edinburgh Journal of Science 8, 201—203 (1828).)
1829 1. Girard, P. S.: Mémoire sur la posé des conduites d'eau... (См. [1831, 1].)
1830 1. Coriolis, Gustave Gaspard: Expériences sur la résistance du plomb à l'écrasement, et sur l'influence qu'a sur sa dureté une quantité inappréciable d'oxide. Annales de Chimie et de Physique 44, 103—111.
1. Karsten, Karl Johann Bernhard: Manuel de la Métallurgie du Fer 1, Metz. Dèxième èdition, F. J. Culmann traducteur. (Premier èdition: 1816.)
1. Weber, Wilhelm: Über die specifische Wärme fester Körper, insbesondere der Metalle. Annalen der Physik und Chemie, zweite Serie 20, 177—213.
1831 1. Hodgkinson, Eaton: Theoretical and experimental researches to ascertain the strength and best forms of iron beams. Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester, second series 5, 407—544.
1832 1. Gerstner, Franz Anton (Ritter) von: Über die Festigkeit der Körper. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 26, 269—279.
1833 1. Vicat, Louis Joseph: Note sur l'allongement progréssif du fil de fer soumis à divers tensions. Annales de Chimie et de Physique, deuxième série 54, 35—40.
2. Vicat, Louis Joseph: Recherches expérimentales sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides. Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires, premier série, deuxième semestre, 201—286.
1834 1. Vicat, Louis Joseph: Note sur l'allongement progressif du fil de fer soumis à divers tensions. Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires, premier série, premiere semestre 40—44. (См. также [1833, 1, 2].)
1835 1. Weber, Wilhelm: Ueber die Elasticität der Seidenfäden. Annalen der Physik und Chemie, zweite Serie 34, 247—257.
1837 1. Savart, Félix: Recherches sur les vibrations longitudinales. Annales de Chimie et de Physique, deuxième série 65, 337—402.
1841 1. Karmarsch, Karl: Ueber die Festigkeit und Elastizität der Darmsaiten. Dingler's Polytechnisches Journal 81, 427—432.
1. Masson, Antoine Philibert: Sur l'élasticité des corps solides. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 3, 451—462.
1. Poncelet, Jean Victor: Introduction à la Mécanique Industrielle, Physique ou Expérimentale. Metz (deuxième edition). Первое издание этой книги появилось в 1829 г. под названием: Cours de Mécanique Industrielle.
1. Wertheim, Guillaume: Paquet cacheté addressé par M. Wertheim en 1841... (См. [1842, 2].)
1842 1. Tate, William: The Modern Cambist, 4th edition. London: Effington Wilson.
1. Wertheim, Guillaume: Recherches sur l'élasticité et la ténacité des métaux. Extrait. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 15, 110—115.

2. Wertheim, Guillaume: Paquet cacheté addressé par M. Wertheim en 1841, et dont le dépôt a été accepté par l'Académie dans sa séance du 19 juillet. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 15, 115—117.

1843 1. Hodgkinson, Eaton: Experiments to prove that all bodies are in some degree inelastic, and a proposed law for estimating the deficiency. Report of the 13th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, Cork, 23—25. (См. также [1846, 1].) (Опубликовано в Лондоне в 1844.)

1844 1. Baudrimont, A.: Sur des procédés mécaniques destinés à donner la mesure d'intervalles de temps très courts. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 19, 1454—1455. (Дополнение к работе Poullet Note sur un moyen...)

1. Hodgkinson, Eaton: Experimental inquiries into the falling-off from perfect elasticity in solid bodies. Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, Section 2, Transactions, 25—27.

1. Pouillet, Claude Servais Mathais Roland: Note sur un moyen de mesurer des intervalles de temps extrêmement courts, comme la durée du choc des corps élastiques, celle du débandement des ressorts, de l'inflammation de la poudre, etc., et sur un moyen nouveau de comparer les intensités des courants électriques, soit permanents, soit instantanés. Compt.Rend. Acad. Sci. Paris 19, 1384—1389. [Опубликовано также в Германии: Über ein Mittel zur Messung äußerst kurzer Zeiträume, wie die Dauer des Stoßes elastischer Körper, der Auslösung von Springfedern, der Entzündung von Schießpulver usw., und über ein neues Mittel, die Intensität elektrischer Ströme, permanenter wie instantaner, zu messen. Annalen der Physik und Chemie, 3te Serie 4, 452—459 (1845).] (См. также D'Arcy [1765, 1] и Baudrimont [1844, 1].)

1. Wertheim, Guillaume: Recherches sur l'élasticité. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 12.
   (a) Première Mémoire: De l'élasticité et de la cohésion des métaux, 385—454. (Представлено 18 июля, 1842 г.)
   (b) Deuxième Mémoire: De l'élasticité et de la cohésion des alliages, 581—610. (Представлено 8 мая 1843 г.)
   (c) Troisième Mémoire: De l'influence du courant galvanique et de l'électromagnetisme sur l'élasticité des métaux, 610—624. (Представлено 22 июля 1844 г.)

   (Опубликоваио также в Германии: Untersuchungen über die Elasticität. Annalen der Physik und Chemie, Leipzig, Ergänzungsband 11/II; 1—114 (1848).)

1845 1. Sullivan, William: On currents of electricity produced by the vibration of wires and metallic rods. Phil. Mag., third series 27, 261—264.

1846 1. Hodgkinson, Eaton: Experimental Researches. Appended as the second part to the 4th edition of Tredgold, Th.Practical Essay on the Strength of Cast Iron. London.

1847 1. Page, C. G.: Singular property of Caoutchouc, illustrating the value of latent heat in giving elasticity to solid bodies, and the distinct functions in this respect of latent and free or sensible heat. Silliman's Journal of Science 4, 341—342.

1. Regnault, Henri Victor: Relations de expériences... pour déterminer les principales lois et les données numériques qui entrent dans les calculs des machines à vapeur. Septième Mémoire: De la compressibilité des liquides. Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris 21, 429—464. (См. также [1842, 1], ч. I.)

1. Saint-Venant, Adhémard Jean Claude Barré de: Mémoire sur l'équilibre des corps solides, dans les limites de leur élasticité, et sur les conditions de leur résistance, quand les déplacements éprouvés par leur points ne sont pas très petits. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 24, 260—263.

1848 1. Thomson, James: On the strength of materials, as influenced by the existence or nonexistence of certain mutual strains among the particles composing them. Cambridge and Dublin Mathematical Journal 3, 252—266.
1. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 23, 52—95.
4. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur les sons produits par le courant électrique. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 23, 302—327.
1849 1. Iron Commission Report: Report of a Commission appointed by the English government to conduct a study on the use of iron and cast iron in the construction of railroads and bridges. Members of the Commission: John Wrottesley, Robert Willis, Henri James, George Rennie, William Cubitt, and Eaton Hodgkinson. Whitehall, 26 July, 1849. (См. перевод на французский язык для переиздания доклада, осуществленного в 1851 г.)
1. Thomson, James: Theoretical considerations regarding the effect of pressure in lowering the freezing point of water. Trans. Edinburgh Roy. Soc. 16, 575—580.
1850 1. Bunsen, Robert Wilhelm: Ueber den Einfluss des Drucks auf die chemische Natur der plutonischen Gesteine. Annalen der Physik und Chemie, zweite Serie 81, 562—567.
1. Faraday, Michael: On certain conditions of freezing water. The Athenaeum, No. 1181, 640—641 (June 15).
1. Hodge, Paul R.: См.: Proceedings of the Third Annual General Meeting of the Institution of Mechanical Engineers, Birmingham, 23 January 1850, p. 16 (1850—1851).
1. Stephenson, Robert: См.: Proceedings of the Third Annual General Meeting of the Institution of Mechanical Engineers, Birmingham, 24 April, 1850; pp. 6—9 (1850—1851).
1. Thomson, William: The effect of pressure in lowering the freezing-point of water experimentally demonstrated. Phil. Mag., third series 37, 123—127.
1851 5. Wertheim, Guillaume: Sur les effects optiques de la compression du verre. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 32, 144—145. (Скрепленный печатью пакет поступил 23 декабря 1850 г. и был открыт 27 января 1851 г.)
1853 1. Craig, W. C.: Ueber verbesserte Kautschuk-Federn für Locomotiven und Eisenbahnwagen (Übersetzung). Dingler's Polytechnisches Journal 129, 264—272.
1. Hodgkinson, Eaton: On the elasticity of stone and crystalline bodies. Report of the British Association for the Advancement of Science, 23rd Meeting, held at Hull, in September 1853, 36—37.
1854 1. Debonnefoy, E.: Note sur le caoutchouc vulcanisé et sur son emploi comparé à celui de l'acier fondu pour les ressorts des voitures et wagons dans les chemins de fer. Mémoires et Comptes Rendus des Travaux de la Société des Ingénieurs Civils, Paris, 86—95.
1. Hovine, M.: Note sur l'emploi des rondelles en caoutchouc vulcanisé comme ressort de choc et de traction. Mémoires et Comptes Rendus des Travaux de la Société des Ingénieurs Civils, Paris, 80—85.
1855 1. Thomson, Sir William (Lord Kelvin): On the thermo-elastic and thermo-magnetic properties of matter. Quarterly Jnl. Math., 1, 55—77.
1. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur la torsion. (Представлен во Французскую академию 19 февраля.) Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 40, 411—414. (См. [1857, 1].)
1856 1. Boileau, Pierre Prosper: Note sur l'élasticité du caoutchouc vulcanisé. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 42, 933—937.
1. Kupffer, Adolf Theodore: Travaux exécutés à l'Observatoire Physique Central. Comptes Rendus Annuelles, St. Pétersbourg 57—66.
1857 1. Dietzel, Carl Franz: Ueber die Elasticität des vulkanisierten Kautschuks und Bemerkungen über die Elasticität fester Körper überhaupt. Polytechnisches Centralblatt, Cols. 689—694.

1. Joule, James Prescott: On the thermo-electricity of ferruginous metals, and on the thermal effects of stretching solid bodies. Proc. Roy. Soc. (London) 8, 355—356 (June 1857).
2. Joule, James Prescott: On the thermal effects of longitudinal compression of solids. Proc. Roy. Soc. (London) 8, 564—565 (June 1857).
1. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur la torsion, Première Partie; (Представлено во Французскую академию наук в феврале 1855 г.) Annales de Chimie et de Physique, troisième serie 50, 195—321.
2. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur la torsion, Deuxième Partie. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 50, 385—431. (См. также [1852, 1], ч. I.)

1858 1. Clapeyron, E. (Benoit Paul Émile): Mémoire sur la travail des forces élastiques dans un corps solide élastique déformé par l'action de forces extérieures. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 46, 208—212.
1. Mousson, Albert: Einige Thatsachen betreffend das Schmelzen und Gefrieren des Wassers. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 105, 161—174.
1. Wiedemann, Gustav Heinrich: Über die Torsion. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 103, 563—577.
1. Wöhler, A.: Berichte über die Versuche, welche auf der Königl. Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn mit Apparaten zum Messen der Biegung und Verdrehung von Eisenbahnwagen-Achsen während der Fahrt angestellt wurden. Zeitschrift für Bauwesen 8, 642—652.

1859 1. Faraday, Michael: On certain conditions of freezing water, etc. Researches in Chemistry and Physics, London: Taylor and Francis, pp. 372—374.
1. Joule, James Prescott: On some thermo-dynamic properties of solids. Phil. Trans. Roy. Soc. London 149, 91—131.
1. Wiedemann, Gustav Heinrich: Ueber die Biegung. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 107, 439—448.

1860 1. Lüders, W.: Ueber die Äusserung der Elasticität an stahlartigen Eisenstäben und Stahlstäben, und über eine beim Biegen solcher Stäbe beobachtete Molecularbewegung. Dingler's Polytechnisches Journal, Stuttgart, vierte Serie 5, 18—22.
1. Wöhler, A.: Versuche der Ermittlung der auf die Eisenbahnwagen-Achsen einwirkenden Kräfte und der Widerstandsfähigkeit der Wagen-Achsen. Zeitschrift für Bauwesen 10, 583—616.

1862 1. Morin, Arthur Jules: Résistance des Matériaux, 3ème edition, Extrait. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 54, 235—239.

1863 1. Winkler, Emil: Die Elasticitäts- und Festigkeitscoefficienten. Civilingenieur 405—436.
1. Wöhler, A.: Über die Versuche zur Ermittlung der Festigkeit von Achsen, welche in den Werkstätten der Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn zu Frankfurt a. d. O. angestellt sind. Zeitschrift fur Bauwesen 13, 234—258.

1864 1. Tresca, Henri Édouard: Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions. (Extrait par l'auteur.) Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 59, 754—758.

1865 1. Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von: Populäre Wissenschaftliche Vorträge, Braunschweig: F. Vieweg und Sohn. (См. Eis und Gletscher, SS. 93—134.)
1. Thalén, Robert: On the determination of the limit of elasticity in metals. Phil. Mag., fourth series 30, 194—207.
1. Thomson, Sir William (Lord Kelvin): On the elasticity and viscosity of metals. Proc. Roy. Soc. (London) 14, 289—297. (См. также [1878, 1], [1880, 1], ч. I.)
1. Tresca, Henri Édouard: Experiments on the production of cylinders of ice by pressure through orificies. Phil. Mag., fourth series 30, 239—240.

1866 1. Dybkowsky, W., und A. Fick: Ueber die Wärmeentwicklung beim Starrwerden des Muskels. Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich 11—12, 317—348.

1867 1. Tresca, Henri Édouard: Sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 64, 809—812.
2. Tresca, Henri Édouard: Applications de l'écoulement des corps solides au laminage et au forgeage. Extrait. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 64, 1132—1136.
3. Tresca, Henri Edouard: Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 64, 442.
1868 1. Tresca, Henri Édouard: Mémoire sur l'écoulement des corps solides. Mémoires Presentés par Divers Savants, Académie des Sciences, Paris 18, 733—799.
2. Tresca, Henri Édouard: Sur l'application des formules générales du mouvement permanent des liquides à l'écoulement des corps solides. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 66, 1027—1032; 1244—1246.
1869 1. Tresca, Henri Édouard: Mémoire sur le poinçonnage et la théorie mécanique de la déformation des métaux. (Extrait par l'auteur). Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 68, 1197—1201.
1870 1. Saint-Venant, Adhémard Jean Claude Barré de: Rapport sur un complément, présenté par M. Tresca le 7 fevrier 1870 à son Mémoire du 27 novembre 1864 relatif à l'écoulement des corps solides malléables poussés hors d'un vase cylindrique par un orifice circulaire. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 70, 368—369.
2. Saint-Venant, Adhémard Jean Claude Barré de: Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance au cisaillement et à l'extension ou à la compression dans le mouvement continu de déformation des solides ductiles au delà des limites de leur élasticité. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 70, 309—311.
1. Tresca, Henri Édouard: Recherches sur le poinçonnage et sur la théorie mécanique de la déformation des corps solides. (Rapport sur l'ensemble de ces travaux; Rapporteur, M. Morin: M. M. Combes; de Saint-Venant.) Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 70, 288—308.
2. Tresca, Henri Édouard: Mémoire sur le poinçonnage des métaux et des matières plastiques. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 70, 27—31.
1. Wöhler, A.: Ueber die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl. Zeitschrift für Bauwesen 20, 73—106.
1871 1. Lévy, Maurice: Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. J. Math. Pures Appl. 16, 369—372.
1. Saint-Venant, Adhémard Jean Claude Barré de: Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. J. Math. Pures Appl. 16, 308—316.
1. Tresca, Henri Édouard: Étude sur la torsion prolongée au delà de la limite d'élasticité. (Extrait par l'auteur) Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 73, 1104—1105.
2. Tresca, Henri Édouard: Résultats des expériences de flexions faites sur des rails en fer et en acier au delà de la limite d'élasticité. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 73, 1153—1155.
1. Tyndall, John: Hours of Exercise in the Alps. London: Longmans, Green, & Co.
1872 1. Hopkinson, John: On the rupture of iron wire by a blow. Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society 11, 40—45. (Также в Original Papers of John Hopkinson, Vol. II, Scientific Papers, ed. by B. Hopkinson, p. 316—320, Cambridge, England (1901)).
2. Hopkinson, John: Further experiments on the rupture of iron wire. Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society 11, 119—121. (См. также Original Papers...) (См. выше, стр. 321—324.)
1. Tresca, Henri Édouard: Mémoire sur l'écoulement des corps solides. Mémoires présentés par Divers Savants à l'Académie des Sciences, Paris, deuxième série 20, 75—135.

2. Tresca, Henri Édouard: Mémoire sur le poinconnage des métaux et des matières plastiques. Mémoires présentés par Divers Savants, l'Académie des Sciences, Paris, deuxième série 20, 619—828. (Представлено во Французскую академию в марте 1869.)
3. Tresca, Henri Édouard: Mémoire complémentaire sur le poinçonnage des métaux et des matières plastiques. Mémoires présentés par Divers Savants à l'Académie des Sciences, Paris, deuxième série 20, 829—838.

1873 1. Bertin, A.: Révue des travaux publiés à l'étranger. См. главу I: Chaleur; раздел 3: Sur les propriétés thermiques du caoutchouc. Annales de Chimie et de Physique, quatrième série 28, 398—415.
1. Thurston, Robert Henry: Torsional resistance of materials determined by a new apparatus with automatic registry. J. Franklin Inst. 95 (January — June 1873), 254—260.

1874 1. Beardslee, (Commander) L. W.: Increase of resisting power of metals under stress. J. Franklin Inst., third series 67, 150—151, 302—304.
1. Exner, Franz: Über die Abhängigkeit der Elasticität des Kautschuks von der Temperatur. Sitz. ber. Math.-Naturwiss. Cl. Kaiserl. Akad. Wiss., Wien 69, Abteilung II, 102—114.
1. Thurston, Robert Henry: A note on the resistance of materials. Trans. Am. Soc. Civil Engrs. 2, Supplement, 239—240.
2. Thurston, Robert Henry: On the strength, elasticity, ductility and resilience of materials of machine construction. Trans. Am. Soc. Civil Engrs 2, Supplement, 349—378.
1. Uchatius, (General-Major) Franz (Ritter) von: Die Stahlbronce; Oesterreich, Zeitschrift Bergwesen 22, 445—447, 458—460, 466—468, 479—481. (См. также Dingler's Polytechnisches Journal 217, 122—133.)

1875 1. Kick, Friedrich: Kritik über R. H. Thurston's Untersuchungen über Festigkeit und Elasticität der Constructionsmaterialien. Dingler's Polytechnisches Journal 218, No. 3, 185—191.
1. Lemale, Alex Guislain: Monnaies, Poids, Mesures et Usages Commerciaux de tous les Etats du Monde, deuxièmé édition. Paris: Hachette Cie; Havre: A. Lemale, Ainé.
1. Pfaff, Immanuel Burkhard Alexius Friedrich: Versuch über die Plasticität des Eises. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 155, 169—174.
1. Thurston, Robert Henry: On the mechanical properties of materials of construction. Trans. Am. Soc. Civil Engrs. 3, 1—30. [Также в: J. Franklin Inst. 67, 273—292, 344—356, 419—430; 68, 47—66 (1874).]

1876 1. Kohlrausch, Friedrich Wilhelm Georg: Experimental-Untersuchungen über die elastische Nachwirkung bei der Torsion Ausdehnung, und Biegung. Dritte Mittheilung. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 158, 337—375.
1. Röntgen, Wilhelm Conrad: Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bei Kautschuk. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 159, 601—616.
1. Thurston, Robert Henry: Note on the resistance of materials, as affected by flow and by rapidity of distortion. Trans. Am. Soc. Civil Engrs. 5, 199—214.
2. Thurston, Robert Henry: The strength and other properties of materials of construction, as deduced from strain diagrams automatically produced by the autographic recording testing machine. (Answer to Professor Kick.) Trans. Am. Soc. Civil Engrs 5, 9—18. (См. также немецкий перевод: Über die Festigkeit der Constructionsmaterialien bestimmt durch die selbstätig registrirende Festigkeitsmaschine. Dingler's Polytechnisches Journal 223, 16—18.)

1877 1. Bauschinger, Johann: Ueber die Erhöhung der Elasticitätsgrenze der Metalle. Dingler's Polytechnisches Journal 224, 1—13, 129—134.
1. Uchatius (General-Major), Franz (Ritter) von: Ueber die Erhöhung

der Elasticitätsgrenze der Metalle durch dauernde Spannung. Dingler's Polytechnisches Journal 223, 242—246.

1878 1. Thurston, Robert Henry: Salisbury Iron. Its Composition, Qualities and Uses. Salisbury, Connecticut, U.S.A.

1. Tresca, Henri Édouard: On further application of the flow of solids. Proc. Inst. Mech. Engrs (London) 301—345 (June 1878).

1. Winkler, Emil: Deformationsversuche mit Kautschuk-Modellen. Civilingenieur 24, 81—100. (Более ранний обзор работ по упругости и прочности многих твердых тел см. Winkler [1863, 1]).

1879 1. Bauschinger, Johann: Ueber die Quercontraction und -Dilatation bei der Längenausdehnung und -Zusammendrückung prismatischer Körper. Civilingenieur, Leipzig 25, 81—124.

1. Malloc k, Arnulph: The measurement of the ratio of lateral contraction to longitudinal extension in a body under strain. Proc. Roy. Soc. (London) 29, 157—161.

1880 1. Imbert, A.: Recherches Théoriques et Expérimentales sur l'Élasticité du Caoutchouc. Lyon.

1. Spring, Walthère: Recherches sur la propriété que possèdent les corps solides de se souder par l'action de la pression. Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres, et des Beaux-Arts de Belgique, Bruxelles 49, 323—379. (См. также Annales de Chimie et de Physique; cinquième série 22, 170—217 (1881).)

1881 1. Bauschinger, Johann: Ueber die Veränderung der Elasticitätsgrenze und des Elasticitätsmoduls verschiedener Metalle. Civilingenieur 27, 289—348.

2. Bauschinger, Johann: Experimentelle Prüfung der neueren Formeln für die Torsion prismatischer Körper. Civilingenieur 27, 115—130.

1. Spring, Walthère: Recherches sur la propriété que possèdent les corps de se souder sous l'action de la pression. Annales de Chimie et de Physique, cinquième série 22, 170—217. Это по существу то же самое, что и статья [1880, 1].

1882 1. Boltzmann, Ludwig: Einige Experimente über den Stoss von Cylindern. Sitz. ber. Math.-Naturw. Cl. Kaiserl. Akad. Wiss., Wien 84, Abt. II, 1225—1229.

1. Fischer, (Friedrich) Hugo Robert: Untersuchungen über das Verhalten des Phosphorbronzedrahtes bei der Beanspruchung durch Zugkräfte. Dingler's Polytechnisches Journal 245, 64—75.

1. Hertz, Heinrich Rudolph: Ueber die Berührung fester elastischer Körper. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) 92, 156—171.

1. Müller, Ernst: Ueber bleibende und elastische Formänderungen der Rohseide. Civilingenieur 28, 631—640.

1883 1. Mallard, E., and H. Le Chatelier: Sur le dimorphisme de l'iodure d'argent. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 97, 102—105.

1. Tomlinson, Herbert: The influence of stress and strain on the action of physical forces. Phil. Trans. Roy. Soc. London 174, Part I, 1—172.

1. Tresca, Henri Édouard: Contribution à l'étude du poinçonnage et des proues dont il detérmine la formation. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 96, 816—822.

1885 1. Considère, Armand Gabriel: Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions. Annales des Ponts et Chaussées, Mémoire No. 34, sixième série, Tome 9, premier semester, Paris, Vve Ch. Dunod; pp. 574—775. (См. [1881, 1] немецкий перевод, ч. I.)

1886 1. Bauschinger, Johann: Über die Veränderung der Elasticitätsgrenze und des Festigkeit des Eisens und Stahls durch Strecken und Quetschen, durch Erwärmen und Abkühlen und durch oftmal wiederholte Beanspruchung. Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. polytechnischen Schule, München, Hefte 7—14 (1877—1886); Heft 13, SS. 1—115.

1. Pulfrich, Carl: Ueber die elastische Nachwirkung eines Kautschukschlauches und deren Einfluß auf die Constante μ. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 28, 87—107.
1. Tomlinson, Herbert: Internal Friction of Metals. Phil. Trans. Roy. Soc. London 177, Part II, 802—807.
1. Unwin, William Cawthorne: «On the change of the elastic limit and strengt of iron and steel, by drawing out, by heating and cooling, and by repetition of loading». (Перевод с немецкого резюме статьи, написанной Баушингером и опубликованной в Mitteilung aus dem Mechanisch-technischen Laboratorium der k. Hochschule in München, 1886, S. 1—115.) Proc. Inst. Civil Engrs 87, 463—465.
2. Unwin, William Cawthorne: The employment of autographic records in testing materials. J. Soc. Arts, 1885—1886, 34, 336—347.

1887 1. Kennedy, Alexander Blackie William: The use and equipment of engineering laboratories. Proc. Inst. Civil Engrs, session 1886—1887, 88, Part II, 1—80.
1. Tomlinson, Herbert: The effect of change of temperature in twisting or untwisting wires which have suffered permanent torsion. Phil. Mag. 24, No. 148, 253—256. (September 1887.)
2. Tomlinson, Herbert: Remarkable effect on raising iron under temporary stress or permanent strain to a bright-red heat. Phil. Mag. 24, No. 148, 257—267. (September 1887.)

1888 1. Hallock, William: The flow of solids: a Note. Am. J. Sci. 36, 59—60.

1889 1. Engesser, Friedrich: Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins, Hannover 35, 456—462.
1. Mallock, Arnulph: The physical properties of vulcanized India-rubber. Proc. Roy. Soc. London 46, 233—249.
1. Tomlinson, Herbert: The influence of stress and strain on the physical properties of matter. Part I. Elasticity (имеется продолжение). The effect of magnetisation on the elasticity and the internal friction of metals. Phil. Trans. Roy. Soc. London 179 A, 1—26. (См. также [1892, 1].)

1892 1. Tomlinson, Herbert: The influence of stress and strain on the physical properties of matter. Part III. Magnetic induction (continued). The internal friction of iron, nickel, and cobalt, studied by means of magnetic circles of very minute range. Phil. Trans. Roy. Soc., London 182A, 341—369.

1893 1. Todhunter, Isaac, and Karl Pearson: A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, Vol. II, Parts I and II (1893). Cambridge: University Press. (Том I был впервые опубликован в 1886 г.) Четвертое издание обоих томов осуществлено перепечаткой издания 1886, New York: Dover (1960).

1894 1. Merriman, Mansfield: The resistance of materials under impact. Proceedings of the American Association for the Advancement of Science 175—189 (August 1894).

1895 1. Dewar, Sir James: Note on the viscosity of solids. Proc. Chem. Soc. 10, 136—138.
1. Le Premier Siécle de l'Institut de France, 1795—1895, 2 Tome (auteur: la Comte de Franqueville) Paris.
1. (Re: Tresca) École Polytechnique, Livre Centenaire, Vol. 1: Histoire de l'Enseignement de l'École Polytechnique, pp. 206—209. Paris: Gauthier-Villars et Fils.

1897 1. Dunn, B: A photographic impact testing machine for measuring the varying intensity of an impulsive force. J. Franklin Inst. 144, No. 5, 321—348 (November 1897).
1. Mehmke, Rudolf: Zum Gesetz der elastischen Dehnungen. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 42, 327—338.
1. Thurston, Robert Henry: Singular stress-strain relations of India-rubber. Science 6, 758—760 (July—December 1897).

1898 1. Engesser, Friedrich: Widerstandsmomente und Kernfiguren bei beliebigem Formänderungsgesetz (Spannungsgesetz). Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 42, 903—907; 927—931.
1899 1. Ewing, James Alfred: The Strength of Materials. Cambridge University Press, England.
1900 1. Guest, James J.: On the strength of ductile materials under combined stress. Phil. Mag., fifth series 50, 69—132.
1901 1. Hopkinson, John: Original Papers of John Hopkinson, Vol. II: Scientific Papers, edited by B. Hopkinson, Cambridge, England.
1902 1. Tammann, Gustave Heinrich Johann Apollon: Ueber die Ausflußgeschwindigkeit krystallisierter Stoffe. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 7, 198—224.
1903 1. Perot, A.: Sur les efforts développés dans le choc d'eprouvettes entaillées. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 137, 1044—1046. (Juillet, Décembre 1903.)
1. Werigin, N.; J. Lewkojeff, and Gustave Tammann: Ueber die Ausflussgeschwindigkeit einiger Metalle. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 10, 647—654.
1904 1. Hatt, Kendrick: Tensile impact tests of metals. Proc. Am. Soc. Testing Materials 4, 282—315.
1. Mallock, Arnulph: On a direct method of measuring the coefficient of volume elasticity of metals. Proc. Roy. Soc. (London) 74, 50—52.
1. Obermayer, A. von: Versuche über den Ausfluß fester Körper, insbesondere des Eisens unter hohem Druck. Sitz. ber. Math.-Naturw. Kl. Kaiserl. Akad. Wiss., Wien 113, Abteilung IIa, 511—566.
1. Perot, A., et Henri Michel Lévy: Sur la fragilité des métaux. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 138, 474—476.
2. Perot, A., et Henri Michel Lévy: Sur la fragilité de certains aciers. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 139, 1198—1200.
1905 1. Hopkinson, Bertram: The effects of momentary stresses in metals. Proc. Roy. Soc. (London) 74, 498—506.
1906 1. Blind, August: Maß-, Münz- und Gewichtswesen. Leipzig: G. J. Göschen. (Это том 288 в серии книг, озаглавленных Sammlung Göschen.)
1. Grüneisen, Eduard August: Über das Verhalten des Gusseisens bei kleiner elastischer Dehnung. Deutsche Physikalische Gesellschaft 8, 469—477.
1907 1. Grüneisen, Eduard August: Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen. I. Der dynamisch und statisch gemessene Elastizitätsmodul. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 22, 801—851.
1. Leber, E.: Ueber den gegenwärtigen Stand der Schlagbiegeprobe mit eingekerbten Stäben. Stahl und Eisen 27, страницы 1121—1125, 1160—1164.
1. Schiller, Ludwig: Ueber die Poissonsche Konstante des Kautschuks. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 22, 204—208.
1908 1. Grüneisen, Eduard August: Torsionmodul, Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation und kubische Kompressibilität. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 25, 825—851.
1909 1. Bridgman, Percy Williams: The measurement of high hydrostatic pressure, I. A. Simple primary gauge. Proc. Am. Acad. Arts Sci. 44, 201—217. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. 1, pp. 1—17.)
2. Bridgman, Percy Williams: The measurement of high hydrostatic pressure, II. A secondary mercury resistance gauge. Proc. Am. Acad. Arts Sci. 44, 221—251. (Так же в Bridgman [1964, 1], Vol. 1, pp. 19—49.)
3. Bridgman, Percy Williams: An experimental determination of certain compressibilities. Proc. Am. Acad. Arts Sci. 44, 255—279. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. 1, pp. 51—75.)
1. Ludwik, Paul: Über den Einfluß der Deformationsgeschwindigkeit bei bleibenden Deformationen mit besonderer Berücksichtigung der Nachwirkungserscheinungen. Physikalische Zeitschrift 10, 411—417.

1. Poynting, J. Henry: On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 82, 546—559.

1. Rinne, Friedrich: Vergleichende Untersuchungen über die Methoden zur Bestimmung der Druckfestigkeit von Gesteinen. (Zweiter Bericht über von L. Prandtl, und F. Rinne durchgeführte Versuche.) Neues Jahrb. Mineral., Geol. Paläonthol. 2, 121—128.

1910 1. Grüneisen, Eduard August: Ueber die thermische Ausdehnung de Metalle. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 33, 33—64.

2. Grüneisen, Eduard August: Ueber den Einfluß von Temperatur und Druck auf Ausdehnungskoeffizient und spezifische Wärme der Metalle. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 33, 65—78.

3. Grüneisen, Eduard August: Einfluß der Temperatur auf die Kompressibilität der Metalle. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 33, 1239—1274.

1. Unwin, William Cawthorne: The Testing of Materials of Construction, 3rd edition, London: Longmans, Green & Co. (См. также [1886, 2].)

1911 1. Carpenter, Rolla C., and Herman Diederichs: Experimental Engineering and Manual for Testing. New York.

1. Kármán, Theodore von: Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 55, 1749—1757.

1912 1. Friedrich, W., P. Knipping und M. von Laue: Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen. («Theoretische Teil»—M. von Laue, SS. 303—311; «Experimentelle Teil» — Friedrich und Knipping, SS. 311—322.) Sitz. ber. math.-phys. Klasse der Bayer. Akad. Wiss. München. По существу эта статья опубликована также в Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 41, 971—1002 (1913).

1. Laue, M. von: Eine quantitative Prüfung der Theorie für die Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen. Sitz. ber. math.-phys. Klasse der. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, SS. 363—373. (См. также Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie, 41, 989—1002 (1913).)

1. Plank, Rudolph: Betrachtungen über dynamische Zugbeanspruchung. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 56, 17—24, 46—51.

1. Poynting, J. Henry: On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted, and on the pressure of distorsional waves in steel. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 86, 534—561.

1. Rosenhain, Walter, and S. L. Archbutt: Tenth Report to the Alloys Research Committee: On the alloys of aluminum and zinc. Proc. Inst. Mech. Engrs 313—315.

1913 1. Laue, M. von, and F. Tank: Die Gestalt der Interferenzpunkte bei den Röntgenstrahlinterferenzen. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 41, 1003—1011.

1914 1. Hopkinson, Bertram: A method of measuring the pressure produced in the detonation of explosives or by the impact of bullets. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 213, 437—456.

1. Seehase, H.: Die experimentelle Ermittlung des Verlaufes der Stoßkraft und die Bestimmung der Deformationsarbeit beim Stauchversuch. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Berlin 58, 1345—1348.

1915 1. Richards, Theodore William: Concerning the compressibilities of the elements, and their relations to other properties. J. Am. Chem. Soc. 37, No. 7, 1643—1657. (July—December 1915.)

1921 1. Carpenter, H.C.H., and Constance F. Elam: The production of single crystals of aluminium and their tensile properties Proc. Roy. Soc. (London) 100 A, 329—353.

1922 1. Körber, Friedrich, und Rudolf H. Sack: Vergleichende statische und dynamische Zugversuche. Mitteilungen des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Eisenforschung, 4, 11—29.

1. Whittemore, H. L.: Resume of impact testing of materials, with bibliography. Symposium on Impact Testing of Materials, American Society of Testing Materials 6—36.

1923 1. Bridgman, Percy Williams: The compressibility of thirty metals as a function of pressure and temperature. Proc. Am. Acad. Arts Sci. 58, 165—242. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. III, paper No. 45, pp. 1583—1660.)

1. Portevin, Albert, and François Le Chatelier: Sur un phénomène observé lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 176, 507—510.

1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram, and Constance F. Elam: The distortion of an aluminium crystal during a tensile test. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 102, 643—647. (См. также Taylor [1958, 1], Paper No. 5, pp. 63—84.)

1924 1. Richards, Theodore William: Compressibility, internal pressure and change of atomic volume. J. Franklin Inst. 198, 1—27 (July 1924).

1925 1. Bridgman, Percy Williams: Certain physical properties of single crystals of tungsten, antimony, bismuth, tellurium, cadmium, zinc, and tin. Proc. Am. Acad. Arts Sci. 60, 305—383. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. III, paper No. 58, pp. 1851—1929.)

1. Körber, Friedrich, and Hans Arnold Storp: Ueber den Kraftverlauf bei der Schlagpruefung. Mitt. Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung 7, 81—97.

1. Ludwik, Paul, and R. Scheu: Vergleichende Zug-, Druck-, Dreh- und Walzversuche. Stahl und Eisen 45, 373—381.

1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram, and Constance F. Elam: The plastic extension and fracture of aluminium crystals. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 108, 28—51. (См. также Taylor [1958, 1], paper No. 7, pp. 109—129.)

2. Taylor, Sir Geoffrey Ingram, and W. S. Farren: The heat developed during plastic extension of metals. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 107, 422—451. (См. также Taylor [1958, 1], paper No. 6, pp. 85—108.)

3. Taylor, Sir Geoffrey Ingram, and Constance F. Elam: Notes on the «Navier effect». Paper written for the Aeronautical Research Committee. (См. также Taylor [1958, 1], Vol. I, paper No. 8, pp. 130—132.)

1926 1. Elam, Constance F.: Tensile tests of large gold, silver and copper crystals. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 112, 289—296.

1. Lode, W.: Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. Z. Physik 36, 913—939.

1. Richards, Theodore William: A brief history of the investigations of internal pressures. Chem. Rev. 2, 315—348.

1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram, and Constance F. Elam: The distortion of iron crystals. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 112, 337—361. (См. также Taylor [1958, 1], paper No. 10, pp. 153—173. См. также Dohi [1960, 1].)

2. Taylor, Sir Geoffrey Ingram, and W. S. Farren: The distortion of crystals of aluminium under compression. Part I. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 111, 529—551. (См. также Taylor [1958, 1], paper No. 9, pp. 133—152.)

1927 1. Göler, V., and Georg Oskar Sachs: Das Verhalten von Aluminiumkrystallen bei Zugversuchen. I. Geometrische Grundlagen. Z. Physik 41, 103—115.

1. Karnop, R. von, and Georg Oskar Sachs: Das Verhalten von Aluminiumkrystallen bei Zugversuchen. II. Experimenteller Teil. Z. Physik 41, 116—134.

1. Love, Augustus Edward Hough: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4th edition. (Первое издание в 1892 г. См. также Dover, New York, перепечатано с 4-го издания.)

1. Sachs, Georg Oskar: См. Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen, Ergänzungsband 1, SS. 13—54.

1. Schmid, E.: Über die Schubverfestigung von Einkristallen bei plastischer Deformation. Z. Physik 40, 54—74.
1. Siebel, E., and A. Pomp; Die Ermittlung der Formänderungsfestigkeit von Metallen durch den Stauchversuch. Mittheilungen, Kaiser-Wilhelm-Inst. Eisenforsch. (Max-Plank-Inst.) 9, 157.
1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: The distortion of single crystals of metals. Proceedings of the 2nd International Congress for Applied Mechanics Zürich: Orell Füssli. (См. также Taylor [1958, 1], Vol. 1, paper No. 11, pp. 174—184.)
2. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: The distortion of crystals of aluminium under compression. Part II. Distortion of double slipping and changes in orientation of crystal axes during compression. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 116, 16—38. (См. также Taylor [1958, 1], Vol. 1, paper No. 12, pp. 185—204.)
3. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: The distortion of crystals of aluminium under compression. Part III. Measurements of stress. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 116, 39—60. (См. также Taylor [1958, 1], Vol. 1, paper No. 13, pp. 205—224.)

1928 1. Cajori, Florian: A History of Physics, New York: Dover Publications.
1. Kennelly, Arthur Edwin: Vestiges of Pre-Metric Weights and Measures Persisting in Metric-System Europe. New York: Macmillan Co.
1. Prandtl, Ludwig: Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. Z. Angew. Math. Mech. 8, 85—106.
1. Masima, M., und Georg Oskar Sachs: Mechanische Eigenschaften von Messingkristallen. Z. Physik 50, 161—186.

1930 1. Donnell, L. H.: Longitudinal wave transmission and impact. J. Appl. Mech., Transactions, American Society of Mechanical Engineers 52, No. 1, 153—167.
1. Guest, James J.: Effects of rapidly acting stress. Proc. Inst. Mech. Engrs 1273—1296.
1. Sachs, G., und J. Weerts: Zugversuche an Gold-Silberkristallen. Z. Physik 62, 473—493.

1931 1. Boas, W., und E. Schmid: Über die Temperaturabhängigkeit der Kristallplastizität: III. Aluminium. Z. Physik 71, 703—712.
1. Bridgman, Percy Williams: The Physics of High Pressure. New York: The Macmillan Co. (См. также: London: G. Bell & Sons, Ltd. (1949).)
1. Hanson, Daniel, and M. A. Wheeler: The deformation of metals under prolonged loading. Part I: The flow and fracture of aluminium. J. Inst. Metals, London 45, 229—264.
1. Tafel, Wilhelm, und E. Viehweger; Einfluß der Verformungsgeschwindigkeit auf den Formänderungswiderstand. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieurs 75, No. 49, 1479—1483. (December 1931.)
1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram, and H. Quinney: The plastic distortion of metals. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 230, 323—362. (См. также Taylor [1958, 1], paper No. 16, pp. 252—290.)

1932 1. Deutler, H.: Experimentelle Untersuchungen über die Abhängigkeit der Zugspannungen von der Verformungsgeschwindigkeit. Physikalische Zeitschrift 33, 247—259.
1. Thiele, Walter: Temperaturabhängigkeit der Plastizität und Zugfestigkeit von Steinsalzkristallen. Z. Physik 75, 763—776.

1933 1. Itihara, Mititosi: Impact torsion test. The Technology Reports of the Tôhoku Imperial University, Sendai, Japan 11, No. 1, 16—50.

1934 1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: The mechanism of plastic deformation of crystals. Part I: Theoretical. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 145, 362—387. (См. также Taylor [1958, 1], paper No. 21, pp. 344—366.)
2. Taylor, Sir Geoffrey Ingram, and H. Quinney: The latent energy remaining in a metal after cold working. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 143, 307—326. (См. также Taylor [1958, 1], paper No. 19, pp. 310—328).

3. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: The mechanism of plastic deformation of crystals. Part II. Comparison with observations. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 145, 388—404. (См. также Taylor [1958, 1], Vol. 1, paper No. 22, pp. 367—380.)
4. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: The strength of rock salt. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 145, 405—415. (См. также Taylor [1958, 1], Vol. 1, paper No. 23, pp. 381—389.)
5. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: A theory of the plasticity of crystals. Z. Kristallographie. Ser. A 89, 375—385. (См. также Taylor [1958, 1], Vol. I, paper No. 24, pp. 390—398.)

1935 1. Elam, Constance F.: Distortion of Metal Crystals. Oxford, England: Clarendon Press.
1. Itihara, Mititosi: Impact torsion test, No. 4, The Technology Reports of the Tôhoku Imperial University, Sendai, Japan 11.
1. Mann H.C.: The relation between the tension static and dynamic tests. Proc. Am. Soc. Testing Materials 35, Part II, 323—335.
1. Schmid, Erich, and W. Boas: Krystallplastizität. Berlin: J. Springer. (См. также [1950, 1].)

1936 1. Itihara, Mititosi: Impact torsion test, No. 5. The Technology Reports of the Tôhoku Imperial University, Sendai, Japan 12, No. 1.
1. Phillips, Albert J., and Albert Alonzo Smith, Jr.: Effect of time on tensile properties of hard-drawn copper wire. Proceedings of the Thirty-ninth Meeting of the American Society for Testing and Materials 36, Part. II, Technical Papers, 263—273.

1937 1. Ginns, D. W.; The mechanical properties of some metals and alloys broken at ultra high speeds. J. Inst. Metals 61, 61—71.
1. Murnaghan, Francis D.: Finite deformation of an elastic solid. Am. J. Math. 59, 235—260.
1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: The emission of the latent energy due to previous cold working when a metal is heated. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 163, 157—181. (См. также Taylor [1958, 1], paper No. 26, pp. 402—423.)
2. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: См. Ginns [1937, 1] и Taylor [1946, 1].

1938 1. Clark, Donald Sherman, and G. Datwyler: Stress-strain relations under tension impact loadings. American Society of Metals, Proceedings of the 41st Annual Meeting 38, Part II, 98—111.
1. Elam, Constance F.: The influence of rate of deformation on the tensile test with special reference to the yield point in iron and steel. Proc. Roy. Soc. (London) 165, 568—592.
1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: Plastic strain in metals. J. Inst. Metals 62, 307—324. (См. также Taylor, [1958, 1], paper No. 27, pp. 424—438.)
2. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: Analysis of plastic strain in a cubic crystal. Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume, pp. 218—224. New York: Macmillan. (См. также Taylor [1958, 1], paper No. 28, pp. 439—445.)

1939 1. Bridgman, Percy Williams: The high pressure behavior of miscellaneous minerals. Am. J. Sci. 237, 7—18. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 127, pp. 3363—3374.)

1940 1. Barrett, Charles S., and L. H. Levenson: The structure of aluminum after compression. Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers 137, 112—126.
1. Bridgman, Percy Williams: The linear compression of iron to 30 000 kg/cm². Proc. Am. Acad. Arts Sci. 74, 11—20. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 133, pp. 3401—3410.)
2. Bridgman, Percy Williams: The compression of 46 substances to 50 000 kg/cm². Proc. Am. Acad. Arts Sci. 74, 21—51. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 134, pp. 3411—3441.)
1. Manjoine, Michael Joseph, and Arpad Ludwig Nadai: High speed tension tests at elevated temperatures. Proc. Am. Soc. Testing Materials 40, 822—839.

1. Mooney, M.: A theory of large elastic deformation. J. Appl. Phys. 11, 582—592.

1941 1. Bridgman, Percy Williams: Compressions and polymorphic transitions of seventeen elements to 100 000 kg/cm². Phys. Rev. 60, 351—354. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 136, pp. 3453—3457.)

1. Brown, A.F.C., and N.D.G. Vincent: The relationship between stress and strain in the tensile impact test. Proc. Inst. Mech. Engrs (London) 145, 126—134.

1. Nadai, Arpad Ludwig, and Michael Joseph Manjoine: High speed tension tests at elevated temperatures, Parts II and III. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs 63, A-77—A-91.

1. Sutoki, Tomiya: On the serrated elongation in different metals. The Science Reports of the Tôhoku Imperial University, first ser. 29, 673—688.

1942 1. Bohnenblust, H. F., J. U. Charyk, and D. H. Hyers: Graphical solutions for problems of strain propagation in tension. U.S.A. National Defense Research Council Report A-131, OSRD No. 1204.

2. Bohnenblust, H.F.: Propagation of plastic waves. A comparison of Reports NRRC A-29 and R.C. 329. U.S.A. National Research Committee, Memorandum No. A-53, pages 1—4.

1. Bridgman, Percy Williams: Pressure-volume relations for seventeen elements to 100 000 kg/cm². Proc Am. Acad. Arts and Sci. 74, 425—440. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 139, pp. 3489—3504.) (См. также [1941, 1], [1948, 2].)

1. Dart, S.L., R. L. Anthony, and Eugene Guth: Rise of temperature on fast stretching of synthetics and natural rubbers. Industrial Engineering Chemistry, Industrial Edition 34, No. 11, 1340—1342.

1. Duwez, Pol. E., D.S. Wood, and D.S. Clark: The propagation of plastic strain in tension. U.S.A. National Defense Research Council, Progress Report, No. A-99, OSRD No. 931 (October 1942).

1. Kármán, Theodore von: On the propagation of plastic deformation in solids. U.S.A. National Defense Research Council, Report A-29 (February 1942).

2. Kármán, Theodore von, H. F. Bohnenblust, and D. H. Hyers: The propagation of plastic waves in tension specimens of finite length. Theory and methods of integration. U.S.A. National Defense Research Council, Report A-103, OSRD No. 946.

1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: The plastic wave in a wire extended by an impact load. British Ministry of Home Security, Civil Defense Research Committee Report, R.C. 329. (См. также Taylor [1958, 1], paper No. 32, pp. 467—479.)

1. White, M. P., and Le van Griffis: U.S.A. National Defense Research Council Progress Report No. A-7, OSRD No. 742. (См. также White and Griffis [1947, 1] и [1948, 1].)

1943 1. Bridgman, Percy Williams: Recent work in the field of high pressures. Am. Sci. 31, 1—35. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 140, pp. 3505—3539.)

1. Davis, Evan A.: Increase of stress with permanent strain and stress-strain relations in the plastic state for copper under combined stresses. J. Appl. Mech. 10, A-187 — A-196 (December 1943).

1. James, Hubert M., and Eugene Guth: Theory of the elastic properties of rubber. J. Chem. Phys. 11, No. 10, 455—481 (October 1943).

1945 1. Bridgman, Percy Williams: The compression of sixty-one solid substances to 25 000 kg/cm², determined by a new rapid method. Proc. Am. Acad. Arts and Sci. 76, 9—24. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 148, pp. 3609—3624.)

1. Davis, Evan A.: Yielding and fracture of medium-carbon steel under combined stress. J. Appl. Mech. (Transactions of the American Society of Mechanical Engineers 12, No. 1, A-13 — A-24 (March 1945).)

1. MacGregor, C. W., and J.C. Fisher: Tension tests at constant true strain rates. J. Appl. Mech. (Transactions of the American Society of Mechanical Engineers) 12, No. 4, A-217 — A-227 (December 1945).
1. Рахматуллин Х. А. О распространении волны разгрузки. ПММ, 1945, т. 9, вып. 1, стр. 91—100.

1946 1. Bridgman, Percy Williams: Recent work in the field of high pressures. Rev. Mod. Phys. 18, 1—93. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 151, pp. 3647—3739.)
2. Bridgman, Percy Williams: Nobel Prize lecture (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 164.)
1. Kármán, Theodore von, and Pol E. Duwez: The propagation of plastic deformation in solids. Paper presented at the Sixth International Congress for Applied Mechanics; Paris, France; September. (См. также Kármán [1950, 1].)
1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: The testing of materials at high rates of loading. J. Inst. Civil Engrs 26, 486—518. (См. также Taylor [1958, 1], paper No. 36, pp. 516—545.)

1947 1. Duwez, Pol E., and Donald S. Clark: An experimental study of the propagation of plastic deformation under conditions of longitudinal impact. Proc. Am. Soc. Testing and Materials 47, 502—532.
1. Hoppmann, William H., II: The velocity aspect of tension-impact testing. Proc. Am. Soc. Testing and Materials 47, 533—545.
1. Swift, H. W.: Length changes in metals under torsional overstrain. Engineering 163, 253.
1. White, M. P., and Le Van Griffis: The permanent strain in a uniform bar due to longitudinal impact. J. Appl. Mech. 14, A-337 — A-342 (December 1947). (См. также White 1942 Report.)

1948 1. Bridgman, Percy Williams: General survey of certain results in the field of high pressure physics. Nobel Lecture, delivered at Stockholm, December 11, 1946. Reprinted in the J. Wash. Acad. Sci. 38, 149—166 (May 1948). (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 164, pp. 3873—3890.)
2. Bridgman, Percy Williams: The compression of 39 substances to 100 000 kg/cm². Proc. Am. Acad. Arts Sci. 76, 55—70. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 160, pp. 3819—3834.)
1. Brown, A.F.C., and R. Edmonds: The dynamic yield strength of steel at an intermediate rate of loading. Inst. Mech. Engrs, Appl. Mech. Proc. 159 (War Emergency Issue No. 37), 11—16.
1. Clark, Donald S., and Pol E. Duwez: Discussion of the forces acting in tension impact tests of materials. J. Appl. Mech. 15, 243.
1. Davies R. M.: A critical study of the Hopkinson Pressure Bar. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 240, 375—457.
1. Davis, Evan A.: The effect of size and stored energy on fracture of tubular specimens. J. Appl. Mech. 15, No. 3, 216—221 (September 1948).
1. Habib, E. T.: A method of making high-speed compression tests on small copper cylinders. J. Appl. Mech. 15, No. 3, 248—255.
1. Warnock, F.V., and J. B. Brennan: The tensile yield strength of certain steels under suddenly applied loads. The Institution of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Proceedings 159 (War Emergency Issue No. 37), 1—10.
1. White, M.P., and Le van Griffis: The propagation of plasticity in uniaxial compression. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs 70, 256—260.

1949 1. Bridgman, Percy Williams: The Physics of High Pressure. London, G. Bell & Sons Ltd. (Это и более поздние издания содержат приложение, которого не было в первом издании 1931 года.) (Также переиздано в 1952 г., 1958 г.)
2. Bridgman, Percy Williams: Linear compression to 30 000 kg/cm², including relatively incompressible substances. Proc. Am. Acad. Arts Sci. 77, 189—234. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 168, pp. 3933—3978.)

1. Dorn, ohn E., A. Goldberg, and T. E. Tietz: The effect of thermal-mechanical history on the strain hardening of metals. Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers 180, Institute of Metals Division, 205—224.
1. Kolsky, Herbert: An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading. Proc. Phys. Soc. (London) B 62, 676—700.
1. McReynolds, Andrew Wetherbee: Plastic deformation waves in aluminum. Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers 185, 32—45 (January, 1949).
1. Muhlenbruch, Carl W.: Elastic and fracture toughness studies of a stainless steel. Proc. Am. Soc. Testing and Materials 49, 738—753.
1. Rivlin, Ronald S.: Large elastic deformations of isotropic materials. Phil. Trans. Roy. Soc. London., Ser. A 242, 173—195.
1. Warnock, F.V., and D.B.C. Taylor: The yield phenomena of a medium carbon steel under dynamic loading. Applied Mechanics, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 161, 165—175.

1950 1. Clark, Donald S., and D.S. Wood: The tensile impact properties of some metals and alloys. Trans. Am. Soc. Metals 62, 45—74. (См. также Clark and Duwez [1948, 1].)
1. Hill, Rodney: The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, England; Clarendon Press, Oxford Engineering Series. (Имеется перевод (под ред. Э. И. Григолюка) на русский язык: Р. Хилл. Математическая теория пластичности. Гостехиздат, 1956.)
1. Kármán., Theodore von, and Pol E. Duwez: The propagation of plastic deformation in solids. J. Appl. Phys. 21, 987—994 (October 1950). (Фактически то же содержание в [1946, 1].)
1. Nadai, Arpad Ludwig: Theory of Flow and Fracture of Solids, Vol. 1, revised edition. New York: McGraw Hill Engineering Societies Monographs. (Имеется перевод (под ред. Г. С. Шапиро) на русский язык: А. Надаи. Пластичность и разрушение твердых тел, ИЛ, М., 1954.)
1. Schmid, Erich, and W. Boas: Plasticity of Crytsals. (Английский перевод (London F.A. Hughes and Co., Ltd) тома, который был опубликован в Германии в 1935 г.)

1951 1. Andrade, Edward Neville da Costa, and C. Henderson: The mechanical behaviour of single crystals of certain face-centred cubic metals. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 244, A 880, 177—202 (December 1951).
1. Bell, James Frederick: Propagation of plastic waves in pre-stressed bars. Technical Report No. 5, U.S. Naval Contract. The Johns Hopkins University (June 1951).
1. Bishop, J.F.W., and Rodney Hill: A theoretical derivation of the plastic properties of polycrystalline face-centred metals. Phil. Mag. 42, 1298—1307.
2. Bishop, J.F.W., and Rodney Hill: A theory of plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. Phil. Mag. 42, 414—427.
1. Budiansky, Bernard, Norris F. Dow, Roger W. Peters, and Roland P. Shepherd: Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity. Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics, held at Illinois Institute of Technology, Chicago, Illinois, June 11—16, 1951; pp. 503—512.
1. Campbell, William R.: Determination of dynamic stres-strain curves from strain waves in long bars. U.S. Nat. Bur. Std. Rep. No. 1017 (NBS Project 0604—31—0614), pp. 1—12, plus 14 figures (May, 1951).
1. Malvern, Lawrence E.: The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain rate effect. J. Appl. Mech. 18, 203—208.

1. Rivlin, Ronald S., and D.W. Saunders: Large elastic deforma tions of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, No. 865, 243, 251—288 (April 1951). (См. также Rivlin [1949, 1].)

1952 1. Barrett, Charles, S.: Structure of Metals: Crystallographic Methods, Principles and Data, second edition. New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Co., Inc.

1. Bridgman, Percy Williams: Studies in Large Plastic Flow and Fracture. (Metallurgy and Metallurgical Engineering Series.) New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Co.

1. Campbell, William R.: Determination of dynamic stress-strain curves from strain waves in long bars. Proc. Soc. Exp. Stress Anal. 10, No. 1, 113—124.

1. Gent, A. N., and Ronald S. Rivlin: Experiments on the mechanics of rubber. I: Eversion of a tube. Proc. Phys. Soc. (London), Ser. B 65, 118—121.

2. Gent, A. N., and Ronald S. Rivlin: Experiments on the mechanics of rubber. II: The torsion, inflation and extension of a tube. Proc. Phys. Soc. (London), Ser. B 65, 487—501.

3. Gent, A.N., and Ronald S. Rivlin: Experiments on the mechanics of rubber. III: Small torsions of stretched prisms. Proc. Phys. Soc. (London), Ser. B 65, 645—648.

1. Greenough, G.B.: Quantitative X-ray diffraction observations on strained metal agrregates. Progr. Metal Phys. 3, 176—219.

1. Lücke, Kurt, and Hansheinz Lang: Über die Form der Verfestigungskurve von Reinstaluminiumkristallen und die Bildung von Deformationsbändern. Z. Metallk. 43, 55—66.

1. Mott, Sir Neville F.: A theory of work-hardening of metal crystals. Phil. Mag., seventh series 43, 1151—1178.

1. Truesdell, Clifford Ambrose: The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. J. Rational Mech. Anal. 1, 125—300. Corrections and Additions, *ibid.* 2, 595—616 (1953) and 3, 801 (1954). Откорректированное переиздание с предисловием и примечаниями, Continuum Mechanics, Part I Internat. Sci. Review Ser. New York—London—Paris: Gordon & Breach (1966).

1953 1. Bianchi, Giovanni: On the propagation of longitudinal strain pulses in a bar prestressed into plastic region. Master's essay, Cornell University, Ithaca, New York (September 1953).

1. Campbell, J.D.: An investigation of the plastic behavior of metal rods subjected to longitudinal impact. J. Mech. Phys. Solids 1, 113—123.

1. Carreker, R. P. Jr., and W. R. Hibbard: Tensile deformation of high purity copper as a function of temperature, strain rate and grain size. Acta Met. 1, 654—663 (November 1953).

1. Cottrell, A.H.: A note on the Portevin—Le Chatelier effect. Phil. Mag., seventh series 44, No. 335, 829—832 (August 1953).

1. Houwink, R.: Elasticity, Plasticity and Structure of Matter, second edition. Washington, D.C.: Harren Press.

1. Johnson, J.E., D.S. Wood, and D.S. Clark: Dynamic stress-strain relations for annealed 2S aluminum under compression impact. J. Appl. Mech. 20, No. 4, 523—529.

1. Krupnik N., and Hugh Ford: The stepped stress/strain curve of some aluminum alloys. J. Inst. Metals 81, 601—615.

1. Lee, E.H.: A boundary value problem in the theory of plastic wave propagation. Quart. Appl. Math. 10, No. 4, 335—346.

1. Phillips, V.A., A.J. Swain, and R. Eborall: Yield-point phenomena and stretcher-strain markings in aluminum-magnesium alloys. J. Inst. Metals 81, 625—647.

1. Rivlin, Ronald S.: The solution of problems in second order elasticity

theory. J. Rational Mech. Anal. 2, 53—81. Перепеч тано в Problems of Non-Linear Elasticity. Int'l Sci. Rev. Ser. New Yor : Gordon & Breach (1965).

1. Rubin, R.J.: Some problems connected with propagation of stresses above the yield stress in a material exhibiting strain-rate effect. Proceedings, First Midwestern Conference on Solid Mechanics, University of Illinois. pp. 133—135.
1. Sternglass, E.J. and D.A. Stuart: An experimental study of the propagation of transient longitudinal deformations in elastoplastic media. J. Appl. Mech. 20, 427—434.

1954 1. Batemman, Catherine M.: Residual lattice strains in plastically deformed aluminum, Acta Met. 2, 451—455 (May 1954).
1. Boas, W., and G. J. Ogilvie: The plastic deformation of a crystal in a polycrystalline aggregate. Acta Met. 2, No. 5, 655—659.
1. Clark, Donald S.: The behavior of metals under dynamic loading. (1953 Edward de Mille Campbell Memorial Lecture.) Trans. Am. Soc. Metals 46, 34—62.
1. Hundy, B. B., and A. P. Green: A determination of plastic stress-strain relations. J. Mech. Phys. Solids, 3, 16—21 (October 1954).
1. Naghdi, Paul M., and J. C. Rowles: An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity. J. Mech. Phys. Solids 3, 63—80.
1. Rubin, R.J.: Propagation of longitudinal deformation waves in a pre-stressed rod of material exhibiting a strain rate effect. J. Appl. Phys. 25, No. 4, 528—536.

1955 1. Blewitt, T. H., R. R. Coltman, and J.K. Redman: Defects in Crystalline Solids. London: The Physical Society (1955).
1. Davis, Evan A.: Combined tension-torsion tests with fixed principal directions. J. Appl. Mech. 22, No. 3, 411—415 (September 1955). (См. также Davis and Connelly [1959, 1].)

1956 1. American Society for Testing Materials, 58th Annual Meeting, Atlantic City, New Jersey, U.S.A., June 27, 1955: Symposium on Impact Testing, ASTM Special Technical Publication No. 176.
1. Alter, B.E.K., and C. W. Curtis: Effect of strain rate on the propagation of a plastic strain pulse along a lead bar. J. Appl. Phys. 27, No. 9, 1079—1085.
1. Baron, H.G.: Stress/strain curves of some metals and alloys at low temperatures and high rates of strain. J. Iron Steel Inst. (London) 182, 354—365.
1. Bell, James Frederick: Determination of dynamic plastic strain through the use of diffraction gratings. J. Appl. Phys. 27, No. 10, 1109—1113.
2. Bell, James Frederick: 10 000 threads to the inch. American Machinist 100, No. 16, 112—113.
3. Bell, James Frederick: Plastic wave propagation in rods subjected to longitudinal impact. U.S. Armi Ballistics Research Laboratory Technical Report No. 4. The Johns Hopkins University.
1. Diehl, Jörg: Zugverformung von Kupfer-Einkristallen I. Verfestigungskurven und Oberflächenerscheinungen. Z. Metallk. 47, 331—343.
1. Driscoll, David E.: Reproducibility of Charpy Impact Test. American Society for Testing Materials, Special Technical Publication No. 176, 70—75.
1. Kelly, Anthony: The mechanism of work softening in aluminium. Phil. Mag., 8th series, 1, 835—845.
1. Suzuki, Hideji, Susmu Ikeda, and Sakae Takeuchi: Deformation of thin copper crystals. J. Phys. Soc. Japan, 11, No. 4, 382—393.
1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: Strains in crystalline aggregates. Proceedings of the Colloqium on Deformation and Flow of Solids (Madrid, 1955), pp. 3—12. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer. (См. также Taylor [1958, 1], Vol. I, paper No. 41, pp. 586—593.)

1957 1. Bianchi, Giovanni: La propagazione di onde d'urto in regime plastico. Представлено на Symposium su la Plasticità nella Scienza della Construzioni, Varenna, Italia. Издано Politecnico di Milano, 22.
1. Berner, Rolf: См. Seeger [1958, 1], S. 53.
1. Carreker, R.P., Jr.: Tensile deformation of silver as a function of temperature, strain rate, and grain size. J. Metals 9, 112—115 (January 1957).
2. Carreker, R.P., Jr., and W.R. Hibbard, Jr.: Tensile deformation of aluminum as a function of temperature, strain rate, and grain size. Trans. AIME, I. Metals 1157—1163 (October 1957). (См. также Hosford, и др. [1960, 1].)
1. Noggle, T.S., and J.S. Koehler: Electron microscopy of aluminum crystals deformed at various temperatures. J. Appl. Phys. 28, No. 1, 53—55 (January, 1957).
1. Phillips, Aris: An experimental investigation on plastic stress-strain relations. IX Congrès International de Mécanique Appliquée 8, 23—33. Université de Bruxelles.
1. Ramberg, R. Walter, and L.K. Irwin: A pulse method for determining dynamic stress-strain relations. Proceedings, Ninth International Congress of Applied Mechanics, Brussels; pp. 480—489.
1. Seeger, A., Jörg Diehl, S. Mader, and H. Rebstock: Work-hardening and work-softening of face-centred cubic metal crystals. Phil. Mag., 2, 323—350.
1958 1. Bell, James Frederick: Normal incidence in the determination of large strain through the use of diffraction gratings. Proceedings of the Third U.S. National Congress of Applied Mechanics, Brown University, Providence, Rhode Island, pp. 489—493.
1. Seeger. Alfred von: Kristallplastizität. В книге: Handbuch der Physik, Vol. VII/2, Kristallphysik II, SS. 1—210. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer.
1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: The Scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor, Vol. I: Mechanics of Solids, edited by George K. Batchelor, at the University Press, Cambridge, England.
1. Treloar, L.R.G.: The Physics of Rubber Elasticity, Second edition. Oxford: Clarendon Press. (Имеется перевод этой книги на русский язык, изданный издательством «Иностранная литература» в 1953 г. под названием «Физика упругости каучука».)
1959 1. Conn, Andrew F.: Plastic waves in cylindrical magnesium rods. Master's essay. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
1. Davis, Evan A., and F.M. Connelly: Stress distribution and plastic deformation in rotating cylinders of strain-hardening material. Trans. A.S.M.E., J. Appl. Mech. 26, No. 1, 25—30 (March, 1959).
1. Hockett, J.E.: Compression testing at constant true strain rates. Proc. Am. Soc. Testing Materials 59, 1309—1317.
1960 1. Bell, James Frederick: Diffraction grating strain gauge. Proc. Soc. Exp. Stress Anal. 17, No. 2, 51—64.
2. Bell, James Frederick: Propagation of large amplitude waves in annealed aluminum. J. Appl. Phys. 31, No. 2, 277—282.
3. Bell, James Frederick, Study of initial conditions in constant velocity impact. J. Appl. Phys. 31, No. 12, 2188—2195.
4. Bell, James Frederick: The initial development of an elastic strain pulse propagating in a semi-infinite bar. U.S. Army Ballistics Research Laboratory Technical Report No. 6, The Johns Hopkins University (November 1960).
5. Bell, James Frederick: An experimental development of the applicability of the strain rate independent theory for plastic wave propagation in annealed aluminum, copper, magnesium, and lead. Technical Report No. 5. U.S. Army, OOR Contrast No. D-36-034-ORD 2366, The Johns Hopkins University.

6. Bell, James Frederick: Discussion—Proceedings of the Second Symposium on Naval Structural Mechanics. New York: Pergamon Press, p. 485.
1. Berner, Rolf: Die Temperatur und Geschwindigkeitsabhängigkeit der Verfestigung kubisch-flächenzentrierter Metalleinkristalle. Z. Naturforsch. A 15, 689—706.
1. Bianchi, Giovanni: Il progetto di una attrezzatura per prove d'urto. Ingegneria Meccanica 9, No. 11, 3—11 (ноябрь, 1960).
2. Bianchi, Giovanni: Il comportamento elasto-viscoso dei metalli sollecitati dinamicamente al di sopra del limite di elasticità. Rend. Ist. Lombardo, Accad. Sci. Lettere, A 94, 511—526.
1. Dohi, Shoso: Tensile straining and deformation bands of single crystal of pure iron, J. Sci., Hiroshima University, Ser. A 24, No. 1, 97—106 (July 1960).
1. Gillich, William J.: The response of bonded wire resistance strain gauges to large amplitude waves in annealed aluminum. Master's essay. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland. (См. также Bell [1960, 6].)
1. Hosford, W.F., R. L. Fleischer, and W. A. Backofen: Tensile deformation of aluminum single crystals at low temperatures. Acta Met. 8, 187—199.
1. Lee, E.H.; The theory of wave propagation in anelastic materials. International Symposium on Stress Wave Propagation in Materials, edited by Norman Davids, pp. 199—228. London.
1. Lensky, V.S.: Analysis of plastic behavior o metals under complex loading. Proceedings of the Second Symposium on Naval Structural Mechanics, held at Brown University, April 5—7, 1960, pp. 259—278. (Примерно в это же время В. С. Ленский в составе коллектива ученых запроектировал и осуществил машину для исследования пластического деформирования при сложном нагружении. См.: Богатырев И. С., Ильюшин А. А., Ленский В. С., Панферов В. М. Машина СН для исследования пластического деформирования металлов при сложном нагружении. 14 фиг.; библиогр. 4 назв. Инженерный журнал 1961, т. I, вып. 2, стр. 182—193. Изд-во АН СССР; — *А. Ф.*)
1. Papirno, Ralph, and George Gerard: Dynamic stress-strain phenomena and plastic wave propagation in metals. American Society for Metals, 42nd Annual Convention, Philadelphia, Pennsylvania, Proceedings, pp. 381—406.
1. Phillips, Aris: Pointed vertices in plasticity. Proceedings of the Second Symposium on Naval Structural Mechanics, held at Brown University, April 5—7, 1960, pp. 202—214.
1. Rivlin, Ronald S.: Some topics in finite elasticity. Proceedings, First Symposium, Naval Structural Mechanics, Stanford University; Oxford: Pargamon, pp. 169—198.
1. Truesdell, Clifford Ambrose: The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638—1788; Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia, Vol. X et XI, Seriei Secundae. Zürich: Orell Füssli.
1. Werner, W. Meade: The applicability of the strain rate independent theory of plastic wave propagation in annealed copper. Master's essay. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

1961 1. Bell, James Frederick: Experimental study of the interrelation between the theory of dislocations in polycrystalline media and finite amplitude wave propagation in solids. J. Appl. Phys. 32, No. 10, 1982—1993.
2. Bell, James Frederick: Discussion. Response of Metals to High Velocity Deformation, Proceedings, 1960 Conference of Metallurgical Societies, Vol. 9, pp. 112—113.
3. Bell, James Frederick: An experimental study of the unloading phenomenon in constant velocity impact. J. Mech. Phys. Solids 9, 1—15.
4. Bell, James Frederick: Further experimental study of the unloading phenomenon in constant velocity impact. J. Mech. Phys. Solids 9, 261—278.

1. Filbey, Gordon Luther: Intense plastic waves. Ph. D. dissertation, The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
1. Fowles, G.R.: Shock wave compression of hardened and annealed 2024 aluminum. J. Appl. Phys. 32, No. 8, 1475—1487 (August 1961).
1. Hauser, F.E., J. A. Simmons, and J. E. Dorn: Strain rate effects in plastic wave propagation. Response of Metals to High Velocity Deformation, Proceedings, of July 1960, Conference of Metallurgical Societies, Vol. 9, pp. 93—114. (См. Bell [1961, 2]).
1. Heinrichs, Joseph A.: An experimental study of 0,483 inch diameter aluminum bars under constant velocity impact. Master's essay. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
1. Phillips, Aris, and G. A. Gray: Experimental investigation of corners of the yield surface. Trans. A.S.M.E., Ser. D, J. Basic Engineering 83, 275—288 (June 1961).
1. Sperrazza, Joseph: Propagation of large amplitude waves in pure lead. Dr. Eng. dissertation. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
1. Truesdell, Clifford Ambrose: General and exact theory of waves in finite elastic strain. Arch. Rational Mech. Anal. 8, No. 3, 263—352. (Откорректированная перепечатка в Continuum Mechanics, Part IV, Problems of Non-linear Elasticity; Internat. Sci. Review Ser. New York—London—Paris: Gordon & Breach 1965. См. также Wave Propagation in Dissipative Materials. New York: Springer, 1965).

1962 1. Bell, James Frederick: Experiments on large amplitude waves in finite elastic strain. Proceedings, IUTAM Symposium on Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity, and Fluid Dynamics, Haifa, Israel, pp. 173—186. Oxford—Paris—New York: Pergamon Press. (Труды опубликованы в 1964.)
2. Bell, James Frederick: Impact strength. Encyclopedic Dictionary of Physics, 3, p. 799. Pergamon Press.
3. Bell, James Frederick: Impact testing. Encyclopedic Dictionary of Physics, 3, p. 780. Pergamon Press.
4. Bell, James Frederick: Experimental study of dynamic plasticity at elevated temperatures. Exp. Mech. 2, No. 1, 1—6 (June, 1962).
5. Bell, James Frederick, and W. Meade Werner: Applicability of the Taylor theory of the polycrystalline aggregate to finite amplitude wave propagation in annealed copper. J. Appl. Phys. 33, No. 8, 2416—2425.
6. Bell, James Frederick, and John H. Suckling: The dynamic overstress and the hydrodynamic transition velocity in the symmetrical free-flight plastic impact of annealed aluminum. Proceedings, 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics, pp. 877—883.
7. Bell, James Frederick, and Albert Stein: The incremental loading wave in the pre-stressed plastic field. J. de Mécanique 1, No. 4, 395—412.
1. Brown, Norman, and R. A. Ekvall: Temperature dependence of the yield points in iron. Acta Met. 10, 1101—1107.
1. Dillon, Oscar W., Jr.: An experimental study of the heat generated during torsional oscillations. J. Mech. Phys. Solids 10, 235—244.
2. Dillon, Oscar W., Jr.: Temperature generated in aluminum rods undergoing torsional oscillations. J. Appl. Phys. 33, No. 10, 3100—3105 (October 1962).
1. Foux, Amnon: An experimental investigation of the Poynting effect, 1. Determination of changes in length. Proceedings, International Symposium on Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity, and Fluid Dynamics, Haifa, Israel, pp. 228—251 (April 1962). (Oxford—Paris—New York: Pergamon Press 1964.)

1. Kolsky, Herbert, and L. S. Douch: Experimental studies in plastic wave propagation. J. Mech. Phys. Solids 10, 195—223.
1. Lempriere, B.M.: Oscillations in tensile tests. Intern. J. Mech. Sci. 4, 171—184.
1. Rosenthal, D., and W. B. Grupen: Second order effect in crystal plasticity: Deformation of surface layers in face centred cubic aggregates. I.U.T.A.M. International Symposium on Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity, and Fluid Dynamics, Haifa, Israel, pp. 391—415 (April, 1962). (Oxford—Paris—New York: Pergamon Press 1964.)
1. Sperrazza, Joseph: Propagation of large amplitude waves in pure lead. Proceedings, 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics 2, 1123—1129.
1. Stein, Albert: An experimental study of incremental plastic wave propagation. Master's essay. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
1. Thornton, P. R., T. E. Mitchell, and P. B. Hirsch: The strain-rate dependence of the flow stress of copper single crystals. Phil. Mag., 7, 337—358. (См. также Mitchell and Thornton [1963, 1].)

1963 1. Bell, James Frederick: Single temperature-dependent stress-strain law for the dynamic plastic deformation of annealed face-centered cubic metals. J. Appl. Phys. 34, No. 1, 134—141 (January 1963).
2. Bell, James Frederick: The initiation of finite amplitude waves in annealed metals. Proceedings, I.U.T.A.M. Symposium on Stress Waves in Anelastic Solids, Brown University, Providence, Rhode Island, pp. 166—182. (Berlin—Göttingen—Heidelber : Springer 1964.)
1. Bianchi, Giovanni: Some experimental and theoretical studies on the propagation of longitudinal plastic waves in a strain-rate-dependent material. Stress Waves in Anelastic Solids; IUTAM Symposium held at Brown University, Providence, Rhode Island, April 3—5, 1963, pp. 101—117. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer 1964.
1. Bridgman, Percy Williams: General outlook in the field of high-pressure research. Solids under Pressure, edited by William Paul and Douglas M. Warschauer, pp. 1—13. New York: McGraw-Hill.
1. Chiddister, J.L., and Lawrence E. Malvern: Compression-impact testing of aluminum at elevated temperatures. Exptl. Mech. 3, 81—90.
1. Davies, E.D.H., and Stephen C. Hunter: The dynamic compression testing of solids by the method of the Split Hopkinson Pressure Bar. J. Mech. Phys. Solids 11, 155—179.
1. Dillon, Oscar W.: Experimental data on aluminum as a mechanically unstable solid. J. Mech. Phys. Solids 11, 289—304.
1. Kingman, Priscilla W., Robert E. Green, and Robert Barrett Pond: Reaction of fine metal wires to imposed loads. U.S. Army Terminal Report, Ballistics Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Maryland. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
1. Mitchell, T. E., and P. R. Thornton: The work-hardening characteristics of Cu and α-brass single crystals between 4,2 and 500°K. Phil. Mag. 8, 1127—1159.
1. Paul, William, and Douglas M. Warschauer, editors: Solids under Pressure. New York—San Francisco—Toronto—London: McGraw-Hill Book Co. Inc.
1. Ripperger, Eugene Ashton, and L. M. Yeakley: Measurement of particle velocities associated with waves propagating in bars. Exptl. Mech. 3, 47—56.
1. Tardif, H.P., and H. Marquis: Some dynamic properties of plastics. Can. Aeronautics and Space J. 205—213 (September 1963).

1964 1. Bell, James Frederick: A generalized large deformation behaviour for face-centred cubic solids-high purity copper. Phil. Mag. 10, No. 103, 107—126.

2. Bell, James Frederick: Theory vs. experiment for finite amplitude stress waves. Symposium, Society for Engineering Science (November 1964). (См.: Bell [1967, 4].)
1. Bridgman, Percy Williams: Collected Experimental Papers of P. W. Bridgman. Vols I to VII. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
1. Conn, Andrew: On impact testing for dynamic properties of metals. Ph. D. dissertation, The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
1. Dillon, Oscar W.: The responce of pre-stressed aluminum. Intern. J. Engr. Sci. 2, 327—339.
1. Efron, L.: Longitudinal plastic wave propagation in annealed aluminum bars. Ph. D. dissertation, Michigan State University, East Lansing, Michigan.
1. Gillich, William J.: Plastic wave propagation in high purity single crystals of aluminum. Ph. D. dissertation. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
1. Lindholm, Ulric S.: Some experiments with the split Hopkinson pressure bar. J. Mech. Phys. Solids 12, 317—335.

1965 1. Bell, James Frederick: The dynamic plasticity of metals at high strain rates: An experimental generalization. Behavior of Materials under Dynamic Loading. American Society of Mechanical Engineers, Colloquium, pp. 19—41. (См. также Bell [1964, 1], [1967, 4].)
2. Bell, James Frederick: Generalized large deformation behaviour for face-centred cubic solids: Nickel, aluminum, gold, silver, and lead. Phil. Mag. 11, No. 114, 1135—1156.
1. Conn, Andrew F.: On the use of thin wafers to study dynamic properties of metals. J. Mech. Phys. Solids 13, 311—327.
1. Filbey, Gordon Luther: Longitudinal plastic deformation waves in bars. Proceedings, Princeton University Conference on Solid Mechanics, pp. 111—126.
1. Lindholm, Ulric S., and L. M. Yeakley: Dynamic deformation of single and polycrystalline aluminum. J. Mech. Phys. Solids 13, 41—53.
1. Malvern, Lawrence E.: Experimental studies of strain-rate effects and plastic wave propagation in annealed aluminum. Behavior of Materials under Dynamic Loading. American Society of Mechanical Engineers, Colloquium, pp. 81—92.
1. Sierakowski, R. L., and Aris Phillips: On the concept of the yield surface. Acta Mech. 1, No. 1, 29—35.
1. Truesdell, Clifford Ambrose, and Walter Noll: The non-linear field theories of mechanics. В книге Handbuch der Physik, Vol. III/3, pp. 1—602. Berlin—Heidelberg—New York: Springer.

1966 1. Baker, W.E., and C. H. Yew: Strain-rate effects in the propagation of torsional plastic waves. J. Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs 33, No. 4, 917—923 (December 1966).
1. Bell, James Frederick: An experimental diffraction grating study of the quasistatic hypothesis of the Split Hopkinson Bar Experiment. J. Mech. Phys. Solids 14, 309—327.
2. Bell, James Frederick: The relevance of dynamic finite distortion research to high energy rate forming processes. Proceedings, International Symposium on High Energy Rate Forming, Prague, pp. 1—12.
1. Dillon, Oscar W., Jr.: Waves in bars of mechanically unstable materials. J. Appl. Mech. 33, 267—274. (См. также [1967, 1].)
2. Dillon, Oscar W., Jr.: The heat generated during torsional oscillations of copper tubes. Intern. J. Solids and Structures 2, 181—204.
1. Fitzgerald, Edwin R.: Particle Waves and Deformation in Crystalline Solids. New York—London—Sydney: Interscience Publishers.

1. Kenig, M.J., and Oscar W. Dillon, Jr.: Shock waves produced by small stress increments in annealed aluminum. J. Appl. Mech. 33, 907—916.

1. Sharpe, William N.: The Portevin—Le Chatelier effect in aluminum single crystals and polycrystals. Ph. D. dissertation. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

2. Sharpe, William N.: The Portevin—Le Chatelier effect in aluminum single crystals and polycrystals. J. Mech. Phys. Solids 14, 187—202.

1967 1. Basinski, Z.S., and S. Saimoto: Resistivity of deformed crystals. Can. J. Phys. 45, 1161—1176.

1. Bell, James Frederick: On the direct measurement of very large strain at high strain rates. Exptl. Mech. 7, No. 1, 1—8 (January 1967). (Работа была доложена на заседании общества по экспериментальным методам определения напряжений (the Society for Experimental Stress Analysis) в 1965.)

2. Bell, James Frederick: An experimental study of instability phenomena in the initiation of plastic waves in long rods. Proceedings, Symposium on the Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, San Antonio, Texas, September 1967, pp. 10—20. New York: Springer. (Труды опубликованы в 1969 г.)

3. Bell, James Frederick, and Robert E. Green, Jr.: An experimentas study of the double slip deformation hypothesis for face-centred cubic single crystals. Phil. Mag. 15, 469—476.

4. Bell, James Frederick: Theory vs. experiment for finite amplitude stresl waves. Presented at the Society for Engineering Science Symposium (1964), Recent Advances in Engineering Science, pp. 565—592. New York: Gordon & Breach Science Publishers, Inc.

1. Bodner, S. R., and A. Rosen: Discontinuous yielding of commercially-pure aluminum. J. Mech. Phys. Solids 15, 63—77.

1. Calvert, Monte A.: The Mechanical Engineer in America, 1830—1910. The Johns Horkins Press.

1. Dillon, Oskar W., Jr.: The dynamic elastic-plastic interface and related topics. J. Mech. Phys. Solids 15, 341—358.

2. Dillon, Oscar W., Jr.: Plastic deformation waves and heat generated near the yield point of annealed aluminum. Proceedings, Symposium on the Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, San Antonio, Texas, September, 1967, pp. 21—60. New York: Springer.

1. Gillich, William J.: Propagation of finite amplitude waves in single crystals of high-purity aluminium. Phil. Mag. 15, No. 136, 659—671.

1. Hartman, William Francis: The applicability of the generalized parabolic deformation law to a binary alloy. Ph.D. dissertation. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

1. Lindholm, Ulric S., and L. M. Yeakley: A dynamic biaxial testing machine. Exptl. Mech. 7, No. 1, 1—7.

1. Schultz, A. B., P. A. Tuschak, and A. A. Vicario: Experimental evaluation of material behavior in a wire under transverse impact. J. Appl. Mech.; Transactions, A.S.M.E. 34, No. 2, Series E, 392—396 (June 1967).

1. Smith, Jack C., and Carl A. Fenstermaker: Strain-wave propagation in strips of natural rubber subjected to high-velocity transverse impact. J. Appl. Phys. 38, No. 11, 4218—4224 (October 1967).

1. Troisième Centenaire de l'Academie des Sciences. 1666—1966. 2 Vols, Paris: Cauthier-Villars.

1968 1. Bell, James Frederick: The Physics of Large Deformation of Crystalline Solids. Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 14. Berlin—Heidelberg—New York: Springer.

2. Bell, James Frederick: Large deformation dynamic plasticity at an elastic-plastic interface. J. Mech. Phys. Solids 16, 295—313.

1. Convery, E., and H.Ll.D. Pugh: Velocity of torsional waves in metals stressed statically into the plastic range. J. Mech. Engr. Sci. 10, No. 2, 153—164.

1. Dawson, Thomas H.: The plastic deformation of crystalline aggregates. Ph. D. dissertation. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

1. Gillich, William J., and William O. Ewing: Measurement of particle velocities associated with plastic waves propagating in bars. U.S. Army Aberdeen Research and Development Center, Ballistics Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Maryland; Report No. BRL-R-1405, pp. 1—46 (June 1968).

1. Phillips, Aris: Yield surfaces of pure aluminum at elevated temperatures. Proceedings of the IUTAM Symposium, East Kilbride, June 25—28, 1968; pp. 241—258.

1. Schultz, A. B.: Material behavior in wires of 1100 aluminum subjected to transverse impact. J. Appl. Mech. Transactions of the A.S.M.E. 35, No. 2, 342—348 (June 1968). (См. также Schultz [1969, 1].)

1. Sierakowski, R. L., and Aris Phillips: The effects of repeated loading on the yield surface. Acta Mech. 6, 217—231.

1. Truesdell, Clifford Ambrose: Essays in the History of Mechanics. Berlin—Heidelberg—New York: Springer.

1969 1. Allen, Mildred, and Erwin J. Saxl: Elastic torsion in wires under tension. J. Appl. Phys. 40, No. 6, 2505—2509 (May 1969).

1. Bell, James Frederick: The dynamic plasticity of non-symmetrical free-flight collision impact. International J. Mech. Sci. 11, 633—657.

1. Efron, L., and Lawrence E. Malvern: Electromagnetic velocity-transducer studies of plastic waves in aluminum bars. Exptl. Mech. 9, No. 6, 1—8 (June 1969).

1. Florenz, Meir: Two dimensional plastic compression of polycrystalline aluminum. Master's essay. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

1. Hartman, William Francis: Propagation of large amplitude waves in annealed brass. Intern. J. Solids Structures 5, 303—317. Pergamon Press.

2. Hartman, William Francis: Generalized parabolic work hardening during tensile deformation of brass. J. Mat. Am. Soc. Testing Materials 4, No. 1, 104—116.

1. Hsu, Nelson Nai-Hsing: Experimental studies of latent work hardening of aluminum single crystals. Ph. D. dissertation. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

1. Kolsky, Herbert: Production of tensile shock waves in stretched natural rubber. Nature 224, No. 5226, 1301 (December 1969).

1. Maguire, John R.: On the dynamic plasticity of aluminum polycrystals at very high temperatures. Master's essay. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

1. Mittal, Ramesh Kumar: Biaxial loading of dead annealed commercial purity aluminum and the generalization of the parabolic law. Ph. D. dissertation. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

1. Saxl, Erwin J., and Mildred Allen: Period of a torsion pendulum as affected by adding weights. J. Appl. Phys. 40, No. 6, 2499—2503 (May, 1969).

1. Schultz, A.B.: Dynamic behavior of metals under tensile impact. Part III: Annealed and cold worked materials. U.S. Air Force Materials Laboratory, Ohio; Technical Report AFML-TR-69-76, Part II, 39 pages (June 1969).

1970 1. Cristescu, Nicolae, and James Frederick Bell: On unloading in the symmetrical impact of two aluminum bars. Battelle Memorial Institute. Symposium Proceedings, Columbus, Ohio, October, 1969, pp. 397—421.

1. Dawson, Thomas H.: The mechanics of crystalline aggregate deformations. Intern. J. Mech. Sci. 12, 197—204.

1971 1. Bell, James Frederick: On experiments revealing the distribution of critical strains in the large deformation of solids. Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino; Italia, 30, 49—61.

1. Mittal, Ramesh: Biaxial loading of aluminum and a generalization of the parabolic law. J. Materials 6, No. 1, 67—81.

1972 1. Bell, James Frederick: The plane wave and isochoric deformation hypotheses in one-dimensional dynamic plasticity. J. Mech. Phys. Solids. В печати.

2. Bell, James Frederick: On experiments revealing the importance of material instability, for modern theories of plasticity. U.S. Air Force Office of Scientific Research Scientific Report AFOSR-TR-72-1194; The Johns Horkins University (May 1972).

3. Bell, James Frederick: Material stability and second order transitions for crystals under finite strain. Рукопись.

4. Bell, James Frederick: An experimental study of the reflection of finite waves at a plastic-elastic boundary. Рукопись.

5. Bell, James Frederick, and Meir Florenz: A modification of the double compression experiment for the plastic deformation of crystalline solids. Рукопись.

6. Bell, James Frederick: On the dynamic elastic limit in plastic wave propagation. Рукопись.

7. Bell, James Frederick: New experiments on the incremental waves in the prestressed crystalline solid. Рукопись.

1. Khan, Akhtar S.: The theoretical and experimental study of tensile plastic waves at finite strain. Ph. D. dissertation. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

1. Phillips, Aris, and Juh-Ling Tang: The effect of loading path on they yield surface at elevated temperatures. Intern. J. Solids and Structures, 8, No. 4, 463—474.

2. Phillips, Aris, C. S. Liu, and J. W. Justusson: An experimental investigation of yield surfaces at elevated temperatures. Acta Mech. В печати.

# ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

## IV. КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

*4.4. Эксперименты Треска по пробивке и экструзии.*

[1] На рис. 4.4 в выбитом блоке изображено лишь 12 слоев вместо 16, содержащихся в пробиваемом пакете. Следовало бы изобразить еще 4 слоя. Такими слоями должны быть верхние слои, которые так же, как и нижние, испытывают самые небольшие измеиения в толщинах. Именно при этом условии обеспечивается справедливость утверждения о распределеиии толщии слоев в пробитом блоке, утверждення, подкреплеиного даннымн таблицы 116. *(К стр. 18.)*

[2] В таблице 118 не соблюдена размерность $K$ — вместо размерности напряжения указана размерность силы. *(К стр. 27.)*

*4.5. Открытие Тарстоном зависимости предела упругости от предшествующей истории напряженного состояния и ее продолжительности (1873).*

[1] В оригииале примеиен термин «сгеер», по-видимому, не совсем уместный в данном случае. *(К стр. 45.)*

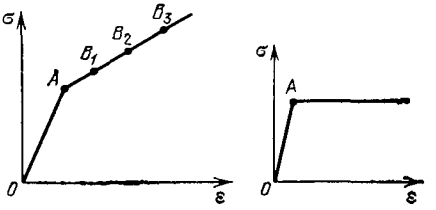
*4.10. Начало экспериментального изучения больших деформаций кристаллических твердых тел с учетом историй нагружения, при которых имеется более чем один ненулевой компонент напряжения: Гест (1900).*

[1] Впервые (имеется в виду первая публикация) гипотезу удельной потенциальной энергни формоизменення как условяе возникновения пластической деформации при сложном напряженном состоянии предложил польский ученый М. Т. Губер (Huber) в 1904 г. в своей статье «Die spezifische Formänderungsarbeit alsMass der Anstrengung eines Materials» (Grasopismo tech., T. 15, Lemberg (Lwow), 1904).

Зиачительно позже выяснилось, что такую гипотезу до Губера сформулировал Дж. Кларк Максвелл, который в письме к У. Томсоиу (лорду Кельвину) писал: «У меня имеются веские осиования думать, что когда энергия (искажения формы) достигает известиого предела, элемент выходит из строя». Эта идея, к которой Дж. Кларк Максвелл больше не возвращался, оставалась неизвестной до опубликования писем Дж. Кларк Максвелла У. Томсону. Впервые они были напечатаны в Proc. Cambridge Phil. Soc. Впоследствии они были изданы отдельной книгой издательством Кембриджского университета (New York, Cambridge, 1937). Таким образом, приоритет принадлежит М. Т. Губеру. Более подробно история открытня и трактовок обсуждаемого условия пластичности изложена в нашей книге: А. П. Филин. «Прикладная механика твердого деформируемого тела». Т. I.— М.: Наука, 1975, стр. 534—536. *(К стр. 85.)*

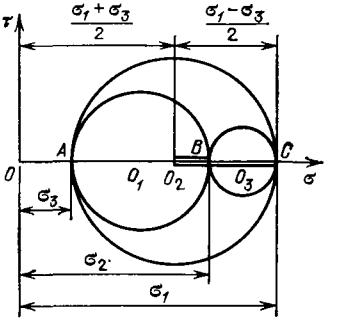
[2] Расширенне начальной поверхности течения имеет место лишь в случае пластичности с упрочнением (такую поверхность в отечественной литературе на-

зывают *поверхностью нагружения*), при идеальной пластичности поверхность течения не изменяется при росте уровня пластических деформаций. Поверхиостям течения и нагружения, рассматриваемым при неодноосном напряженном состоянии, в случае одноосного напряженного состояния отвечают соответственио точки $A$ и $B_i$ ($i=1, 2, \ldots$) на диаграммах $\sigma - \varepsilon$ (см. рисунок). В случае диаграммы с упрочением точке $A$ соответствует поверхность, которую можно назвать *начальной поверхностью течения* или лучше *начальной поверхностью нагружения. (К стр. 85.)*




*4.14. Дальнейшее изучение эксперимента Геста: Лоде (1926) и Тэйлор и Квинни (1931).*

[1] На самом деле при $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ ($\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3$) коэффициент Лоде, представляющий собой отношение отрезков (см. рисунок)




$$\frac{O_2B}{O_2C}=\frac{\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)/2}{(\sigma_1-\sigma_3)/2}=2\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}-1,$$

взятых в диаграмме кругов Мора, и характеризующий соотношенне главных напряжений с точностью до гидростатического давления, теряет смысл. *(К стр. 102.)*

*4.15. О соотношении между функциями отклика в случае больших деформаций при различных путях простого нагружения: эксперименты Е. А. Дэвиса с поликристаллическими телами (1943—1945).*

[1] Отношение $\sigma_3/\sigma_2$ зависит не от $D$ — днаметра трубки, а от отношения $h/D$, где $h$ — толщина стенки трубки:

$$\sigma_2=\frac{N_2}{h}=\left|\frac{q_nD}{2h}\right|, \qquad q_n=\left|2\sigma_2\frac{h}{D}\right|, \qquad |\sigma_3|\leqslant\sigma_2\frac{2h}{D}.$$

Отношение $|\sigma_3/\sigma_2|=1/20$, получавшееся у Дэвиса, могло иметь место при $h/D=1/40$. *(К стр. 111.)*

[2] Буква R (Radial loading) рядом с каждой из десяти разновидностей условных обозначений, соответствующих различным отношениям $\sigma_t/\sigma_a$, указывает на то, что нагружение было простым. *(К стр. 114, 115.)*

*4.17. Эксперименты с монокристаллами: количественная упорядоченность в функциях отклика при больших деформациях твердых тел.*

[1] Здесь и выше в пояснении, даваемом автором книги, завуалирован один существенный элемент — нигде не говорится о предельном значении определяющего касательного напряжения $\tau_c$, и факт возникновения скольжения просто постулируется. Ниже приводится уточнение.

Предельное значение касательного напряжения (обозначим его символом $\tau_c$) для монокристалла данного вещества является постоянной, отыскиваемой экспериментально.

Пусть образец представляет собой призматический монокристалл и к центрам оснований этой призмы вдоль ее оси приложены силы $P$, растягивающие образец.

Рассмотрим плоское сечение этой призмы, нормаль к которому составляет с ее осью угол $\Phi$, тогда площадь этого сечения призмы равняется $F/\cos\Phi$, где $F$ — площадь поперечного сечения.

Рассмотрим в плоскости указанного сечения направление, составляющее с осью призмы угол $\lambda$, тогда проекция силы $P$ на указанное направление равняется $P\cos\lambda$.

Частное от деления $P\cos\lambda$ на $F/\cos\Phi$ представляет собой $\tau$ — касательный компонент напряжения в указанной выше плоскости по отмеченному направлению:

$$\tau=\frac{P\cos\lambda}{F/\cos\Phi}=\frac{P}{F}\cos\lambda\cos\Phi=\sigma\cos\lambda\cos\Phi, \qquad \text{(а)}$$

$\sigma$ — нормальное напряжение в поперечном сечении образца.

Приведенная формула позволяет найти касательный компонент напряжения в любом направлении любой плоскости, если известны углы $\lambda$ и $\Phi$, определяющие их положение. В том числе по этой формуле можно найти $\tau$ и в потенциальных плоскости и направлении скольжения. Если при этом $\tau<\tau_c$ скольжения не наступают. Условием возникновения скольжения является

$$\tau=\tau_c. \qquad \text{(б)}$$

Скольжение наступает в той потенциальной плоскости скольжения и по тому потенциальному направлению скольжения, где $\tau$ достигает значения $\tau_c$ раньше других. Другое дело, что значение предельного касательного напряжения $\tau_c$ находят, пользуясь (б) и (а), при $\sigma$, отвечающем началу скольжения.

Во всех приведенных рассуждениях не затронут вопрос об изменении углов $\lambda$ и $\Phi$ и площади $F$ в связи с деформацией образца.

В настоящем переводе книги касательное напряжение $\tau$, действующее в плоскости и в направлении наиболее расположенных к скольжению в них, названо определяющим, даже если $\tau<\tau_c$, а $\tau_c$ названо предельным значением определяющего касательного напряжения. *(К стр. 120.)*

[2] Вызывает сомнение уровень напряжений, указанных в оригинале книги на оси ординат нижней части рис. 4.73, *а*; в оригинале книги на верхней части рис. 4.73, *б* около графиков не указаны значения температуры; не указан смысл чисел около кривых. *(К стр. 133.)*

*4.24. Вязкопластичность в металлах: эксперименты, проводившиеся до 1940 г.*

[1] В списке литературы указана статья этих авторов, опубликованная в 1927 г., но не в 1928 г. *(К стр. 189.)*

*4.28. О непосредственном измерении профиля волн деформаций конечной амплитуды при их распространении: Белл (1956—1972).*

[1] В оригинале книги вместо формулы (4.38) указана формула (4.45). *(К стр. 259.)*

[2] В подрисуночной подписи указаны расстояния от ударяемого конца образца, выраженные через размер его диаметра (один, два, три размера диаметра), а на самом рисунке (цифры *1*, *2*, *3*) эти расстояния указаны как 1, 2, 3 дюйма. Здесь либо несогласованность, либо диаметр образца равен одному дюйму. *(К стр. 262.)*

*4.33. Об изучении поверхности текучести, выполнявшемся после 1948 г. на основе обобщающего развития экспериментов Геста и опытов Баушингера.*

[1] Здесь имеются в виду интенсивности касательных напряжений и интенсивности сдвига, или интенсивности напряжений и интенсивности деформаций, или октаэдрические напряжения и октаэдрические сдвиги. *(К стр. 316.)*

*4.39. Эксперименты по конечным упругим деформациям резины: от Джоуля до Ривлина (от 50-х гг. XIX века до 50-х гг. XX века).*

[1] Balata — каучукообразный экстракт, выделяемый из молокообразного сока Mimusops balata и Mimusops schomburgleii — камедь, широко используемая в театральном искусстве. *(К стр. 366.)*

[2] В оригинале книги не указано, в каких единицах измерялись модули или что представляли эти числа: абсолютные или процентные изменения. *(К стр. 369.)*

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ


Абов Давид А. (Aboav, David A.) 138, 139
Адамс Джои Куинси (Adams, John Quincy) 385, 386
Аллен Мильдред (Allen, Mildred) 365, 410
Альтер Б. Е. К. (Alter, B. E. K.) 240—243, 332, 333, 403
Амага Эмиль-Илер (Amagat, Emile-Hilaire) 91
Амслер (Amsler) 185*, 190*
Аивин Уильям Каутори (Unwin, William Cawthorne) 44, 46, 393, 395
Андраде Эдвард Невиль да Коста (Andrade, Edward Nevill da Costa) 131—133, 138, 139, 143, 401
Ардаи (Ardant) 10—14, 156
Арчбут С. Л. (Archbutt, S. L.) 279, 395

Бабедж Чарльз (Babbage, Charles) 386
Бакофеи У. А. (Backofen, W. A.) 405
Барон Х. Г. (Baron, H. G.) 216, 403
Барре Шарль С. (Barrett, Charles S.) 145, 298, 398, 402
Басински З. С. (Basinski Z. S.) 409
Баушингер Иогани (Bauschinger, Johann) 3, 4, 15, 16, 18, 38, 39, 43—49, 51, 53—59, 61—65, 67, 69—71, 82, 88, 104, 106, 107, 156, 162, 188, 276, 308, 309, 316, 350, 363, 391—393, 414
Бейкер Уильфред Е. (Baker, Wilfred E.) 215, 408
Бейтман Катрин М. (Bateman, Catherine M.) 298, 403
Белидор Бериар Форест де (Belidor, Bernard Forest de) 385
Белл Джеймс Фредерик (Bell, James Frederick) 1—4, 95, 100, 101, 107, 109, 110, 113, 114, 120—124, 126, 131, 134—141, 143—149, 151, 155, 162—165, 167—169, 171—175, 177, 181, 182, 194, 208, 210, 215, 216, 218, 223, 225, 229, 230, 234, 236, 239, 243—247, 249—252, 254—256, 258—263, 265—267, 269—275, 278, 284, 288, 289, 291, 292, 294, 296, 299, 300, 303, 306, 308, 324, 326—330, 332—340, 342, 343, 346, 348, 349, 354, 401, 403—411, 414
Бердсли Л. У. (Beardslee, L. W.) 45—47, 51, 56, 391
Бернер Рольф (Berner, Rolf) 124, 135, 136, 138, 139, 143, 404, 405
Бернулли Яков (Bernoulli, Jacobus (James, Jakob, Jacques)) 5, 385
Бертин А. (Bertin, A.) 372, 391
Бертоле Клод Луи граф (Berthollet, Claude Louis Le comte) 178, 385
Био Жан Батист (Biot, Jean Baptiste) 179
Бишоп Дж. Ф. У. (Bishop, J. F. W.) 176, 297, 298, 401
Блевит Т. Х. (Blewitt, T. H.) 135, 136, 403
Блинд Август (Blind, August) 385, 394
Боаз У. (Boas, W.) 119, 125, 128—130, 298, 397, 398, 401, 403
Богатырев И. С. 405*
Бодиер Саул Р. (Bodner, Saul R.) 283, 409
Бодримои А. (Baudrimont, A.) 387
Бозорт (Bozorth) 96
Больцмаи Людвиг (Boltzmann, Ludwig) 373, 392
Боненблюст Аири Фредерик (Bohnenblust, Henri Frèderic) 228, 265, 266, 399
Борие (Bornet) 10, 11, 13, 156
Браун А. Ф. К. (Brown, A. F. C.) 209, 399, 400
Браун Нормаи (Brown, Norman) 406
Бренан Дж. Б. (Brennan, J. B.) 400
Бриджмен Перси Уильям (Bridgman, Percy Williams) 3, 75, 77, 89—101, 105, 115—118, 144, 343, 394, 396—400, 402, 407, 408
Буало Пьер Проспер (Boileau, Pierre Prosper) 367, 368, 388
Будяиски Бернард (Budiansky, Bernard) 309, 401
Бунзен Роберт Уильямс (Вильгельм) (Bunsen, Robert Williams (Wilhelm)) 72, 388
Бухтон (Buchton) 191
Бьяики Джиованни (Bianchi, Giovanni) 237, 239, 240, 242, 253, 332, 333, 402, 404, 405, 407

Варшауэр Дуглас М. (Warschauer, Douglas M.) 407
Вебер Вильгельм (Weber, Wilhelm) 179, 368, 370, 372, 386
Веертс И. (Weerts, I.) 120, 124, 138, 139, 143, 397
Вёлер А. (Wohler, A.) 3, 46, 47, 51—54, 56, 69, 82, 389, 390
Вердер Л. (Werder, L.) 45, 54
Веригин Н. 77—80, 86, 394
Вериер В. Мид (Werner, W. Meade) 263, 405, 406
Вертгейм Гийом (Wertheim, Guillaume) 12, 13, 24, 48, 49, 51, 56, 82, 89, 90, 92, 104, 105, 107, 162, 264, 277, 309, 361—363, 367—370, 372, 373, 386—389
Видеман Густав Генрнх (Wiedemann, Gustav Heinrich) 3, 47, 51, 52, 63, 71, 389
Вика Лун-Жозеф (Vicat, Louis-Joseph) 7, 157, 386
Викарно А. А. (Vicario, A. A.) 357, 409
Вилнамс Р. Прайс (Williams, R. Price) 37
Винклер Эмиль (Winkler, Emil) 38, 372, 375, 389, 392
Винцент Н. Д. Г. (Vincent, N. D. G.) 209, 399
Вуд Д. С. (Wood, D. S.) 164, 209, 217, 220, 225—230, 242, 266, 268, 327, 397, 402

Галтон (Galton) 52
Гас Юджин (Guth, Eugene) 180, 399
Гаф Джон (Gough, Jonn) 181, 366—372, 375, 385
Гёлер Ф. В. (Göler, Frhn. V.) 181—120, 124, 396
Гельмгольц Германи Людвиг Фердинаид фои (Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdianand von) 72, 389
Гендерсон К. (Henderson, C.) 131—133, 143, 401
Гент А. Н. (Gent, A. N.) 381, 402
Гербер (Gerber) 53
Герстнер Франц Антон (Gerstner, Franz Anton (Ritter) von) 386
Герстнер Франц Иосиф фои (Gerstner, Franz Joseph von) 9, 10, 49, 112
Герц Генрих Рудольф (Hertz, Heinrich Rudolph) 205, 392
Гест Джеймс Дж. (Guest, James J.) 82—85, 101, 106—110, 175, 217, 271, 276, 308, 310, 315—317, 394, 397, 412, 414
Гиллич Уильям Дж. (Gillich, William J.) 233, 251, 255, 255, 256, 328—330, 405, 408—410
Голдберг А. (Goldberg A.) 322—325, 401
Гопкиисои Бертрам (Hopkinson, Bertram) 195, 196, 210, 226, 272, 275, 395
Гоикинсон Джои (Hopkinson, John) 4, 36—38, 43, 193—199, 213—215, 390, 394
Грей Г. А. (Gray, G. A.) 312, 313, 354, 406
Григолюк Э. 401*
Грин А. П. (Green, A. P.) 310, 311, 403
Грии Роберт Е. (Green, Robert E.) 120—124, 126, 131, 137, 139, 407, 409
Гринаф Г. Б. (Greenough, G. B.) 298, 402
Гриффис Ле Ваи (Griffis, Le Van) 209, 218, 399, 400
Групен В. Б. (Grupen, W. B.) 298, 407
Грюнайзеи Уильям Август (Grüneisen, Eduard August) 90, 105, 243, 394, 395
Губер М. Т. (Huber, M. T.) 412
Гук Роберт (Hooke, Robert) 5, 24, 30, 83, 265, 326, 355, 385
Гюгоиио Пьер Аири (Hugoniot, Pierre Henri) 100, 101, 219

Дани Б. У. (Dunn, B. W.) 4, 193, 199—204, 206—211, 213—218, 221, 242, 393
Д'Арки Патрик (D'Arcy, Patrick) 385, 387
Дарт С. Л. (Dart, S. L.) 180, 399
Даусои Томас Х. (Dawson, Thomas H.) 176, 297—300, 410, 411
Дебоннефой Е. (Debonnefoy, E.) 367, 368, 388
Детвилер Г. (Datwyler, G.) 206, 398
Джастюссон Дж. У. (Justusson, J. W.) 411
Джеймс Генри (James, Henri) 388
Джеймс Губерт М. (James, Hubert M.) 180, 399
Джинс Д. У. (Ginns D. W.) 204, 215—217, 398
Джонс Генри (Jones, Henry) 52
Джонсон Дж. Е. (Johnson, J. E.) 164, 226—230, 242, 268, 327
Джоуль Джеймс Прескотт (Joule, James Prescott) 4, 36, 38, 181, 366—371, 373, 375, 388, 389, 415
Дндерихс Германи (Diederichs, Herman) 39, 41, 395
Дил Йорг (Diehl, Jörg) 135, 403, 404
Диллон Оскар В. мл. (Dillon, Oscar W.,Jr.) 175, 180—184, 265, 280, 289, 290, 406—409
Дитцель Карл Франц (Dietzel, Carl Franz) 368, 388
Добре (Daubree) 36
Дойтлер Х. (Deutler, H.) 140, 189—191, 193 397
Дониелл Л. Х. (Donnell, L. H.) 195, 214, 218, 397
Дори Джои Е. (Dorn, John E.) 213, 214, 322—325, 401, 406
Доу Норрис Ф. (Dow, Norris F.) 309, 401
Дохи Шозо (Dohi, Shoso) 405
Дрисколл Давид Е. (Driscoll, David E.) 403
Дуч Л. С. (Douch, L. S.) 227, 230, 268, 407
Дыбковски В. (Dybkowsky, W.) 372, 389
Дьюар Джеймс (Dewar, Sir James) 75, 76, 393
Дэвис Е. Д. Х. (Davies, E. D. H.) 213, 214, 216, 407
Дэвис Ивен А. (Davis, Evan A.) 3, 110—116, 302—304, 307, 316, 340, 342, 346, 399, 400, 403, 404, 413
Дэвис Р. М. (Davis, R. M.) 99, 100, 204, 205, 211, 272, 275, 400
Дюве Поль Е. (Duwez, Pol. E.) 209, 220—226, 242, 266, 399—401
Дюло Альфоис Жаи Клод Буржиньои (Duleau, Alphonse Jean Claude Bourgingnon) 90, 157, 277, 385

Жирар П. С. (Girard, P. S.) 385, 386, 405

Зак Рудольф Х. (Sack, Rudolf H.) 202—204, 395
Захс Георг Оскар (Sachs, Georg Oskar) 118—120, 124, 138, 139, 143, 295, 298, 396, 397
Зеегер Альфред фон (Seeger, Alfred von) 119, 134, 135, 404
Зеехазе Х. (Seehase, H.) 203, 204, 395
Зибель Е. (Siebel, E.) 154, 188, 189, 397

Ивинг Джеймс Альфред (Ewing, James Alfred) 46, 394
Ивинг Уильям О. (Ewing, William O.) 251, 253, 255, 256, 410
Икеда Сусму (Ideka, Susmu) 133, 135
Икли Л. М. (Yeakley, L. M.) 214, 253, 407—409
Ильюшин А. А. 405*
Имберт А. (Imbert, A.) 38, 372, 392
Ирвин Георг Р. (Irwin, George R.) 253, 404
Итихара Мититози (Itihara, Mititosi) 204, 207, 397, 398

Кайори Флориан (Cajori, Florian) 39, 397
Келверт Монт А. (Calvert, Monte A.) 43, 409
Кан Роберт У. (Cahn, Robert W.) 124
Каньяр де Латур, барон Шарль (Cagniard de Latour, Baron Charles) 363, 386
Карман Теодор фон (Kármán, Theodore von) 3, 85—90, 117, 195, 206, 209, 214, 218—222, 224—226, 228, 232, 241, 247, 252, 261, 263, 271, 329, 331, 333, 335, 395, 399—401
Кармарш Карл (Karmarsch, Karl) 5, 98, 386
Карнор Р. фон (Karnop, R. von) 120, 124, 396
Карпентер Гарольд К. Г. (Carpenter, Harold C. H.) 39, 41, 117, 395
Каррекер Р. П. мл. (Carreker, R. P. Jr.) 165, 168, 169, 171, 172, 404
Карстен Карл Иоганн Бернард (Karsten, Karl Johann Bernhard) 88, 385, 386
Картис Чарльз Уильям (Curtis, Charles William) 240—243, 332, 333, 403

Квинни Х. (Quinney, H.) 3, 101—110, 153, 158, 159, 172—176, 180, 204, 206, 265, 298, 310, 397, 413
Кёлер Дж. С. (Koehler, J. S.) 136, 138, 139, 404
Келли Энтони (Kelly, Anthony) 124, 136, 403
Кениг М. Дж. (Kenig, M. J.) 280, 290, 409
Кеннеди Александер Блекки Уильям (Kennedy, Alexander Blackie William) 39, 44, 54, 393
Кеннелли Артур Эдвин (Kennelly, Arthur Edwin) 385, 397
Кёрбер Фридрих (Körber, Friedrich) 197, 202—204, 395, 396
Кик Фридрих (Kick, Friedrich) 43, 188, 271, 391
Кингман Присцилла У. (Kingman, Priscilla W.) 137, 139, 407
Киркальди Давид (Kirkaldy, David) 55
Кирхгоф Густав Роберт (Kirchhoff, Gustav Robert) 153, 154, 303
Клапейрон Бенуа Поль Эмиль (Clapeyron, Benoit Paul Émile) 368, 389
Кларк Дональд Шерман (Clark, Donald Sherman) 164, 206, 209, 217, 220, 222, 225—230, 242, 266, 268, 327, 398—403
Книппинг П. (Knipping, P.) 118, 395
Колски (Кольский — в русских переводах) Герберт (Kolsky, Gerbert) 4, 210—216, 227, 230, 268, 355—357, 360, 401, 407, 410
Колтман Р. Р. (Coltman, R. R.) 135, 403
Кольрауш Фридрих Вильгельм Георг (Kohlrausch, Friedrich Wilhelm Georg) 372, 373, 391
Комбе М. М. (Combes, M. M.) 17, 24
Конвери Е. (Convery, E.) 215, 410
Коии Эндрю Ф. (Conn, Andrew F.) 214, 263, 404, 408
Коннелли Ф. М. (Connelly, F. M.) 403, 404
Консидер Арман Габриэль (Considère, Armand Gabriel) 202, 392
Кориолис Густав Гаспар (Coriolis, Gustave Gaspard) 3, 7—9, 157, 180, 386
Корню Мари Альфред (Cornu, Marie Alfred) 71, 243
Коттрел Алан Говард (Cottrell, Alan Howard) 83, 124, 283, 402
Коши Огюстен-Луи (Cauchy, Augustin-Louis) 110, 113, 115, 152, 153, 303, 385
Крейг У. К. (Craig, W. C.) 367, 368, 388
Кри Чарльз (Chree, Charles) 100
Кристеску Никала (Cristescu, Nicolae) 271, 272, 410
Крупник Н. (Krupnick, N.) 285, 286, 402
Кубитт Уильям (Cubitt, William) 388
Кулои Шарль Огюстен (Coulomb, Charles Augustin) 6, 24, 82, 90, 127, 320, 360, 361, 363, 385
Кульман Ф. И. (Culmann, F. J.) 386
Купфер Адольф Теодор (Фёдор) 369, 370, 388
Кэмпбелл Дж. Д. (Campbell, J. D.) 226, 242, 327, 402
Кемпбелл Уильям Р. (Campbell, William R.) 217, 230—233, 240, 268, 401, 402

Лагерхельм Пер (Lagerhjelm, Pehr) 12, 49
Ланге Ганс Гейнц (Lange, Hans Heinz) 131, 132, 137—139
Лауэ Макс фон (Laue, Max von) 118, 395
Лаффон (Laffon) 185
Лебастер (Lebasteur) 202
Лебер Е. (Leber, E.) 394
Левеисон Л. Х. (Levenson, L. H.) 298, 398
Леви Морис (Lévy, Maurice) 28, 390
Левкоев И. 77—80, 86, 394
Лемале Алекс Гийен (Lemale, Alex Guislain) 385, 391
Лемприер Б. М. (Lempriere, B. M.) 283, 407
Лейский В. С. 311—312, 405
Леон Альфоис (Leon, Alfons) 185
Ле Шателье А. (Le Chatelier, H.) 98, 392
Ле Шателье Франсуа (Le Chatelier, Francois) 4, 11, 51, 73, 76, 157, 181, 193, 242, 277, 279, 281, 283, 290, 309, 335, 396, 409
Ли Фредерик Чарльз (Lea, Frederick Charles) 265—268, 271, 402, 405
Ли Эрастус Х. (Lee, Erastus H.) 222, 229, 230
Линдхольм Уильрих С. (Lindholm, Ulric S.) 214—216, 408, 409
Лоде В. (Lode, W.) 101—103, 106—108, 310, 311, 396, 413
Людвик Пауль (Ludwik, Paul) 151—154, 184—189, 191, 394, 396
Людерс В. (Luders, W.) 34, 38, 389
Люке Курт (Lucke, Kurt) 131, 132, 137—139, 402
Ляв Август Эдвард (Love, Augustus Edward) 46, 47, 396

Магуер Джои Р. (Maguire, John R.) 410
Мадер С. (Mader, S.) 135, 404
МакГрегор К. У. (MacGregor, C. W.) 400
МакРейнольдс Эидрю Везерби (McReynolds, Andrew Wetherbee) 281—284, 286, 287, 289, 290, 401
Максвелл Джеймс Клэрк (Maxwell, James Clerk) 85, 107—110, 155, 175, 176, 178, 297, 298, 412*
Малверн Лауренц Е. (Malvern, Laurence E.) 214, 222, 230, 233, 237, 251, 253, 254, 256, 267, 274, 275, 401, 407, 408, 410
Маллард Е. (Milland., E.) 98, 392
Манжуаи Михаэл Жозеф (Manjoine, Michael Joseph) 206—209, 215, 216, 398, 399
Манн Х. К. (Mann, H. C.) 206, 207, 398
Марнотт Эдме (Mariotte, Edme) 7
Маркиз Х. (Marquis, H.) 214, 407
Масима М. (Masima, M.) 120
Массон Антуан Филибер (Masson, Antoine Philibert) 4, 11, 51, 73, 76, 157, 175, 181, 193, 242, 277—282, 287—295, 301, 309, 312, 315, 318, 335, 341, 345, 348, 350—355, 382, 386
Массу П. (Massuet, P.) 385
Мейер Евгений (Meyer, Eugen) 203
Мемке Рудольф (Mehmke, Rudolf) 372, 393
Мерриман Менсфнльд (Merriman, Mansfield) 47, 393
Мизес Рнхард фон (Mises, Richard von) 85, 107—110, 155, 175, 176, 178, 297, 298
Миллер Андреас (Miller, Andreas) 309
Миттал Рамеш Кумар (Mittal, Ramesh Kumar) 155, 177, 300—302, 304—307, 316, 340—342, 361, 410, 411
Монти (Monty) 16
Мор Отто (Mohr, Otto) 89, 107—109, 413
Морэн Артур Жуль (Morin, Arthur Jules) 17, 24, 37, 49, 389
Мотт Б. У. (Mott, B. W.) 130, 402
Моуссон Альберт (Mousson, Albert) 72, 389
Мулеибрух Карл В. (Muhlenbruch, Carl W.) 401
Мун Хенгью (Mooney, Hahngue) 318—320, 345
Мунн Мелвин (Mooney, Melvin) 381, 399
Мурнаган Франснс Д. (Murnaghan, Francis D.) 398
Мусшеибрук Питер ван (Musschenbroek, Pieter van) 6, 7, 385
Мэддин Роберт (Maddin, Robert) 124

Мэллок Ариульф (Mellock, Arnulph) 90, 357, 373, 374, 392—394
Мэтьюссон К. Х. (Mathewson, C. H.) 142
Мюллер Эрнст (Muller, Ernst) 44

Навье Клод-Луи-Мари-Анри (Navier, Claude-Louis-Marie-Henri) 3, 7, 8, 47, 386
Нагди Пауль М. (Naghdi, Paul M.) 309, 403
Надаи Арпад Людвиг (Nadai, Arpad Ludwig) 89, 101, 152, 153, 206—209, 215, 216, 398, 399, 401
Нелькенбрехер Иоганн Христиан (Nelkenbrecher, Johann Christian) 385, 386
Ноггле Т. С. (Noggle, T. S.) 136, 138, 139, 404
Нолл Уолтер (Noll, Walter) 377
Ньютон Исаак (Newton, Isaac) 243

Обермейер А. фон (Obermayer, A. von) 81, 394
Оджилви Г. Дж. (Ogilvie, G. J.) 298, 403
Освальд Е. (Osswald, E.) 124
Отто (Otto) 54*, 69*

Панферов В. М. 405*
Папирно Ральф (Papirno, Ralph) 405
Паул Уильям (Paul, William) 407
Перо А. (Perot, A.) 394
Петерс Роджер У. (Peters, Roger W.) 309, 401
Пикте (Pictet) 179
Пиола Г. (Piola G.) 153*, 303*
Пирсон Карл (Pearson, Karl) 47, 51, 393
Планк Макс (Planck, Max) 201, 203, 204, 207, 395
Пойтинг Дж. Генри (Poynting, J. Henry) 4, 360—365, 380, 395
Помп А. (Pomp, A.) 154, 188, 189, 397
Понд Роберт Барретт (Pond, Robert Barrett) 137, 139, 350, 407
Понселе Жаи-Виктор (Poncelet, Jean-Victor) 3, 7, 10—14, 47, 144, 156, 160, 386
Портвеи Альберт (Portevin, Albert) 4, 11, 51, 73, 76, 156, 181, 193, 242, 277, 279, 281, 283, 290, 309, 335, 396, 409
Поххаммер Лео (Pochhammer, Leo) 100
Прайс Р. Дж. (Price, R. J.) 124
Праидтль Людвиг (Prandtl, Ludwig) 86, 189, 190, 395, 397
Пуассон Симеон-Дени (Poisson, Siméon-Denis) 84, 85, 104, 227, 364, 372, 373, 385
Пуйе Клод Серве Матэ Мари Ролаи (Poullet, Claude Servais Mathais Marie Rolan) 199, **387**
Пульфрих Карл (Pulfrich, Carl) 372—374, 393
Пуф Х. Л. Д. (Pugh, H. L. D.) 215, 410
Пфафф Иммунаэль Буркхард Алексиус Фридрих (Pfaff, Immanuel Burkhard Alexius Friedrich) 72, 124, 391
Пэйдж К. К. (Page, C. C.) 367, 368, 387
Пэрси Г. Р. (Piercy, G. R.) 124

Рамберг Р. Вальтер (Ramberg, R. Walter) 253, 404
Рахматуллии К. А. 265, 400
Робшток Х. (Rebstock, H.) 135, 403
Редмаи Дж. К. (Redman, J. K.) 135, 403
Реини Георг (Rennie, George) 388
Рено Аири Виктор (Regnault, Henri Victor) 90, 387
Рентген Вильгельм Конрад (Röntgen, Wilhelm Conrad) 373—375, 391
Риве (Rivett) 243
Ривлии Рональд С. (Rivlin, Ronald S.) 4, 365, 366, 375—382, 401, 402, 405, 415
Рид У. Т. (Read, W. T.) 130
Риккати Джакопо (Riccati Jacopo (James)) 5, 97, 385
Ринне Фридрих (Rinne, Friedrich) 86, 395
Рипарбелли Карлос (Riparbelli, Carlos) 237
Риппергер Юджин Эштон (Ripperger, Eugene Ashton) 232, 253, 407
Ричардс Теодор Уильям (Richards, Theodore William) 96, 395, 396
Риччиоли (Riccioli) 6,7
Розен А. (Rosen, A.) 283, 409
Розенталь Д. (Rosenthal D.) 298, 407
Розенхайн Вальтер (Rosenhain, Walter) 179, 279, 395
Ройш (Reusch) 44
Роулс Дж. К. (Rowles, J. C.) 309, 403
Рочелл (Rochelle) 76
Рубин Р. Дж. (Rubin R. J.) 237, 403
Рэнкин Уильям Джон Маккуорн (Rankine, William John M.) 83

Савар Феликс (Savart, Felix) 4, 11, 50, 51, 73, 76, 156, 172, 175, 181, 193, 242, 277—282, 287—295, 301, 309, 312, 315, 318, 335, 341, 345, 348, 350—355, 382, 386
Саимото (Saimoto) 409
Саклииг Джон Х. (Suckling, John H.) 406
Сакслд Эрвии Дж. (Saxl, Erwin J.) 365, 410
Свейи А. Дж. (Swain, A. J.) 285, 287, 402
Свифт Х. У. (Swift, H. W.) 365, 400
Сен-Венаи Адемар-Жан-Клод Барре де (Saint-Venant, Adhémard-Jean-Claude Barré de) 16, 17, 22, 24, 28, 32, 83, 367, 368, 373, 387, 390
Сиераковски Р. Л. (Sierakowski, R. L.) 312, 315, 408, 410
Силлимен (Silliman) 16
Симмонс Дж. А. (Simmons J. A.) 213, 214, 406
Синнат (Sinnat) 179
Смит Альберт Алонзон мл. (Smith, Albert Alonzon Jr.) 398
Смит Джек К. (Smith, Jack C.) 359, 360, 409
Соколовский В. В. 267
Сондерс Д. У. (Saunders, D. W.) 365, 375—380, 402
Сперразза Джозеф (Sperrazza, Joseph) 255, 263, 406, 407
Спринг Вальтер (Spring, Walthére) 3, 71—75, 81, 86, 392
Стефенсон Роберт (Stephenson, Robert) 33, 38, 388
Стрэтт Джон Уильям (Strutt, John William (3-rd Baron Raylagh)) 279
Стюарт Д. А. (Stuart, D. A.) 237—240, 242
Сузуки Хидеи (Suzuki Hideji) 133, 135, 403
Сулливаи Уильям (Sullivan, William) 387
Сутоки Томия (Sutoki, Tomija) 281, 282, 399
Сэгюэи М. (Seguin, M.) 10, 11, 13, 156

Такеучи Сакаэ (Takeuchi, Sakae) 133, 135, 403
Тален Роберт (Thalén, Robert) 3, 47, 49—51, 107, 389
Таммани Густав Генрих Иоганн Апполон (Tammann, Gustav Heinrich Johann Apollon) 3, 77—81, 86, 394
Таи Ю-Лии (Tang, Juh-Ling) 316, 317, 411
Танк Ф. (Tank, F.) 118
Таннер Л. Е. (Tanner, L. E.) 124

Тардиф Х. П. (Tardif, H. P.) 214, 407
Тарстон Роберт Генри (Thurston, Robert Henry) 3, 38—47, 51, 63, 71, 82, 107, 110, 112, 157, 184, 188, 192, 193, 281, 373, 374, 391—393, 412
Тафель Вильгельм (Tafel, Wilhelm) 204, 397
Тиле Вальтер (Thiele, Walter) 127, 397
Тимошенко С. П. 398
Тиндал Джон (Tyndall, John) 72, 390
Титц Т. Е. (Tietz, T. E.) 322—325, 401
Тодхантер Исаак (Todhunter, Isaac) 393
Томплинсон Герберт (Tomlinson, Herbert) 51, 320, 321, 361, 363, 392, 393
Томсон Джеймс (Thomson, James) 71, 72, 320, 322, 387, 388
Томсон, сэр Уильям (лорд Кельвин) (Thomson, Sir William (Lord Kelvin)) 72, 163, 171, 261, 309, 320, 361, 363, 365—369, 371, 372, 388, 412
Торнтон П. Р. (Thornton P. R.) 132, 407
Трегольд Томас (Tredgold, Thomas) 12, 14
Трелоар (Трилор) Л. Р. К. (Treloar, L. R. G.) 375, 404
Треска Анри Эдуард (Tresca, Henri Édouard) 3, 15—25, 27—37, 51, 71—73, 75, 77, 81, 83, 85, 86, 109—111, 159, 163, 175, 176, 179, 180, 187, 195, 208, 382, 389—393, 412
Трусделл Клиффод Амброуз (Truesdell, Clifford Ambrose) 2, 336, 338, 360, 365, 377, 385, 402, 405, 406, 408, 410
Тушак П. А. (Tuschak, P. A.) 357, 409
Тэйлор Д. Б. К. (Taylor, D. B. C.) 401
Тэйлор, сэр Джеффри Инграм (Taylor, Sir Geoffrey Ingram) 3, 35, 101—110, 118—120, 124—130, 135, 137—139, 142, 143, 147, 148, 153, 154, 158, 159, 172—176, 179—181, 184, 195, 204—206, 209, 214—216, 218, 219, 222, 232, 241, 247, 252, 261, 263, 265, 271, 272, 278, 296—298, 310, 329, 331, 333, 335, 396—400, 403, 404, 413
Тэйт Уильям (Tate, William) 385, 386

Уайт М. П. (White, M. P.) 209, 218, 399, 400
Уайтморе Х. Л. (Whittemore, H. L.) 395
Уарнок Ф. В. (Warnock, F. V.) 400, 401
Уиллер М. А. (Wheeler, M. A.) 280, 281, 397
Уиллис Роберт (Willis, Robert) 388
Уроттеслей Джон (Wrottesley, John) 388
Ухатиус Франц фон (Ushatius, Franz (Ritter) von) 45—47, 51, 391

Фарадей Михаил (Faraday, Michael) 71, 388, 389
Фарангейт Габриэль Даниэль (Fahrenheit, Gabriel Daniel) 181*, 183*
Фаррен У. К. (Farren, W. C.) 126, 179, 181, 184, 265, 396
Фаулз Г. Р. (Fowles, G. R.) 100, 101, 406
Фейербейрн Уильям (Fairbairn, William) 32, 53
Фенстермейкер Карл А. (Fenstermaker, Carl A.) 359, 360, 409
Фивегер Е. (Viehweger, E.) 204, 397
Фик Адольф Евгений (Fick, Adolf Eugen) 372, 389
Филби Гордон Лютер (Filbey, Gordon Luther) 325, 326, 406, 408
Филин А. П. 412 *
Филлипс Альберт Дж. (Phillips, Albert J.) 398
Филлипс В. А. (Phillips, V. A.) 124, 285, 287, 402
Филлипс Эрис (Phillips, Aris) 312—317, 354, 404—406, 408, 410, 411
Фитцджеральд Эдвин Р. (Fitzgerald, Edwin R.) 383, 409
Фишер Дж. К. (Fischer J. C.) 400
Фишер (Фридрих) Хуго Роберт (Fisher (Friedrich) Hugo Robert) 44, 392
Флейшер Р. Л. (Fleischer, R. L.) 405
Флореиц Меир (Florenz, Meir) 343, 410, 411
Флюгге С. (Flugge, S.) 2*
Форд Хью (Ford, Hugh) 285, 286
Форрест Джеймс (Forrest, James) 204
Фоукс Амнон (Foux, Amnon) 365, 406
Фохт (Фойгт — в русских переводах) Вольдемар (Voight, Woldemar) 105, 119
Фраик О. (Frank, O.) 374
Фраик Ф. К. (Frank, F. C.) 130
Фридрих В. (Friedrich, W.) 118, 395

Хабиб Е. Т. (Habib, E. T.) 209, 210, 215, 216, 400
Хайерс Доиальд Х. (Hyers, Donald H.) 228, 266, 399
Хан Актар Саламат (Khan, Akhtar Salamat) 330—332, 411
Хан Чанг С. (Hahn, Chang S.) 237
Ханди Б. Б. (Hundy, B. B.) 310, 311, 403
Хансон Даниэл (Hanson, Daniel) 280, 281, 397
Хантер Стефен К. (Hunter, Stephen C.) 213, 214, 216, 407
Хартиг Эрнст Карл (Hartig, Ernst Karl) 156
Хартман Уильям Фреисис (Hartman, William Francis) 250, 263, 274, 275, 327—330, 409, 410
Хатт Кендрик (Hatt, Kendrick) 201, 394
Хаузер Ф. Е. (Hauser, F. E.) 213, 214, 406
Хейнрихс Иозеф А. (Heinrichs, Joseph A.) 406
Хёнингер (Hoeninger) 201
Хиббард У. Р. мл. (Hibbard, W. R. Jr.) 124, 165, 168, 171, 172, 404
Хилл Родней (Hill, Rodney) 176, 297, 298
Хирш П. Б. (Hirsch P. B.) 132, 407
Хладни Эрнст Флоренс (Chladni, Ernst Florens) 278, 385
Ховии М. (Hovine, M.) 367, 368, 388
Ходж Пол Р. (Hodge, Paul R.) 38, 388
Ходкинсои Итон (Hodgkinson, Eaton) 47—49, 82, 89, 107, 112, 268, 386—388
Хокетт Дж. Е. (Hockett, J. E.) 169, 170, 404
Хопман Уильям Х. (Hoppmann, William H., II) 221, 225, 242, 400
Хосфорд У. Ф. (Hosford, W. F.) 168, 405
Хоуник Р. (Houwink, R.) 366, 402
Хсу, Нельсон Наи-Хсинг (Hsu, Nelson Nai-Hsing) 149, 150, 410
Хэллок Уильям (Hallock, William) 75, 393

Чарик Дж. Х. (Charyk, J. H.) 228, 266, 399
Чен М. К. (Chen, M. K.) 124
Чиддистер Дж. Л. (Chiddister, J. L.) 214, 407

Шапиро Г. С. 401 *
Шарп Уильям Н. (Sharpe, William N.) 146, 284, 285, 291, 293, 295, 409
Шарпи (Sharpy) 189, 216
Шелленберг И. П. (Schellenberg J. P.) 386
Шепард Роланд П. (Shephard, Roland P.) 309
Шиллер Людвиг (Schiller, Ludwig) 374, 394
Шмид Эрих (Schmid, Erich) 119, 125, 128—130, 296, 397, 398, 401

Шмулевич Якоб (Schmulewitsch, Jacob) 371, 373
Шой Р. (Scheu, R.) 151—154, 396
Шпрингер (Springer) 141
Штейи Альберт (Stein, Albert) 288, 289, 332—334, 406, 407
Штеригласс Е. Дж. (Sternglass, E. J.) 237—240, 242, 403
Шторп Ганс Ариольд (Storp, Hans Arnold) 201, 203
Штраубель Константин Рудольф (Straubel, Consiantin Rudolph) 71, 163
Шультц А. Б. (Schultz, A. B.) 357, 358, 360, 409, 410

Эборелл Р. (Eborall, R.) 285, 287, 402
Эдлунд Эрик (Edlund, Erik) 38
Эдмондс Р. (Edmonds, R.) 4
Эйлер Леонард (Euler, Leonard) 117
Экволл Р. А. (Ekvall, R. A.) 406
Экснер Франц (Exner, Franz) 38, 355, 356, 372, 391
Элам Констанс Ф. (Elam, Constance F.) 117—120, 124—128, 137—139, 142, 143, 147, 148, 189, 191, 192, 278, 279, 281, 396, 398
Энгессер Фредерих (Engesser, Frederich) 117, 393
Энтони Р. Л. (Antony, R. L.) 180, 399
Эриксеи Джеральд (Ericksen, Jerald) 336
Эфрон Л. (Efron, L.) 222, 233, 253, 254, 256, 408, 410

Ю К. Х. (Yew, C. H.) 215
Юнг Томас (Young, Thomas) 47, 374

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Абсорбция волн разгрузки. Unloading wave, absorption of. *Entlastungswelle, Absorption der* 266, 268

Аналогия кулонова трения для прерывистой деформации. Coulomb friction analog for discontinuous deformation. *Coulombsche Reibungs—Analogon für unstetige Deformation* 283, 284

Анизотропность. Anisotropy. *Anisotropie* 102—106, 308—311

Аномалия температурная растянутой резины, эффект Гафа. Thermal anomaly of stretched rubber; the Gough effect. *Thermische Anomalie von gedehntem Gummi, Gougheffekt* 368—374

Волна нарастающая малой амплитуды в предварительно напряженном теле. Incremental wave in prestressed solids. *Überlagerte Welle kleiner Amplitude in vorgespannter Festkörpern* 234—236, 238—240, 333—336, 354—356

— отраженная. Wave, reflected. *Walle, reflektierte* 231, 264—272

Волны деформации растяжения. Tensile waves. *Dehnungswelle* 330—333, 254—256

— медленные МакРейнольдса. McReynolds' slow waves. *McReynoldssche langsame Wellen* 283, 284, 289

— разгрузки, теория Ли. Unloading waves, Lee's theory of. *Entlastungswellen, Leesche Theorie der* 267—272

— ударные. Shock waves. *Stoßwelle* 38—102, 354—358

Вязкопластичность. Viscoplasticity. *Viscoplastizität* 43—45, 184—193, 207—209, 217, 218

Вязкость твердых тел. Viscosity of solids. *Viscosität von Festkörpern* 74, 75

Гипотеза Геста — Треска. Guest — Tresca hypothesis. *Guest — Tescasche Hypothese* 24—33, 82—86, 107—109

— Доннела билинейная для пластических волн. Donnel's bilinear hypothesis for plastic waves. *Donnellsche bilineare Hypothese für plastische Wellen* 213, 214, 218, 219

— максимального касательного напряжения. Maximum shearing stress hypothesis. *Hypothese der maximalen Scherspannung* 82—84, 115, 116

— — напряжения.— stress hypothesis.— — — *Spannung* 82—84

— максимальной деформации удлинения.— strain hypothesis.— — — *Dehnung* 82—84

— максимума энергии изменения формы.— energy of distortion hypothesis.— — *Maximalenergie der Verzerrung* 28—33, 85, 86, 107, 108

— о диффузии и вакансиях атомов раствора. Solute atom diffusion-vacancy hypothesis. *Fremdatomwanderung zu Leerstellen Hypothese der* 283, 284

— Фитцджеральда волнового движения частиц. Fitzgerlad's particle wave hypothesis. *Fitzgeraldsche Hypothese der Teilchenwellen* 283, 284

Гипотезы Данна для квазистатического ударного испытания. Dunn hypotheses for the «quasi-static» impact test. *Dunnsche Hypothesen für den «quasistatischen» Aufpralltest* 199—218

Давление, влияние его на когезию твердых тел в экспернментах Спринга. Pressure, Spring's experiments on cohesion of solids under. *Druck, Springsche Experimente zur Kohäsion von Festkörpern unter* 71—76, 81

— высокое, эффект Савара — Массона при нем. High pressure, Savart-Masson effect at. *Hochdruck, Savart-Masson — Effekt unter* 72—76

Данные, относящиеся к низкой температуре. Low temperature data. *Tieftemperaturdaten* 130—139, 168—173

— по зависимости между давлением и скоростью течения. Pressure-flow velocity, data on, *Druck-Fließgeschwindigkeit, Daten über* 77—82

Датчик тензометрический электрического сопротивления. Electric resistance strain gage. *Dehnungsmesser durch elektrischen Widerstand* 232, 233

Дефект упругости. Elastic defect. *Elastischer Defekt* 47, 48

Деформация динамическая изохорическая. Isochoric dynamic deformation. *Isochore dynamische Deformation* 257, 258, 260

— истиниая. Strain true. *Dehnung wahre* 109—111, 151—156, 168, 174, 298, 299, 301—304

— конечиая. Finite deformation. *Endliche Deformation* 5—71

— —, первое графическое представление.

— —, first graphical presentation of.— —, *erste graphische Darstellung von* 10, 11

— —, прерывистость.— —, discontinuous.— —, *unstetig* 275—296

— —, профиль волны. Strain, finite, wave profiles. *Dehnung, endliche, Wellenprofile* 251, 252

— — шнура (струны). Finite deformation of strings. *Endliche Deformation von Saiten* 357—360

— микропластическая. Deformation micro-

plastic. *Deformation microplastische* 48, 49
— неоднородная.— inhomogeneous.— *inhomogene* 277, 278, 298, 299, 354—356
— иоминальная (условная). Strain, nominal. *Dehnung, nominale* 109—111, 151—153, 161, 162, 295, 296, 322, 323, 339, 340
— октаэдрического сдвига.— octahedral shearing.— *octahedrische Scherung* 112—114
— под воздействием гидростатического давления. Deformation under hydrostatic pressure. *Deformation unter hydrostatischem Druck* 85, 86, 89, 90, 98, 99, 116, 117
— ползучести. Creep deformation. *Kriech-Deformation* 7—9, 184, 185
— сдвига определяющая. Resolved shear deformation. *Aufgelöste Scherungsdeformation* 117—119, 126, 127
— — —, определение понятия.— — —, defined.— —, *definiert* 119, 120
—, соответствующая переходу второго порядка. Transition strains for second order transitions. *Übergangsdehnungen für Übergänge zweiter Ordnung* 147, 148, 173, 178, 304, 306—308, 342, 343, 350—352
Дислокации. Dislocations. *Versetzungen* 126, 127, 130, 131, 134
Диспергирование волны. Dispersion, wave. *Dispersion, Welle* 242—244

Железо. Iron. *Eisen* 93, 94, 148, 153, 154, 191—193, 195, 196, 224—226, 233, 234

Зависимость между давлением и объемом, опытно найденная для нескольких тел. Pressure-volume measurements in several solids. *Druck-Volumen-Messungen in verschiedenen Festkörpern* 89—97
— температурная коэффициентов параболы при конечных деформациях. Temperature dependence of parabola coefficients for finite strain. *Temperaturabhängigkeit der Parabelkoeffizienten für endliche Dehnung* 112—114, 141—144, 248, 249, 261—263
Закон Герстнера. Gerstner's law. *Gerstnersches Gesetz* 10
Замораживание повторное. Refreezing. *Wiedergefrieren* 71, 72

Идея квазистатического испытания, распространенная на удар. Quasi-static test, extended to impact. *Quasistatischer Versuch ausgedehnt auf Aufprall* 201, 202, 207—209
Изменение объема при пластической деформации. Volume change in plastic deformation. *Volumänderung in plastischer Deformation* 104—106, 348—352
Измерение деформаций. Strain measure. *Dehnungsmaß* 151—153
— перемещений, изменяющихся во времени. Displacement-time measurements. *Verschiebung-Zeit-Messungen* 251, 252
Интерференция оптическая, использование в экспериментах. Interference optics, experiments employing. *Interferenzoptik, Experimente mit* 244, 245
Испытание на удар образцов с надрезом. Notched bar impact test. *Gekerbter Stab Aufpralltest mit* 193, 194, 217, 218
Испытательная машина Тарстона с автоматическим изображением диаграммы напряжений. Thurston's autographic testing machine. *Thurstons selbstschreibende Testmaschine* 39—45
История нагружения при более чем одном ненулевом компоненте напряжения. Loading histories with more than one non-zero stress component. *Belastungsgeschichte mit mehr als einer von Null verschiedenen Spannungskomponente* 81—90, 109—116, 301 308, 310, 311, 314, 315, 337, 356, 374—380
— термическая (температурная) в процессе деформирования. Thermal histories during deformation. *Thermische Geschicht während einer Deformation* 178—184, 321—323, 368—372

Камень. Stone, *Stein* 85, 86
Квантование значений коэффициентов параболы и деформаций переходов второго порядка. Quantized parabola coefficients and second transitions. *Quantizierte Parabelkoeffizienten und Übergänge zweiter Ordnung* 140—153, 159—176, 263, 264, 295, 296, 303, 304, 306—308, 324, 330, 331, 339, 340
Кишка, деформирование. Gut, deformation of. *Darm, Deformation von* 5
Когезия твердых тел при сжатии. Cohesion of solids under pressure. *Kohäsion in Festkörpern unter Druck* 71—76
Колебание уровня деформации растяжения. Tensile pulse. *Dehnungspuls* 356, 357
Коэффициент восстановления (упругости). Coefficient of restitution. *Erholungskoeffizient* 267—272
— поликристалличности. Aggregate ratios. *Aggregatverhältnisse* 141, 142, 173, 178, 296—299, 301—304, 306—308, 340—345, 352—354
— Пуассона. Poisson's ratio. *Poissonsches Verhältnis* 372, 373
Коэффициенты параболы. Parabola coefficients. *Parabolische Koeffizienten* 128—130, 134, 135, 140—153, 159—179, 257, 258, 263, 264, 295, 296
— —, дискретное квантованное распределение значений.— —, discrete distribution of.— —, *diskrete Verteilung von* 140—153, 159—177, 263, 264, 303, 304, 330, 331, 337—356
— —, линейная зависимость от температуры.— —, linear temperature dependence of.— —, *lineare Temperaturabhängigkeit von* 141, 142, 168—173, 249—251, 261—263
— — по Тэйлору и Элам для монокристаллов алюминия и золота. Taylor and Elam's single crystal parabola coefficients for aluminum and gold. *Taylor und Elamsche Einkristall-Parabelkoeffizienten für Aluminium und Gold* 143, 144
Критерий Максвелла — фон Мизеса. Maxwell-von Mises criterion. *Maxwell-von Misessche Kriterium* 85, 86, 107—109, 176, 177, 296—298
— Треска (условие пластичности) максимального сдвига. Maximum shear criterion, Tresca. *Maximales Scherungskriterium, Trescasches* 28—33
Кручение. Torsion. *Torsion* 173—178, 279, 280, 289, 300, 301, 313—315, 342, 343, 359—366, 378—381

Латунь. Brass. *Messing* 251, 274, 275, 330, 331
Лед. Ice. *Eis* 15, 16, 71, 72, 81

Линии Лидерса. Luders' lines. *Lüderssche Linien* 37—39, 40

Машины испытательные жесткие. Hard testing machines. *Härtetest—Maschinen* 192, 193, 278—282, 308—313
Металлургия порошковая. Metallurgy, powdered. *Sintermetallurgie* 74, 75
Микропластичность Microplasticity. *Mikroplastizität* 45, 46, 315, 316
Модуль касательный. Tangent modulus. *Tangentenmodul* 372—376
— сдвига, квантованное распределение значений. Shear modulus, quantized distribution of. *Schermodul, gequantelte Verteilung des* 181—183
— упругости и когезия, влияние на них поля электрического тока и магнитного поля. Elastic modulus and cohesion, effect of electric current and magnetic fields upon. *Elastizitäts modul und Kohäsion, Wirkung des elektrischen Stroms und der magnetischen Felder auf* 318, 320
Монокристалл гексагональной сингонии. Single crystals, hexagonal. *Einkristalle, hexagonale* 128—130
—, его рост.— —, growth of.—, *Wachstum von* 117—119
— свинца.— —, lead.—, *Blei* 151—153
— цинка.— —, zinc.—, *Zink* 130, 131
Монокристаллы, эксперименты с ними.— —, experiments on.—, *Experimente mit* 95, 96, 116—141, 291, 292, 328—330
Мультимодульность в процессе разгружающих циклов. Muitiple elasticities during unloading cycles. *Multiple Elastizitäten während Entlastungszyklen* 318, 320
— (множественность значений одного и того же по природе модуля) (мультиупругость). Muitiple Elasticities. *Multiple Elastizitäten* 181—183, 264—266, 318—320, 354—356
Мышца лягушкн. Frog muscle. *Froschmuskel* 371, 372

Нагруженне взрывное. Loading, explosive. *Belastung, explosive* 98, 99, 209, 210
— мертвой нагрузкой.—, dead weight.— *mit Konstanten Gewicht* 147, 148, 159—161, 279, 280
— сложное.—, non-radial path of.—, *nichtproportionale* 304, 305, 312—320, 339—350, 353, 354
— циклическое. Cyclical loading. *Ziklische Belastung* 181—183, 315—319, 322, 323
Напряженне высокое гидростатическое. High hydrostatic stress. *Große hydrostatische Spannung* 89—99
— истинное. Stress true. *Spannung wahre* 109—111, 151—153, 155, 156, 168—174, 301—304, 322, 323
— касательное и сдвнг максимальные. Maximum shear stress and strain. *Maximale Scherspannung und Scherung* 114, 115
— — октаэдрическое. Stress octahedral shear. *Spannung oktahedrische Scherspannung* 112—115
— Кошн.—, Cauchy.— *Cauchysche* 151—153
— начальное при большой концентрацин.— initial peak. *Anfängliche Spannungsspitze* 325, 326
— номнальное.— nominal. *Spannung nominale* 109—111, 151—153, 168—176, 296—298, 339, 340
Напряжеиие, определение понятия.— definition. *Spannungsdefintion* 151—156
— переменное.—, alternating. *Spannung, alternierende* 63, 69, 71, 319, 322, 323
— перехода из второй стадии конечной деформации в третью. Stage II — stage III transition stress. *Phase* II — *Phase* III *Übergangspannung* 134
— Пиола — Кирхгофа. Stress, Piola-Kirchhoff. *Spannung, Piola-Kirchhoffsche* 153, 154, 296—298, 339, 340
— предельное.— ultimate.— *schließliche* 32, 45, 46, 184, 185, 188—190
— при совместном действии нескольких нагрузок.— combined.—, *Ümbinierte* 81, 82, 101, 102, 109—111, 300, 301, 304, 306, 308—320, 337—356
Неустойчивость состояния материала. Material instability. *Materielle Unstabilität* 352—356

Область переходная (промежуточная) по Треска. Tresca's intermediate region. *Trescasches Zwischengebiet* 28, 30, 31, 33, 82—84, 195, 196
— пластическая промежуточная. Intermediate plastic region. *Mittleres plastisches Gebiet* 28, 30, 31, 33, 82—84, 195, 196
Определение скорости частиц при помощи метода магнитной индукции. Magnetic induction technique for particle velocity. *Magnetische Induktionstechnik für Teilchengeschwindigkeit* 254—257
Ориентация кристаллографическая. Orientation, crystaliographic. *Orientierung kristallographische* 119, 120
Отвердение под давленнем. Pressure solidification. *Druckverfestigung* 72—74
Отжиг полный твердого тела для установленна вида определяющнх уравненнй. Fully annaled solid, general constitutive equations for. *Voll ausgeglühter Festkörper, allgemeine Materialgleichung für* 339, 340
— — — —, определение понятня.— — —, definition of.— — —, *Definition des* 161, 162

Память у материала. Material memory phenomena. *Materielle Gedächtnisphänomene* 63, 69, 71, 159—162, 275—277, 322, 323, 339, 340
Перемещенне, определение при помощи емкостной технинки Дэвиса. Capacitance displacement technique of Davies. *Kapazitäts-Verschiebungstechnik von Davies* 211, 212
—, — — — оптнческой методики. Optical displacement technique. *Optische Verschiebungstechnik* 251
Переход матерни из одной фазы в другую под давлением. Pressure transitions. *Druckübergänge* 74, 75
Переходы. Transitions. *Übergänge* 77—81
— второго порядка.—,second-order.—, *zweiter Ordnung* 95—97, 140, 141, 144—148, 163—174, 264—266, 291, 292, 295, 296, 302, 304, 306, 346—348, 352—356
— первого порядка.—, first-order.—, *erster Ordnung* 94—96
— третьего порядка.—, third-order —, *dritter Ordnung* 97
Песчаник. Sandstone. *Sandstein* 85—90
Пластичность динамическая. Plasticity, dynamic. *Plastizität, dynamisch* 187, 188, 193, 194, 202—204

Пластичность мрамора и песчаника. Ductility of marble and sandstone. *Ductilität von Marmor und Sandstein* 85—90
—, общая теория. Plasticity, general theory of. *Plastizität, allgemeine Theorie der* 337—356
—, теория течения.—, incremental theory of.—, *Inkrementheorien der* 28, 30, 31, 312—316, 344, 345
Поверхность текучести. Yield surface. *Grenze des plastischen Gebietes* 81, 82, 89, 90, 101—109, 157—159, 173, 175, 176, 308—326
— —, переменные Лоде.— —, Lode variables.— — — —, *Lodesche Variablen* 101—103, 107, 108
— — согласно гипотезе Мизеса.— —, von Mises hypothesis.— — — —, *von Mises Hypothese* 85, 86, 107—109, 176, 177, 296—298
— —, эксперименты Лоде.— —, Lode's experiments.— — — —, *Lodesche Experimente* 101—103, 107, 108
Последействие термическое. Thermal aftereffect. *Thermische Nachwirkung* 178—184
— упругое. Elastic after-effect. *Elastischer Nachwirkungseffekt* 372, 373
Превращения (переходы) полиморфные. Transitions, polymorphic. *Übergänge polymorphe* 98, 99
Предел пропорциональности. Proportional limit. *Grenze des linearen Verhaltens* 48, 49, 315, 316
— текучести. Yield limit. *Plastische Grenze* 12, 47—49, 57, 58, 62, 63, 68, 272, 273
— упругости. Elastic limit. *Elastische Grenze* 12, 47—49, 57, 58, 62, 63, 68, 82—84, 88, 89, 101—109, 252—254, 267, 268, 272—277, 315, 316
— — динамический.— —, dynamic.— —, *dynamisch* 266, 268, 272—277
— — естественный.— —, natural.— —, *natürliche* 62, 63, 69, 71
— —, определение его Баушингером.— —, Bauschinger's definition of.— —, *Bauschingersche Definiton der* 48, 49, 315, 316
— —, повышение его значения.— —, elevation of.— —, *Anhebung der* 42—48, 55, 56, 192, 193, 254, 255, 273—275, 373, 374
Преднапряжение динамическое. Dynamic prestress. *Dynamische Vorspannung* 239—242, 333—336
Предсказание свойств поликристалла по свойствам монокристалла. Aggregate predicted from a knowledge of the free crystal. *Aggregat bestimmt aus der Kenntnis des freien Kristalls* 295—309
Предыстории термическая и механическая Prior thermal and mechanical history. *Thermische und mechanische Verbehandlung* 116, 117, 156, 157, 318, 320, 339, 340
Прерывистость деформирования, медленные волны МакРейнольдса. Discontinuous deformation, McReynolds' slow waves. *Unstetige Deformation McReynoldssche langsame Wellen* 283, 284, 289
— —, экспернмеит МакРейнольдса.— —,— experiment.— —, — *Experiment* 280—296
Продолжительность контакта, метод Пуйе. Time of contact, Pouillet's technique. *Kontaktzeit, Pouilletsche Method* 199, 200
— — при ударе. Impact, duration of. *Aufprall, Daner des* 267—272
Проникновенне в масло. Penetration of butter. *Durchdringung von Butter* 6
Профиль волны скорости частицы. Particle velocity wave profiles. *Teilchengeschwindingkeitsprofile in Wellen* 251—257
Путь нагружения лучевой (простое нагружение) Loading paths, radial. *Belastungskurven proportionale* 107—116, 301—308, 337—356
— — не лучевой (сложное нагружение).— —, non-radial.— *nichtproportionale* 301—305, 312—320, 339—350, 353, 354

Разрушение. Rupture. *Bruch* 32
Распределение кватованное значений констант упругости. Quantized distribution of elastic constants. *Quantisierte Verteilung der elastischen Konstanten* 263, 264
— — форм деформации.— — — deformation modes.— — — *Deformationstypen* 163—166
Распространение волн в резине. Ware propagation in rubber. *Wellenfortpflanzung in Gummi* 354—356
— — конечной амплитуды, эксперименты, проведенные до 1956 г. Finite amplitude wave propagation, experiments before 1956. — *mit endlich Amplitude, Experimente vor* 1956 2i7—244
— — — —, непосредственное измерение профилей волн деформации.— — — —, directly measured strain profiles.— — — —, *direct gemessene Dehnungsprofile* 242—266, 325—339
— — — — в монокристаллах.— — — — in single crystals.— — — — *in Einkristallen* 328—330
— — нелинейных. Wave propagation, nonlinear. *Wellenfortpflanzung, nichtlinear* 242—295, 325—336
— — одномерных.— —, one-dimensional.—, *eindimensional* 257, 258, 354—356
Растяжение и сжатие. Tension vs compression. *Dehnung und Kompression* 62, 63
Резина. Rubber. *Gummi* 96, 97, 359, 360
—, деформация растяжения.—, tensile deformation.—, *Zugdeformation von* 373, 374
— индийская, коэффициент Пуассона.— of India, Poisson's ratio for.—, *Poissonsches Verhaltnis für* 372, 373
—, конечная упругость.—, finite elasticity.—, *endliche Elastizitäts theorie von* 365—383
—, распространение в ней волн.—, wave propagation in.—, *Wellenfortpflanzung* in 354—356, 359, 360, 373, 374
—, сжимаемость.—, compressibility of.—, *Kompressibilität von* 96, 97, 372, 373
—, эксперименты Ривлина и Сондерса.—, Rivlin and Saunders' experiments.—, *Rivlinsche und Saunderssche Experimente* 374
Результаты экспериментов с алюминием. Experimental results for aluminum. *Experimentelle Ergebnisse für aluminium* 96, 97, 100—102, 105—108, 122—127, 130, 137—139, 145—148, 150, 151, 153—156, 163—166, 168, 178, 181—184, 192, 193, 227—232, 236, 237, 246—249, 251, 252, 254—256, 259—263, 267—270, 273—275, 279, 280, 282—295, 304—308, 314—319, 322—339, 342, 343, 346—354, 358
— — — барием.— — — barium.— — — *Barium* 95, 96
— — — бронзой.— — — bronze.— — — *Bronze* 12
— — — висмутом.— — — bismuth. — — — *Wismut* 78—80
— — — воском.— — — wax.— — — *Wachs* 25, 26, 31

Результаты экспериментов с глиной.— — — Clay.— — — *Ton*— — — 25, 26, 31
— — — двойными сплавами.— — — binary allоys.— — — *binäre Legierungen* 125, 286, 287
— — — железом.— — — iron.— — — *Eisen* 10—12, 28, 30, 31, 33—36, 39—41, 45, 59—61, 64—68, 70, 96, 97, 102, 127, 128, 148, 153, 154, 190—193, 198
— — — золотом.— — — gold.— — — *Gold* 125, 127, 128, 134, 143, 144
— — — нриднем.— — — iridium.— — — *Iridium* 96, 97
— — — кадмнем,— — — cadmium.— — — *Kadmium* 78—80, 107—108
— — — калием.— — — potassium.— — — *Potassium* 78—80, 95, 96
— — — каменной солью.— — — rock-salt.— — — *Steinsalz* 96, 97
— — — камнем — мрамором.— — — stone — marbie.— — — Stein — Marmor 87, 88
— — — камнем — песчаником.— — — stone — sandstone.— — — *Sandsteine* 88, 89
— — — латунью.— — — brass.— — — *Messing* 10—12, 125, 251, 274, 275, 327, 328, 330, 331, 362—364
— — — литнем.— — — lithium.— — — *Lithium* 95, 96
— — — льдом.— — — ice.— — — *Eis* 81, 82
— — — маслом.— — — butter.— — — *Butter* 6
— — — медью.— — — copper.— — — *Kupfer* 28, 30, 31, 33—36, 40, 41, 96, 97, 102, 105—109, 112—116, 125, 127, 128, 136—139, 153, 154, 159, 173, 174, 176, 177, 190—193, 201, 202, 209, 213—217, 222—224, 226, 233, 234, 238, 239, 248, 249, 277—279, 303, 304, 310—313, 324, 328, 350—354
— — — натрием.— — — sodium.— — — *Natrium* 78—80
— — — никелем.— — — nickel.— — — *Nickel* 96, 97, 102
— — — оловом.— — — tin.— — — *Zinn* 12, 28, 30, 31, 33, 78—81, 184—188
— — — платиной.— — — platinum.— — — *Platin* 96, 97
— — — плексигласом.— — — perspex.— — — *Perspex* 213
— — — резиной (каучуком).— — — rubber.— — — *Kautschuk* 96, 97, 213, 356, 357, 359, 360, 366, 367, 370—374, 376—380
— — — свинцом.— — — lead.— — — *Blei* 8—10, 12, 18, 19, 24—33, 78—80, 107, 108, 213, 241, 242, 256, 257
— — — селеном.— — — selenium.— — — *Selen* 95, 96
— — — серебром.— — — silver.— — — *Silber* 96, 97, 125, 134, 168—170
— — — сталью.— — — steel.— — — *Stahl* 12, 40, 41, 45, 49—53, 56, 84, 85, 105—108, 114—116, 153, 154, 192, 206, 291, 292, 303, 304, 310, 311, 361—364
— — — стеклом.— — — glass.— — — *Glas* 97, 107, 108
— — — сурьмой.— — — antimony.— — — *Antimon* 95, 96
— — — таллнем.— — — thallium.— — — *Thallium* 78—80
— — — торием.— — — thorium.— — — *Thorium* 96, 97
— — — ураном.— — — uranium.— — — *Uranium* 170, 171
— — — цезием.— — — cesium.— — — *Caesium* 95, 96
— — — цинком.— — — zinc.— — — *Zink* 12, 33, 78—80, 130, 131, 171, 172, 251, 261, 310, 311

Свинец. Lead. *Blei* 16—33, 255, 256
Серебро. Silver. *Silber* 96, 97, 134, 167, 170
Сжатие двумерное. Compression, two-dimensional. *Kompression Zweidimensionale* 116, 117, 343, 344
—, первый эксперимент.—, first experiment in.—, *erstes Experiment mit* 47, 48
— свинцовых цнлиндров.— of lead cylinders.— *von Bleizylindern* 7, 8
Сжимаемость. Compressibility. *Kompressibilität* 85—102, 104—106, 257—261, 344, 345, 374—376
— абсолютная.—, absolute.—, *absolute* 92—94
— при гидростатнческом давлении в зависнмости от атомного веса.—, hydrostatic, atomic dependence of.—, *hydrostatische Abhängigkeit vom Atomgewicht* 90, 91
Скольжение двойное. Double slip. *Doppelslip* 117—125
— ординарное. Single slip. *Einfacher Slip* 117—127
— — макроскопическое.— —, macroscopic.— —, *makroskopisch* 122—150
Скорости волн по Трусделлу. Wave speeds Thruesdell's. *Wellengeschwindigkeiten Truesdellsche* 335, 336
— фазовая и групповая Velocities, phase and group. *Geschwindigkeiten, Phasen- und Gruppen* 206, 220, 221, 224—226
Скорость волны, нарастающей в преднапряженном поле. Wave speed, incremental, in the prestressed field. *Wellengeschwindigkeit überlagerte Welle in vorgespannten Feld* 233
— деформацни. Strain rate. *Dehnungsrate* 184—193, 202—217, 251, 252, 257, 258, 291, 293, 295
— критическая по фои Карману. Von Kármán's critical velocity. *Von Kármánsche kritische Geschwindigkeit* 206, 220, 221, 224—226
— течення, возрастанне с ростом температуры. Flow rate, increase with temperature. *Fließgeschwindigkeit, Zuwachs mit der Temperatur* 77—81
Соударение осевое стержней. Axial collision of rods. *Axialer Aufprall von Stäben* 226—234, 245—277, 325—339
Сплавы двойные Alloys, binary. *Legierungen, binäre* 248, 249, 273—275, 326—330
Стадии конечной деформацин монокристаллов. Stages of finite deformation in single crystals. *Phasen der endlichen Deformation in Einkristallen* 131—135, 141, 142
Сталь Steel. *Stahl* 12, 55—72, 105—108, 114, 115, 192, 224—226, 233, 234, 303, 304
Стержень Гопкинсоиа сжатый. Hopkinson pressure bar. *Hopkinsonscher Druckstab* 209, 210, 226—232
Структура Видманштетова. Widmannstedt figures. *Widmannstetsche Figuren* 37—40
— двух волн, возникающих в стержне после удара. Wave, two, structure following impact. *Welle, zwei, Struktur nach Aufprall* 333—336

Твердое тело под воздействием взрывного удара высокой интенсивности. Solids under high explosive shock. *Festkörper unter explosiver Stoßbelastung* 100, 101

Температура сходственная (гомологическая). Fractional melting point temperature. *Verhältnis der Umgebungstemperatur zur Schmelztemperatur* 141, 142, 188—190, 261—263
Теория волн конечной амплитуды. Finite amplitude wave theory. *Theorie von Wellen mit endlicher Amplitude* 195, 196, 213, 214, 226, 227
— — нелинейная. Wave theory, nonlinear. *Wellentheorie nichtlineare* 217, 218, 257, 258, 333—336
— — — Тэйлора — фон Кармана. Taylor - von Kármán nonlinear theory of waves. *Taylor-von Kármán nichtlineare Wellentheorie von* 218, 219, 231—233, 251, 252, 269—272
— Ли волн разгрузки. Lee's theory of unloading waves. *Leesche Theorie der entlastenden Wellen* 267—272
— максимального напряжения. Stress theory, maximum. *Spannungstheorie, Maximal* 82—84
— поликристаллического тела Aggregate theory. *Aggregate Theory der* 125, 173, 295—299
— Ривлина для конечной упругости резины. Rivlin's theory for the finite elasticity of rubber. *Rivlinsche endliche Elastizitätstheorie von Gummi* 374—380
Термопластичность. Thermoplasticity. *Thermoplastizität* 178—184, 206
—, Треска о ней.—, Tresca on.—, *Tresca zur* 33, 34
Термоупругость. Thermoelasticity. *Thermoelastizität* 33, 34, 368—372
—, эксперименты Джоуля.—, Joule's experiments.—, *Joulesche Experimente* 368—372
Течение твердых тел. Flow of solids. *Fließen von Festkörpern* 12—34, 77—82
Точка нейтральная термическая у резины. Neutral point, thermal in rubber. *Neutraler Punkt, thermischer in Gummi* 369—371

Угол поворота нормали к поверхности образца, закон изменения во времени Surface angle vs time histories. *Oberflächenwinkel, über Zeit Geschichte des* 257, 258
— — — — — —, измерение его.— —, measurement of.—, *Messung des* 244—249, 259—261
— — — — — —, определение его при помощи дифракционной решетки.— —, diffraction grating measurement of.—, *Beugungsgittermussung* 244—249, 259—261
Удар, версия Колски эксперимента Данна. Impact, Kolsky's version of Dunn's experments. Aufprall, *Kolskysche Version des Dunnschen Experiments* 209—215
— несимметричный.—, nonsymmetrical.— *nichtsymmetrisch* 228—230, 326—328
— поперечный о струну.—, transverse, of strings.—, *transversal von Saiten* 357—360
—, продолжительность.—, duration of.—, *Dauer des* 269, 270
— симметричный при свободном полете.—, symmetrical free flight.— *symmetrisch in freien Flug* 234, 235, 246—258
—, энергетический баланс.—, energy balance.—, *Energiebalanz* 12, 178—184, 209, 210, 224—226, 269—272
Упругость конечная резины. Elasticity, finite, of rubber. *Elastizität, endliche, von Gummi* 354—356, 359, 360, 365—383
Уравнение Бонненблюста. Bohnenblust equation. *Bohnenblustsche Gleichung* 266, 268
— состояния. Equation of state. *Zustandsgleichung* 322, 323
Усталость стали. Fatigue of steel. *Ermüdung von Stahl* 47, 48, 52, 53, 63, 69, 71
Устойчивость остаточной деформации. Stability of the permanent deformation. *Stabilität der permanenten Deformation* 42, 43, 48, 49, 55, 56, 72—76, 192, 193, 352—356

Формы деформации. Deformation modes. *Deformationstype* 141, 142, 161—166, 178, 328—330, 339, 340, 342—356
— —, квантованное распределение.— —, quantized distribution of.—, *quantisierte Verteilung der* 163—176, 263, 264, 339, 340
Функция Муни энергии деформации. Mooney strain energy function. *Mooneysche Dehnungs-Energie-Funktion* 380, 381
— отклика для разрешающего сдвига. Resolved shear response function. *Aufgelöste Scherungs-Antwortfunktion* 134, 135, 151—153
— — нелинейная: закон Герстнера. Gerstner's low. *Gerstnersches Gesetz* 61—63, 156
— — —: параболическая функция Белла для кристаллов. Bell's parabolic functions for crystals. *Nichtlineare Antwortfunktion: Bellsche parabolisches funktion für Kristalle* 151—153, 161, 162, 176, 177, 263, 264, 340—342
— — — Ривлина для резины. Rivlin's response function for rubber. *Rivlinsche Antwortfunktion für Gummi* 376, 377
— — параболическая. Parabolic response function. *Parabolische Antwortfunktion* 134, 135, 141, 142, 151—153, 161, 162, 176, 177, 223, 224, 256—258, 263, 264, 272, 273, 290—293, 295, 300, 301, 324, 326—330, 340—344
— —, предсказанная для поликристаллического тела на основе данных о монокристалле. Response function, prediction of aggregate, from single crystal. *Antwortfunktion. Vorhersage der Aggregate der polykristallinen Phase aus der Deformation des Einkristalls* 289—309

Цинк, кристаллы. Zinc crystals. *Zinkkristalle* 128—130

Эксперимент Альтера и Картиса с нарастающими волнами, в котором использовано динамическое преднапряжение. Alter and Curtis' incremental wave experiment using dinamic prestress. *Alters und Curtis' Wellenexperiment unter dynamischer Verspannung* 239, 240
— Белла с нарастающей волной. Bell's incremental wave experiment. *Bellsches Experiment mit überlagerter Welle* 233—244, 287—289, 331—336
— — — использованием дифракционных решеток. Diffration grating experiment of Bell. *Beugungsgitterexperiment von Bell* 217, 218, 242—249, 251, 257, 258, 274, 275, 325, 326, 330, 331, 333, 334
— — — оптическим определением перемещений. Bell's optical displacement expe-

riment. *Bellsches Experiment mit optischer Verschiebung* 251—252
— Геста для построения поверхности текучести. Guest experiment for determining the yield surface. *Guestsche Experiment zur Bestimmung der plastische Grenze* 81, 82, 101—111, 308—320
— Гопкинсона. Hopkinson's experiment. *Hopkinsonsches Experiment* 36, 37, 193—200
— Данна. Dunn's experiement. *Dunnsches Experiment* 199—218, 220, 221, 226
— Диллона по изучению термопластичности. Dillon's experiment on thermoplasticity. *Dillonsches Experiment über Thermoplastizität* 180—184
— Колски. Kolsky's experiment. *Kolskysche Experiment* 209—215
— Кэмпбелла удариый. Campbell's impact experiment. *Campbellsches Aufprallexperiment* 231—234
— на вывертывание (опрокидывание). Eversion experiments. *Umstülpexperimente* 380, 381
— с нагрузочным стержнем. Load bar experiment. *Stabexperiment* 228—230, 326—330
— ударный Дюве. Duwez's impact experiment. *Duwezsches Aufprallexperiment* 221—226
— — Маиа с использованием маятника. Mann impact experiment using a rotating flywheel. *Mannsches Aufprallexperiment mit einem rotierenden Schwungrad* 206—209
— фон Кармана при совместном воздействии на образец всестороннего сжатия высокого уровня и одноосного нагружения. Von Kármán experiment for uniaxial tests at high pressure. *Von Kármánsches Experiment für einachsige Tests unter Hochdruck* 85—90
— Хопмана удариый. Hoppmann's impact experiment. *Hoppmannsche Aufprallexperiment* 220—222, 224—226, 242—244
Эксперименты Баушиигера. Bauschinger's experiments. *Bauschingers Experimente* 53—72
— Бриджмана по гидростатическому сжатию твердых тел. Bridgman's experiments on hydrostaticity of solids. *Bridgmansche Experimente zur Hydrostatik von Festkörpern* 89—99
— — — пластическому деформированию сталей под воздействием высокого давления.— — — the plastic deformation of steel under high pressure.— — — *plastischen Verformung des Stahls unter hohem Druck* 115—117
— — с использованием аппарата высокого давления. Bridgman's experiments using high pressure apparatus. *Bridgmansche Experimente mit dem Hochdruckapparat* 89—95
— высокотемпературные. High temperature test. *Hochtemperatur-Tests* 260
— Дж. Гопкинсона ударные. Impact experiments of J. Hopkinson. *Aufprallexper mente von J. Hopkinson* 193, 194
— Джоуля. Joule's experiments. *Joulesche Experimente* 368—372
— Дэвиса с неодноосно напряженными поликристаллическими образцами. Davis' experiments o combined stress in polycrystals. *Devisssche Experimente über Kombinierte Spannungen in polykristallinen Stoffen* 109—116, 301—304, 339, 340
— иа совместно происходящие растяжение и кручеиие. Tension-torsion experiments. *Dehnungs-Torsions-Experimente* 84, 85, 101—109, 115, 116, 300—308, 310—320, 337, 356, 379, 380
— — удар с использованием в них гипотезы Данна. Impact tests, Dunn's hypotheses for. *Aufpralltests, Dunnsches Hypothesen* 200, 201, 207—215
— — — — — — — — квазистатнческой концепции.— —, extended quasistatic.—, *erweitert quasistatisch* 193, 194, 202—217
— по одноосному испытанию поликристаллических тел при конечиой деформации. Experiments on polycrystals at finite strain, uniaxial tests. *Experimente mit polykristallinen Stoffen bei endlicher Dehnung, einachsige Versuche* 156—161
— — определению границы между упругой и пластической областями. Elastic-plastic boundary experiments. *Elastisch-plastische Randexperimente* 259, 260, 327, 328, 330, 331
— Ривлина и Сондерса. Rivlin and Saunders' experiments. *Rivlinsche und Saudersche Experimente* 374—380
— Спринга по уплотнению твердых тел. Spring's experiments on the compaction of solids. *Springsche Experimente zur Verdichtung von Festkorpern* 71—76, 81
— —, комментарий к иим Бриджмена. Bridgman's comments on Spring's experiments.— —, *Bridgmensche Bemerkungen zu* 74, 75
— Тэйлора и Квинн. Taylor and Quinney's experiments. *Taylor und Quinneysche Experimente* 102—111, 126—128, 171—172, 174—177, 310, 311
Экстензометр зеркальный Баушингера. Bauschinger's mirror extensometer. *Bauschingers Spiegeldehnungsmesser* 53—55
— механнческий. Extensometer, mechanical. *Ausdehnungsmesser, mechanischer* 39, 40
— оптический.— optical.—, *optischer* 47, 48, 251, 252, 361—363
Эиергия деформации. Deformation energy. *Deformationsenergie* 12, 178, 179, 202—204, 206, 209, 210, 221, 222, 296—298, 339, 340, 376, 377, 224—226, 269—272
Эффект Баушингера. Bauschinger effect. *Bauschingereffekt* 51—71
— Гафа в резине. Gough effect in rubber. *Goughscher Effekt in Gummi* 365, 366, 368, 369, 374—376
— Пойнтинга. Poynting effect. *Pointingefekt* 359, 366, 379, 380
— Портвена — Ле Шателье (Савара — Массона). Portevin-Le Chatelier effect. *Portevin-Le Chatelierscher Effekt* 49—51, 72—76, 192—194, 275—296, 333—336, 344, 345, 348, 350—352
— — — (— —) при высоком давленин. Savart-Masson effect at high pressure. *Savart-Massonscher Effekt bei Hochdruck* 72—76
— пьезоэлектрический. Piezo-electric effect. *Piezoelektrischer Effekt* 325, 326.

## Содержание разделов I—III книги Дж. Ф. Белла «ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ЧАСТЬ I. МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ»

Русский перевод: М.: Наука, 1974

**I. Введение.**

**II. Нелинейность при малых деформациях.**

2.1. Введение. 2.2. Нелинейная упругость против линейной в XVIII веке. 2.3. Нелинейность зависимости между напряжением и деформацией для дерева при малых деформациях: Дюпен (1815). 2.4. Предшественники Дюпена в XVIII веке: Бюффон (1741), Дюамель (1742) и Готэ (1774). 2.5. Детали экспериментов Дюпена с деревянными балками (1815). 2.6. Эксперименты по нелинейному поведению дерева, железа и камня и введение понятия микропластичности: Ходкинсон (1824—1844). 2.7. «Закон Герстнера» для стальной фортепианной струны (1824). 2.8. Открытие ползучести металлов: Кориолис и Вика (1830—1834). 2.9. Открытие микродеформации: Л. Вика (1831). 2.10. Эксперименты по устойчивости остаточной деформации в железной проволоке: Леблан (1839). 2.11. О явлении, открытом Саваром (1837) и Массоном (1841) и известном под названием эффекта Портвена — Ле Шателье (1923). 2.12. Первые эксперименты, связанные с термоупругостью: опыты Гафа (1805) и Вильгельма Вебера (1830); открытие Вебером упругого последействия (1835). 2.13. Большая деформация струн из кетгута: Кармарш (1841). 2.14. Эксперименты по упругости и прочности основных тканей человеческого тела: Вертгейм (1846—1847). 2.15. Дальнейшие экспериментальные исследования по упругости органических тканей: сравнение функций отклика для живых и мертвых образцов, Вундт (1858), Фолькман (1859). 2.16. «Отмена» закона Гука Британской Королевской комиссией по железу в 1849 г. 2.17. Эксперименты по релаксации напряжений в стекле и латуни: исток линейной вязкоупругости, Кольрауш (1863). 2.18. Об изменении объема при пластических деформациях: опыты Баушингера (1879). 2.19. Исследования нелинейного кручения, включающие изучение влияния на намагничивание, проводившиеся с 1857 по 1881 г. 2.20. Уменьшение модулей с увеличением остаточной деформации: эксперименты Вертгейма (1844—1848), Кельвина (1865), Томлинсона (1881) и Фишера (1882) с металлами. 2.21. Циклическое нагружение шелка-сырца: Мюллер (1882). 2.22. Первое точное инструментальное наблюдение нелинейности металлов при инфинитезимальных деформациях: Джозеф Томпсон (1891). 2.23. Нелинейный закон Хартига: общая функция отклика в случае малых деформаций твердых тел (1893). 2.24. Закон Баха — Шюле (1897): переоткрытие параболической функции отклика Якова Бернулли (1695) и Ходкинсона (1824). 2.25. Эксперименты Грюнайзена (1906) с использованием интерферометра, установившие закон Хартига для инфинитезимальных деформаций металлов. 2.26. О некоторых примерах независимого открытия в XX веке нелинейных явлений, впервые наблюдавшихся в XIX веке. 2.27. Некоторые современные исследования по нелинейности при инфинитезимальной деформации в кристаллических твердых телах. 2.28. Новые проблемы, подлежащие критике при обзоре экспериментов, описанных в литературе за последнее десятилетие. 2.29. Резюме.

**III. Малые деформации (линейная аппроксимация)**

3.1. Пионеры XVII века: Гук и Мариотт. 3.2. Эксперименты до 1780 г. Риккати, Мусшенбрук, Гравесанд, Кулон; введение Эйлером концепции модуля упругости. 3.3. Начало экспернментальной механики твердого тела как науки: изучение Кулоном кручения в 80-х гг. XVIII века. 3.4. Первое определение значения модуля упругости, выполненное Кулоном, и его эксперименты по вязкости и пластичности (1784). 3.5. Об определении значений констант упругости. 3.6. Эксперименты Хладни по продольным колебаниям стержней (1787). 3.7. Оценка фактов и мифов о модулях в лекциях Юнга по натуральной философии (1807). 3.8. Использование Жаном Био труб нового парижского водопровода для первого непосредственного измерения скорости звука в твердом теле (1809). 3.9. Введение Альфонсом Дюло квазистатических измерений при изучении линейной упругости (1813). 3.10. Исследование модулей упругости в течение трех десятилетий (1811—1841) до Вертгейма. 3.11. Гийом Вертгейм: Фарадей без Максвелла. 3.12. Мемуар Вертгейма 1842 г.: значения $E$ для 15 элементов и первое изучение эффектов температуры окружающей среды, предварительной истории обработки образцов, уровня нагружения и межатомного расстояния. 3.13. Мемуар Вертгейма 1843 г.: первые эксперименты с двух- и трехкомпонентными сплавами, включающие изучение влияния на модуль $E$ химического состава и скорости нагружения для 64 сплавов. 3.14. Мемуар Вертгейма 1844 г.: первое изучение зависимости значения модуля $E$ от напряженности электрнческого и магнитного полей. 3.15. Мемуары Вертгейма 1845—1846 гг. по упругости стекла, древесины и тканей человеческого тела. 3.16. Первые эксперименты Вертгейма по определеиию коэффициента Пуассона, доказавшие неприменимость атомистической теории Пуассона — Коши для описания напряженно-деформированного состояния кристаллических тел (1848). 3.17. Успех Вертгейма в первом определении частоты стоячих волн в столбах жидкости (1848). 3.18. Вертгейм о колебаниях пластин и «глубоком тоне» колеблющихся стержней. 3.19. Полемика Вертгейма с точки зрения XX века. 3.20. Эксперименты Кирхгофа по непосредственному определению коэффициента Пуассона (1859). 3.21. Эксперимент Корню (1869), в котором использовалась оптико-иитерференционная техника для определения коэффициента Пуассона. 3.22. Эксперименты Фохта по изучению изотропности стекла и определению для него значений модулей упругости (1882). 3.23. Определение отношения значений постоянных упругости по первой и второй частотам свободных колебаний пластины, выполненное Меркадье (1888). 3.24. Эксперименты Амага с использованием пьезометра (1884—1889). 3.25. Эксперименты Бока по изучению зависимости значения коэффициента Пуассона от уровня температуры (1894). 3.26. Исчерпывающее изучение Штраубелем эксперимента Корню по непосредственному определеиию коэффициента Пуассона (1899). 3.27. Эксперименты Грюнайзена по проверке теоретической зависимости между постоянными упругости изотропного тела посредством независимого определения значений $E$, $\mu$ и $\nu$. 3.28. Повторение эксперимента Кирхгофа по определению значения коэффициента Пуассона, выполненное в середине XX века. 3.29. Путаница, вызванная экспериментами Купфера (1848—1863). 3.30. Метод Мэллока для квазистатического определения модуля объемной упругости. 3.31. Использование Грюнайзеном метода Мэллока для сравнения постоянных упругости изотропиых твердых тел (1910). 3.22. Линейиая аппроксимация и одномерное распространение волн: Вертгейм и Бреге (1851). 3.33. Эксперименты Экснера по распространению волн в резине (1874). 3.34. Осевое соударение стержней в предположении линейности функции отклика: эксперименты Больцмана (1881 и последующие годы) и сопоставление их результатов с теорией Сен-Венана (1867). 3.35. Использование Хаузманингером (1884) методики Пуйе (1844) измерения продолжительности контакта при ударе в эксперименте Больцмана и в аналогичных экспериментах, выполнявшихся на протяжении полустолетия (1884—1936). 3.36. Первое использование электротензометрических датчиков сопротивления для изучения профилей волн в эксперименте Больцмана: Фаннинг и Бассет (1940). 3.37. Использование Дэвисом (1948) техники электрической емкости при определении перемещений во впервые выполненном сравнении профиля волны в стержне с предсказываемым на основе трехмерной теории Похкаммера для

цилиндрических брусьев (1876). 3.38. Эксперименты по распространению волн малой амплитуды в металлических цилиндрах, выполнявшиеся в течение последних двух десятилетий: последовательность изменений в технике экспериментов и в интерпретации результатов. 3.39. Ультразвуковые методы определения постоянных упругости. 3.40. Истории кратковременных нагружений. 3.41. О зависимости постоянных упругости от температуры (1843—1910). 3.42. Сравнение значений температурных коэффициентов, полученных на основе квазистатических экспериментов и экспериментов с использованием ультразвуковых нолн. 3.43. Об исследованиях температурной зависимости постоянных упругости и декремента затухания, выполненных после 1910 г. 3.44. Квантованиое распределение значений модуля упругости при сдвиге при нулевой температуре по Кельвину для упругих изотропных тел и мультимодульность для данного изотропного твердого тела: Белл (1964—1968). 3.45. Анизотропия. 3.46. Термоупругость. 3.47. Вязкоупругость. 3.48. Резюме.

*Джеймс Фредерик Белл*

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Часть II

Конечные деформации

Редактор *Н. П. Рябенькая*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *И. Я. Кришталь*

ИВ № 12166

Сдано в набор 01.02.84. Подписано к печати 27.08.84.

Формат 60×90¹/₁₆. Бумага книжно-журнальная

Литературная гарнитура.

Высокая печать. Усл. печ. л. 27. Усл. кр.-отт. 27.

Уч.-изд. л. 32.51. Тираж 5500 экз. Заказ № 2668.

Цена 4 р. 50 к.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
113 054 Москва, Баловая, 28

---

Отпечатано во 2-й типографии изд-ва «Наука» 121099
Москва, Шубинский пер., 10. Заказ № 675